ТЕХНОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ РАЗРЕЖЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МАТРИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ ГРАФА В WOLFRAM MATHEMATICA

Л. А. Пилипчук

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: pilipchuk@bsu.by

Приводится реализация в *Wolfram Mathematica* эффективных алгоритмов вычисления ненулевых компонент характеристического вектора с использованием технологии хранения и преобразования корневых деревьев, свойств разреженности системы и сетевых свойств опоры графа.

Present an implementation in *Wolfram Mathematica* efficient algorithms for the computation of non-zero components of characteristic vector with the use of technologies of storage and conversion of rooted trees, the properties of the sparsity of the system and network properties of support of the graph.

Ключевые слова: граф, разреженная система, опора, фундаментальная система решений, матрица инцидентности графа.

Keywords: graph, sparse system, support, fundamental system of solutions, incidence matrix of the graph.

Пусть $S=(I,U)$ – конечный ориентированный связный граф без кратных дуг и петель, где I – множество узлов и U – множество дуг, определенных на $I\times I, |I|<\infty, |U|<\infty$. Следуя [1] введем характеристический вектор $\delta(\tau,\rho)=(\delta^{\tau,\rho}_{i,j},(i,j)\in U)$, порожденный дугой $(\tau,\rho)\in U\setminus U_T$, где U_T – опора графа S для разреженной системы (1) с матрицей инцидентности графа. Согласно [1, 2] опорой U_T графа S для системы (1) является любое покрывающее дерево графа S. Компоненты характеристического вектора

$$\delta(\tau,\rho)=(\delta^{\tau,\rho}_{i,j},(i,j)\in U),$$

порожденного дугой $(\tau,\rho)\in U\setminus U_T$, являются решением разреженной системы линейных алгебраических уравнений вида (1) – (2).

$$\sum_{j\in I_i^+(U)}\delta^{\tau,\rho}_{i,j}-\sum_{j\in I_i^-(U)}\delta^{\tau,\rho}_{j,i}=0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\delta^{\tau,\rho}_{\tau,\rho}=1,\\ \delta^{\tau,\rho}_{i,j}=0,(i,j)\in U\setminus(U_T\bigcup(\tau,\rho)),\end{gathered} \tag{2}$$

где $I_i^+(U)=\{j:(i,j)\in U,\ I_i^-(U)=\{j:(j,i)\in U\ \}$. Множество характеристических векторов, порожденных дугами множества $U\setminus U_T$, составляют фундаментальную систему решений однородной системы (1) [1, 3]. Недоопределенные системы с матрицей инцидентности графа имеют важные приложения в линейных и нелинейных экстремальных задачах потокового программирования с линейными ограничениями. Для увеличения эффективности алгоритмов их решения необходимо использовать тип разреженности системы, свойства покрывающих деревьев, а также технологии хранения и преобразования корневых деревьев. В случае, если наряду с уравнениями системы с матрицей инцидентности графа имеются уравнения общего вида, необходимо применить принципы декомпозиции системы [4, 5] для выделения разреженной части системы и использования для нее эффективных алгоритмов вычисления ненулевых компонент характеристического вектора за линейное время.

Обозначим через $L^+_{\tau\rho}$ и $L^-_{\tau\rho}$ – множества прямых и обратных дуг цикла $L_{\tau\rho}$ с направлением, выбранным в соответствии с дугой (τ,ρ) (она является прямой), порожденного дугой $(\tau,\rho)\in U\setminus U_T$, где U_T – некоторое покрывающее дерево графа S. Построим характеристический вектор $\delta(\tau,\rho)=(\delta^{\tau,\rho}_{i,j},(i,j)\in U)$, порожденный дугой (τ,ρ) относительно покрывающего дерева U_T, по следующим правилам:

- $\delta^{\tau,\rho}_{\tau,\rho}=1$;
- для прямых дуг цикла $\delta^{\tau,\rho}_{i,j}=1,\ (i,j)\in L^+_{\tau\rho}$;
- для обратных дуг цикла $\delta^{\tau,\rho}_{i,j}=-1,\ (i,j)\in L^-_{\tau\rho}$;
- $\delta^{\tau,\rho}_{i,j}=0,(i,j)\in U\setminus L_{\tau\rho}$.

Приведем структуры данных для вычисления отличных от нуля компонент каждого характеристического вектора $\delta(\tau,\rho)=(\delta^{\tau,\rho}_{i,j},(i,j)\in U)$ за число операций $O(n)$ в наихудшем случае, где $n=|I|$.

Для построения решения системы (1) – (2) с указанной оценкой числа операций для вычисления ненулевых компонент характеристического вектора необходимо ввести следующую информацию:

- $t=\{t[i],i\in I\}$ – список династического обхода корневого дерева (индексы связи), которое соответствует покрывающему дереву графа S [5]. Инвертированный список $t=\{t[i],i\in I\}$ определяет порядок решения уравнений системы линейных алгебраических уравнений (1) при условиях (2);
- список $p=\{p[i],i\in I\}$ определяет для каждого узла i значение предка узла i в корневом дереве, значение $p[i]=0$ определяет корень узла;
- список $d=\{d[i],i\in I\}$ определяет для каждого узла i корневого дерева направление дуги в покрывающем дереве; если узел i является корнем, то $d[i]=0$. Заметим, что если для каждого узла i элементы списка $p=\{p[i],i\in I\}$ корневого дерева содержат информацию о родительской дуге (i,j), которая соединяет узел i с узлом j – отцом узла i, то нет необходимости в хранении списка $d=\{d[i],i\in I\}$.

На рис. 1 представлено покрывающее дерево U_T графа $S=(I,U)$, где

$$U_T=\{(2,1),(2,6),(3,4),(4,6),(5,4)\},$$

$$I=\{1,2,3,4,5,6\},\ U=\{(1,3),(2,1),(2,6),(3,4),(3,6),(4,6),(5,4),(6,5)\}.$$

На рис. 2 приведена реализация в *Wolfram Mathematica* алгоритма вычисления характеристического вектора, порожденного дугой $(\tau,\rho)=(3,6)$, относительно покрывающего дерева U_T, которое представлено на рис. 1.

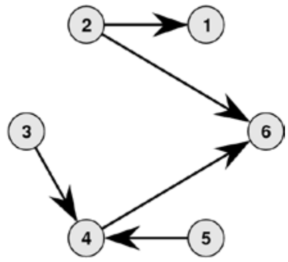

Рис. 1. Покрывающее дерево графа S

В приведенной на рис. 2 реализации использованы списки $t = \{t[i], i \in I\}$, $p = \{p[i], i \in I\}$ и $d = \{d[i], i \in I\}$ для хранения корневого дерева с корнем в узле 1, которое соответствует покрывающему дереву, представленному на рис. 1.

```
system1 = {
    x_{1,3} - x_{2,1} == 0,
    x_{2,1} + x_{2,6} == 0,
    x_{3,4} + x_{3,6} - x_{1,3} == 0,
    x_{4,6} - x_{3,4} - x_{5,4} == 0,
    x_{5,4} - x_{6,5} == 0,
    x_{6,5} - x_{2,6} - x_{3,6} - x_{4,6} == 0};
(*инвертированный список индексов связи узлов дерева*)
t = {5, 3, 4, 6, 2, 1};
(*список предков узлов в корневом дереве*)
p = {0, 1, 4, 6, 4, 2};
(*список направлений дуг в исходном дереве*)
d = {0, -1, -1, -1, -1, 1};
system1a = system1;
system1a[[3]] = system1a[[3]] /. {x_{3,6} → 1};
system1a[[6]] = system1a[[6]] /. {x_{3,6} → 1};
system1a[[6]] = system1a[[6]] /. {x_{6,5} → 0};
system1a[[5]] = system1a[[5]] /. {x_{6,5} → 0};
system1a[[1]] = system1a[[1]] /. {x_{1,3} → 0};
system1a[[3]] = system1a[[3]] /. {x_{1,3} → 0};
δ1_{3,6} = {x_{3,6} → 1, x_{6,5} → 0, x_{1,3} → 0};
For[i = 1, i ≤ 5, ++i,
  {
   If[d[[ t[[i]] ]] == 1,
    δ = Solve[ system1a[[ t[[i]] ]], x_{p[[ t[[i]] ]],t[[i]]}][[1]],
    δ = Solve[ system1a[[ t[[i]] ]], x_{t[[i]],p[[ t[[i]] ]]}][[1]]];
   If[p[[ p[[ t[[i]] ]] ]] ≠ 0,
    system1a[[ p[[ t[[i]] ]] ]] = system1a[[ p[[ t[[i]] ]] ]] /. δ];
   δ1_{3,6} = Join[δ1_{3,6}, δ];
  }];
Print[Simplify[system1 /. δ1_{3,6}]];


{True, True, True, True, True, True}
```

Рис. 2. Реализация в *Wolfram Mathematica* алгоритма вычисления характеристического вектора, порожденного дугой $(\tau, \rho) = (3,6)$, с использованием инвертированного списка $t = \{t[i], i \in I\}$ и списков $p = \{p[i], i \in I\}$, $d = \{d[i], i \in I\}$

```
depth = {0, 1, 4, 3, 4, 2};
p = {0, 1, 4, 6, 4, 2};
d = {0, -1, -1, -1, -1, 1};
τ = 3;
ρ = 6;
δ3,6 = {x3,6 → 1, x6,5 → 0, x1,3 → 0, x5,4 → 0, x2,6 → 0, x2,1 → 0};
i = τ; j = ρ;
    While[i ≠ j ,
      If[depth[[i]] > depth[[j]],
        {
         If[d[[i]] == 1,
          δ3,6 = Join[δ3,6, {xp[[i]],i → 1}],
          δ3,6 = Join[δ3,6, {xi,p[[i]] → -1}]
          ];
         i = p[[i]];
         },
        If[depth[[j]] > depth[[i]],
         {
          If[d[[j]] == 1,
           δ3,6 = Join[δ3,6, {xp[[j]],j → -1}],
           δ3,6 = Join[δ3,6, {xj,p[[j]] → 1}]
           ];
          j = p[[j]];
          },
         {

        If[d[[i]] == 1,
         δ3,6 = Join[δ3,6, {xp[[i]],i → 1}],
         δ3,6 = Join[δ3,6, {xi,p[[i]] → -1}]
         ];
        If[d[[j]] == 1,
         δ3,6 = Join[δ3,6, {xp[[j]],j → -1}],
         δ3,6 = Join[δ3,6, {xj,p[[j]] → 1}]
         ];
        i = p[[i]];
        j = p[[j]];
        }
       ]
      ];
    ];
Print[δ3,6];
{x3,6 → 1, x6,5 → 0, x1,3 → 0, x5,4 → 0, x2,6 → 0, x2,1 → 0, x3,4 → -1, x4,6 → -1}
```

Рис. 3. Реализация в *Wolfram Mathematica* алгоритма вычисления характеристического вектора, порожденного дугой (τ,ρ), относительно покрывающего дерева U_T графа S с использованием элементов списков $\{p = p[i], i \in I\}$, направления дуги $d = \{d[i], i \in I\}$ глубины узла $\{depth[i], i \in I\}$

В приведенной на рис. 2 реализации применена описанная выше технология представления корневого дерева с корнем в узле 1, соответствующего покрывающему дереву $U_T = \{(2,1),(2,6),(3,4),(4,6),(5,4)\}$ с использованием инвертированного списка $t = \{t[i], i \in I\}$ и списков $p=\{p[i],i\in I\}$, $d=\{d[i],i\in I\}$. Для решения уравнения системы используется функция *Solve*. Можно достичь, в определенном смысле, предела эффективности алгоритма вычисления характеристического вектора, если для каждого узла i корневого дерева хранить его глубину $depth[i]$ (вместо элемента индекса связи $t[i]$) и использовать ее наряду с технологией, реализованной в листинге на рис. 2. В этом случае уравнения системы рассматриваются только для узлов цикла, порожденного дугой (τ,ρ) относительно покрывающего дерева U_T, поскольку ненулевые компоненты характеристического вектора соответствуют дугам цикла. Кроме этого, функция *Solve* заменена непосредственным решением уравнения. Итак, на рис. 3 представлена реализация в *Wolfram Mathematica* алгоритма вычисления характеристического вектора, порожденного дугой (τ,ρ), относительно покрывающего дерева U_T графа S с использованием списков $depth=\{depth[i],i\in I\}$, $p=\{p[i],i\in I\}$ и $d=\{d[i],i\in I\}$. Элементы списков $\{p=p[i],i\in I\}$, $d=\{d[i],i\in I\}$ описаны выше. Для каждого узла i элемент $depth[i]$ списка $depth=\{depth[i],i\in I\}$ содержит длину (в дугах) от узла i до корня корневого дерева, которое соответствует покрывающему дереву U_T графа S.

Число операций алгоритма вычисления отличных от нуля компонент каждого характеристического вектора $\delta(\tau,\rho)$, порожденного дугой (τ,ρ), относительно покрывающего дерева U_T графа S, который представлен на рис. 3, равно $O(k)$ в наихудшем случае, где k – число узлов цикла $L_{\tau\rho}$, порожденного дугой (τ,ρ).

Технология решения разреженных систем, представленная в алгоритме, реализованном в *Wolfram Mathematica* (см. рис. 2), используется также для решения неоднородных линейных систем с матрицей инцидентности графа при построении частных решений [4, 5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Пилипчук Л. А.* Линейные неоднородные задачи потокового программирования. Минск, БГУ, 2009. 222 с.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы линейного программирования. Ч. 3. Специальные задачи. Минск : БГУ, 1980.
3. *Pilipchuk L. A., Vecharynski E. S., Pesheva Y. H.* Solution of large linear systems with embedded network structure for a non-homogeneous network flow programming problem // Mathematica Balkanica. 2008. New Series. Vol. 22. Fasc. 3−4. P. 235–254.
4. *Пилипчук Л. А*. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Минск : БГУ, 2012. 260 с.
5. *Pilipchuk L. A.* Sparse linear systems and their applications. Minsk: BGU, 2013. 235 p.