БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе БГУ
_______________ А.Л. Толстик
(подпись) (И.О.Фамилия)
29 июня 2015 г.
(дата утверждения)
Регистрационный № УД- 1074 /уч.

Аналитическая теория дифференциальных уравнений и специальные функции

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальностей:

1-31 80 03 **Математика**
(код специальности) (наименование специальности)

2015 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 80 03-2012 (24.08.2012) и учебного плана (регистрационный № G31-183/уч.; 09.06.2014) для специальности 1-31 80 03 Компьютерная математика и системный анализ.

СОСТАВИТЕЛИ:

В.И. Громак, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета
(протокол №10 от 23.04.2015);

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 26.05.2015).

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Целью дисциплины «Аналитическая теория дифференциальных уравнений и специальные функции» является подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований.

Преподавание дисциплины ***решает следующие задачи***:

- формирование у студентов целостного представления о понятиях и достижениях аналитической теории дифференциальных уравнений и специальных функций, их приложениях и на этой основе повышение уровня профессиональной компетенции студентов
- формирование у студентов практических навыков использования современных методов построения и анализа математических моделей на основе теории дифференциальных уравнений.

Изучение дисциплины «Аналитическая теория дифференциальных уравнений и специальные функции» тесно связано с такими дисциплинами как «Современные проблемы математики», «Дополнительные главы анализа», «Компьютерная математика».

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- теоремы существования и единственности в комплексной области
- основные понятия и методы аналитической теорий дифференциальных уравнений
- основные специальные функции и специальные полиномы

уметь:

– применять основные методы аналитической теорий дифференциальных уравнений: метод Коши и Фробениуса, т.е. построения решений дифференциальных уравнений в виде степенных и обобщенных степенных рядов;

– применять специальные функции Гаусса, Бесселя и др. и специальные полиномы Лежандра, Якоби и др. при решении линейных уравнений и анализе математических моделей.

владеть:

– основными методами аналитической теорий дифференциальных уравнений: методом Коши и Фробениуса, т.е. построения решений дифференциальных уравнений в виде степенных и обобщенных степенных рядов;

– навыками использования специальных функции и специальных полиномов при анализе математических моделей.

Данная дисциплина является дисциплиной по выбору магистранта и изучается в первом семестре. Общее количество часов и количество аудиторных часов, отводимое на изучение учебной дисциплины в соответствии с учебным планом учреждения высшего образования по специальности, составляет соответственно 112 и 36 часов. Аудиторные часы состоят из 18 часов лекций, 18 часов лабораторных занятий.

Формой текущей аттестации по учебной дисциплине является экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Аналитическая теория дифференциальных уравнений и специальные функции

Тема 1.1. Теоремы существования и единственности. Особые точки.

Введение. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Понятие мажоранты. Терема Коши и теорема единственности в комплексной области. Аналитическое продолжение решений алгебраических уравнений. Классификация особых точек однозначных и многозначных аналитических функций и решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Подвижные и неподвижные особые точки решений дифференциальных уравнений. Неподвижность особых точек решений линейных уравнений и систем. Свойство Пенлеве, Р-тип. Подвижные алгебраические, трансцендентные и существенные особые точки решений дифференциальных уравнений. Подвижные особые точки решений уравнений первого порядка, разрешенных и не разрешённых относительно производной. Теоремы Фукса и Пенлеве.

Тема 1.2. Метод малого параметра

Терема Пуанкаре и метод малого параметра Пенлеве. Приложение метода метод малого параметра Пенлеве для уравнений первого порядка. Метод резонансов. Индексы Фукса.

Тема 1.3. Уравнения первого и второго порядков со свойством Пенлеве.

Уравнения первого порядка без подвижных критических особых точек. Результаты классификации. Интегрирование уравнений первого порядка Р-типа. Однозначное обращение функций Шварца-Кристофеля. Приложение метода метод малого параметра Пенлеве к определению необходимых условий свойства Пенлеве для уравнений второго порядка. Канонические уравнения второго порядка Р-типа. Уравнения Пенлеве. Достаточность условий свойства Пенлеве для уравнений Пенлеве.

Тема 1.4. Линейные дифференциальные уравнения в комплексной области.

Линейные дифференциальные уравнения в комплексной области. Теорема Коши. Введение в теорию Фробениуса. Регулярные и иррегулярные особые точки. Уравнения класса Фукса. Условия Фукса для уравнений класса Фукса. Редукция уравнений класса Фукса к канонической форме. Уравнения класса Фукса с фиксированным числом регулярных особых точек. Классификация уравнений класса Фукса. Слияние регулярных особых точек.

Уравнение Римана. Схема Римана. Инвариантность формы уравнения Римана относительно линейных преобразований. Уравнение Гаусса.

Группа монодромии. Проблема Римана. Проблема изомонодромной деформации. Понятие о проблемах Пуанкаре, Римана-Гильберта.

Тема 1.5. Гипергеометричекое уравнение.

Гипергеометрический ряд. Решение уравнения Гаусса в окрестности особых точек $z=0, z=1, z=\infty$. Гипергеометрические интегралы. Определение группы монодромии уравнения Гаусса. Специальные функции Бесселя, Гаусса. Уравнение Лежандра. Периоды эллиптической функции как решения уравнения Лежандра. Полиномы Лежандра.

Тема 1.6. Линейные дифференциальные системы n-го порядка в комплексной области.

Регулярные и иррегулярные особые точки. Фуксовые особые точки линейных систем. Системы Фукса. Построение решений в окрестности регулярных и иррегулярных особых точек. Группа монодромии линейных систем. Проблема Римана-Гильберта. Контрпример Болибруха. Деформация линейных систем, измонодромная деформация. Уравнение Шредингера.

Тема 1.7. Элементы теории уравнений Пенлеве.

Необходимые условия наличия Пенлеве свойства. Уравнения Пенлеве. Подвижные и неподвижные особые точки решений уравнений Пенлеве. Мероморфность и трансцендентность решений уравнений Пенлеве. Преобразования Беклунда уравнений Пенлеве. Асимптотические свойства решений уравнений Пенлеве. Уравнения Пенлеве высших порядков. Различные подходы построения: прямой метод Пенлеве, нелинейные цепочки, симметрийный подход. Оператор Шредингера.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Аналитическая теория дифференциальных уравнений и специальные функции	**18**			**18**			
1.1	Теоремы существования и единственности. Особые точки.	4			-			Собеседование
1.2	Метод малого параметра.	2			2			Отчеты по лабораторным работам с их устной защитой
1.3	Уравнения первого и второго порядков со свойством Пенлеве.	2			2			Отчеты по лабораторным работам с их устной защитой
1.4	Линейные дифференциальные уравнения в комплексной области.	4			4			Отчеты по лабораторным работам с их устной защитой
1.5	Гипергеометричекое уравнение.	2			4			Отчеты по лабораторным работам с их устной защитой
1.6	Линейные дифференциальные системы n-го порядка в комплексной области.	2			4			Отчеты по лабораторным работам с их устной защитой
1.7	Элементы теории уравнений Пенлеве.	2			2			Отчеты по лабораторным работам с их устной защитой

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Литература

Основная литература.

1. Айнс Э. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Харьков: ГНТИ Украины, 1939.
2. Голубев В.В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, Москва: Главполиграфиздат, 1950, 436 с.
3. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane*, De Gruyter Studies in Mathematics 28, Berlin --- New-York, 2002.
4. Кудряшов Н.А. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*, Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004, 360 с.
5. Смирнов В.И. *Курс высшей математики*, т. III, часть 2, М., 1974, 672 с.
6. Iwasaki K., Kimura H., Shimomura Sh., Yoshida M. *From Gauss to Painlevé. A modern theory of special functions: Aspects of Mathematics,* E16. Braunschweig, 1991.
7. Noumi M. *Painleve equations through Symmetry,* AMS, 2000, 158 p.

Дополнительная литература.

8. Бибиков Ю.Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений*. Москва: «Высшая школа», 1991.
9. Громак В. И., Лукашевич Н. А. *Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве*. Минск, 1990.
10. А.П. Итс, А.А. Копаев, В.Ю. Новокшенов,А.С. Фокас *Трансценденты Пенлеве,* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2005, 727 с.

1. Еругин Н.П. *Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений*. Минск: «Наук»,1972.
2. M. Jimbo , T. Miwa and K. Ueno *, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients*, I, Physica D 2 (1981), 306-352.
3. J. Weiss *The Painlevé property for partial differential equations. II. Bäcklund transformations, Lax pairs, and the Schwarzian derivative*, J. Math. Phys. 24 (1983), 1405-1413.
4. Ablowitz M., Clarkson P.A. , *Solitons, Nonlinear Evolutions Equations and Inverse Scattering.* L.M.S. Lect. Notes Math, 149, C.U.P., Cambridge, 1991.
5. Rogers C., Shadwick R. *Bäcklund Transformations and their Applications*, Academic Press, New York, 1982.
6. K. Okamoto *The Painlevé Property*, CRM Ser. Math. Phys., Springer-Verlag, New York, 1999, P. 735--788.
7. M. Noumi and Y. Yamada, *Affine Weyl group approach to Painlevé equations*, Comm. Math. Phys. 199 (1998), 291-295.
8. Golubev, V.V., *Lectures on the integration of the equation of motion of a rigid body about a fixed point,* Gostechizdat (State publishing house), Moskow, 1953. (Russian)
9. N.A. Kudryashov, *One generalization of the second Painlevé hierarchy,* J. Phys. A: Math. Gen. (2002), No 35, 93-99.
10. H. Zoladek *The monodromy group,* Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2000. 582 p.

Перечень используемых средств диагностики результатов учебной деятельности

Контроль работы магистранта проходит в форме собеседования, контрольной работы в аудитории или над выполнением лабораторных работ в лаборатории и самостоятельно вне аудитории с предоставлением отчета по лабораторным работам с его устной защитой. Задания к контрольным и лабораторным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Для совершенствования педагогического мастерства и способностей учиться самостоятельно магистрантам могут выдаваться темы докладов, с которыми они выступают на занятиях.

Во время самостоятельной работы магистрант выполняет задания, полученные на лабораторных занятиях, а также изучает рекомендуемую литературу.

Экзамен по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы УВО по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)[1]
Современные проблемы математики	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 10 от 23.04.2015)
Дополнительные главы анализа	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 10 от 23.04.2015)

[1] При наличии предложений об изменениях в содержании учебной программы УВО.

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_______________________________ (протокол № ____ от ________ 201_ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой
_______________________ _________________ ____________________
(ученая степень, ученое звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______________________ _________________ ____________________
(ученая степень, ученое звание) (подпись) (И.О.Фамилия)