О СХОДИМОСТИ ARCH МОДЕЛЕЙ К МОДЕЛЯМ НЕПРЕРЫВНОГО ВРЕМЕНИ

Е. И. Куликова

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
Elena_kul@tut.by

В работе рассматривается вопрос об аппроксимации дискретных ARCH моделей непрерывными диффузионными моделями. Выводятся пределы непрерывного времени (в смысле слабой сходимости) для моделей GARCH, TARCH, GJR-GARCH, APARCH, HGARCH, EGARCH.

Ключевые слова: ARCH модель, диффузионная модель, волатильность.

Модели ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) являются широко используемым инструментом для оценивания условных дисперсий и ковариаций. Однако так как ARCH модели – это системы нелинейных стохастических уравнений, то это приводит к сложностям при вычислении их вероятностных и статистических характеристик, таких как стационарность, конечность моментов, асимптотическая нормальность MLE. Один из способов упростить анализ ARCH моделей – это аппроксимировать стохастические разностные уравнения более удобными стохастическими дифференциальными уравнениями. С другой стороны, для некоторых целей, в частности, для построения точечных прогнозов и оценок по методу максимального правдоподобия, ARCH модели более удобные, чем стохастические дифференциальные уравнения с непостоянной волатильностью, которые широко используются в финансовой литературе.

В данной работе рассматривается вопрос об аппроксимации ARCH моделей с помощью непрерывных моделей диффузионного типа. Различные ARCH модели в предельном переходе дают различные диффузионные модели. Для исследования пределов непрерывного времени используется следующая теорема.

Пусть процесс $\{X_t\}$ подчиняется стохастическому интегральному уравнению

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \Omega^{1/2}(X_s)dW_s, \qquad (1)$$

где $\{W_t\}$ – $N\times 1$ стандартный Винеровский процесс, $\mu(\cdot)$ и $\Omega^{1/2}(\cdot)$ – непрерывные функции из R^N в R^N и матрица размерности $N\times N$ соответственно. Начальное значение, X_0, может быть фиксированным или случайным.

Теорема 1. (Stroock & Varadhan, [7]).

Пусть стохастическое интегральное уравнение (1) имеет единственное в слабом смысле решение. Тогда процесс дискретного времени с временным шагом h, $\{{}_hX_t\}$, слабо сходится к процессу $\{X_t\}$ при h стремящемся к нулю, если:

а) $F_h(\cdot) \xrightarrow[h\to 0]{} F(\cdot)$ во всех точках непрерывности $F(\cdot)$, где $F(x_0)$ – функция распределения начального значения процесса X_0, $F_h({}_hx_0)$ – функция распределения для начального значения процесса ${}_hX_0$;

б) $\mu_h(x) = h^{-1}E[({}_hX_{k+1} - {}_hX_k)|_h X_k = x] \xrightarrow[h\to 0]{} \mu(x)$ равномерно на любом ограниченном множестве x;

в) $\Omega_h(x) = h^{-1}Cov[({}_hX_{k+1} - {}_hX_k)|_h X_k = x] \xrightarrow[h\to 0]{} \Omega(x)$ равномерно на любом ограниченном множестве x;

г) для некоторого $\delta_0>0$ $h^{-1}E[\|_h X_{k+1} - {}_hX_k\|^{2+\delta_0}|_h X_k = x] \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ равномерно на любом ограниченном множестве x.

Модель ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity, [3]). Говорят, что процесс $\{y_t\}$ управляется ARCH моделью, если он удовлетворяет следующим условиям:

$$E_t[y_{t+1} - y_t] = 0$$

$$Var_t[y_{t+1}] = \sigma_t^2,$$

где σ_t^2 нетривиально зависит от предыдущих наблюдений.

Далее исследуется вопрос о сходимости различных ARCH моделей к моделям непрерывного времени.

Модель APARCH (1,1) (Asymmetric Power ARCH, [2]) с временным шагом h:

$$\begin{cases} y_{t+h} = y_t + \sqrt{h}\sigma_{t+h}z_{t+h} \\ \sigma_{t+h}^{\delta} = w_h + \alpha_h(|\sigma_t z_t| - \gamma\sigma_t z_t)^{\delta} + \beta_h\sigma_t^{\delta}, \end{cases} \qquad (2)$$

где $\{z_t\}$ – н.о.р.с.в. ~ $N(0,1)$, w_h, α_h, β_h, γ, δ – параметры модели.

Теорема 2. Пусть y_0, σ_0 фиксированы и пусть

$$\theta_h = 1 - \beta_h - \alpha_h I(\delta)$$

$$\varphi_h = \alpha_h\sqrt{I(2\delta) - I^2(\delta)},$$

где

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2^{\frac{x-1}{2}}((1+\gamma)^x + (1-\gamma)^x)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Тогда, если существуют конечные пределы:

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}w_h = w, \quad \lim_{h\to 0} h^{-1}\theta_h = \theta, \quad \lim_{h\to 0} h^{-1/2}\varphi_h = \varphi,$$

то процесс (2) слабо сходится при $h \to 0$ к диффузионному процессу

$$\begin{cases} dy_t = \sigma_t dW_1(t) \\ d\sigma_t^{\delta} = (w - \theta\sigma_t^{\delta})dt + \varphi\sigma_t^{\delta}dW_2(t). \end{cases} \qquad (3)$$

Доказательство основано на проверке выполнения условий теоремы 1:

а) так как начальные значения процесса фиксированы, ${}_hY_0 = [y_0, \sigma_0]^T = Y_0$, то $F(y_0) = F_h({}_hy_0)$;

б) для любого значения h и любого момента времени t выполняется

$$E_t[\sigma_{t+h}^{\delta} - \sigma_t^{\delta}] = w_h + (\beta_h - 1)\sigma_t^{\delta} + \alpha_h\sigma_t^{\delta}E_t[(|z_t| - \gamma z_t)^{\delta}].$$

Так как

$$E_t\left[(|z_t| - \gamma z_t)^{\delta}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\delta}\left(\frac{|x|}{x} - \gamma\right)^{\delta} e^{-x^2/2}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-1-\gamma)^{\delta}\int_{-\infty}^{0} x^{\delta}e^{-x^2/2}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-\gamma)^{\delta}\int_{0}^{+\infty} x^{\delta}e^{-x^2/2}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[(1+\gamma)^{\delta} + (1-\gamma)^{\delta}\right]\cdot 2^{(\delta-1)/2}\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) = I(\delta),$$

то

$$E_t\,[\sigma_{t+h}^{\delta} - \sigma_t^{\delta}] = w_h - \theta_h\sigma_t^{\delta}.$$

Следовательно, устремляя h к нулю, получим

$$\mu_h(Y) = h^{-1}E_t\begin{bmatrix} y_{t+h} - y_t \\ \sigma_{t+h}^2 - \sigma_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h^{-1}w_h - h^{-1}\theta_h\sigma_t^{\delta} \end{bmatrix} \xrightarrow[h\to 0]{} \begin{bmatrix} 0 \\ w - \theta\sigma_t^{\delta} \end{bmatrix};$$

в) для любого значения h и любого момента времени t выполняется

$$Var_t[\sigma_{t+h}^{\delta} - \sigma_t^{\delta}] = \alpha_h^2\sigma_t^{2\delta}Var_t\left[(|z_t| - \gamma_h z_t)^{\delta}\right].$$

Так как

$$Var_t\left[(|z_t| - \gamma_h z_t)^{\delta}\right] = E_t\left[(|z_t| - \gamma_h z_t)^{2\delta}\right] - E_t^2\left[(|z_t| - \gamma_h z_t)^{\delta}\right] = I(2\delta) - I^2(\delta),$$

то, устремляя h к нулю, получим

$$\Omega_h(Y) = h^{-1}Var_t\begin{bmatrix} y_{t+h} - y_t \\ \sigma_{t+h}^2 - \sigma_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_t^2 & 0 \\ 0 & h^{-1}\varphi_h^2\sigma_t^{2\delta} \end{bmatrix} \xrightarrow[h\to 0]{} \begin{bmatrix} \sigma_t^2 & 0 \\ 0 & \varphi^2\sigma_t^{2\delta} \end{bmatrix};$$

г) при $\delta_0=2$ имеем

$$\|Y_{t+h} - Y_t\|^{2+\delta} = \|Y_{t+h} - Y_t\|^4 = (h\sigma_{t+h}^2 z_{t+h}^2 + (\omega_h + \alpha_h(|\sigma_t z_t| - \gamma\sigma_t z_t)^{\delta} + (\beta_h - 1)\sigma_t^{\delta})^2)^2.$$

Из условий на параметры модели следует, что

$$w_h = o(\sqrt{h}), \quad \alpha_h = a\sqrt{h} + o(\sqrt{h}), \quad \beta_h - 1 = b\sqrt{h} + o(\sqrt{h}).$$

Так как $\{z_t\}$ – н. о. р. с. в. ~ $N(0,1)$, и, следовательно, $\{z_t\}$ имеют конечные моменты, то

$$h^{-1}E_t\left[\|Y_{t+h} - Y_t\|^4\right] = \frac{h^2A(\sigma_t) + o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Следовательно, процесс (2) слабо сходится к процессу (3).

Следствие 1. Процесс GARCH (1,1) (General ARCH, [1]) с временным шагом h

$$\begin{cases} y_{t+h} = y_t + \sqrt{h}\sigma_{t+h}z_{t+h} \\ \sigma_{t+h}^2 = w_h + \alpha_h\sigma_t^2 z_t^2 + \beta_h\sigma_t^2 \end{cases}$$

слабо сходится при $h\to 0$ к диффузионному процессу

$$\begin{cases} dy_t = \sigma_t dW_1(t) \\ d\sigma_t^2 = (w - \theta\sigma_t^2)dt + \varphi\sigma_t^2 dW_2(t), \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}w_h = w,\ \lim_{h\to 0} h^{-1}(1 - \alpha_h - \beta_h) = \theta,\ \lim_{h\to 0} h^{-1/2}\sqrt{2}\alpha_h = \varphi,$$

а начальные значения процесса y_0, σ_0 фиксированы.

Следствие 2. Процесс GARCH(1,1) с дисперсией вида

$$\sigma_{t+h}^2 = wh + (1 - \theta h - \varphi\sqrt{h/2})\sigma_t^2 + \varphi\sqrt{h/2}\sigma_t^2 z_t^2,$$

где ω, θ, φ – некоторые константы, слабо сходится при $h \to 0$ к процессу (4).

Следствие 3. Процесс GJR-GARCH (1,1) (Glosten, Gagannathan & Runkle GARCH, [4]) с временным шагом h

$$\begin{cases} y_{t+h} = y_t + \sqrt{h}\sigma_{t+h} z_{t+h} \\ \sigma_{t+h}^2 = w_h + \alpha_h \sigma_t^2 \left((1+c^2)z_t^2 - 2c\,|\,z_t\,|\,z_t\right) + \beta_h \sigma_t^2 \end{cases}$$

слабо сходится при $h \to 0$ к диффузионному процессу

$$\begin{cases} dy_t = \sigma_t dW_1(t) \\ d\sigma_t^2 = (w - \theta\sigma_t^2)dt + \varphi\sigma_t^2 dW_2(t), \end{cases} \tag{5}$$

где

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} w_h = w,\ \lim_{h\to 0} h^{-1}(1 - \beta_h - \alpha_h(1+c^2)) = \theta,\ \lim_{h\to 0} h^{-1/2}\alpha_h \sqrt{2 + 16c^2 + 2c^4} = \varphi,$$

а начальные значения процесса y_0, σ_0 фиксированы.

Следствие 4. Процесс GJR-GARCH(1,1) с дисперсией вида

$$\sigma_{t+h}^2 = wh - \varphi\sqrt{\frac{h}{2+16c^2+c^4}}(1+c^2) + \varphi\sqrt{\frac{h}{2+16c^2+c^4}}\sigma_t^2[(1+c^2)z_t^2 - 2c\,|\,z_t\,|\,z_t] + (1-\theta h)\sigma_t^2$$

где ω, θ, φ – некоторые константы, слабо сходится при $h \to 0$ к процессу (5).

Следствие 5. Процесс TARCH (1, 1) (Taylor's ARCH, [8]) с временным шагом h

$$\begin{cases} y_{t+h} = y_t + \sqrt{h}\sigma_{t+h} z_{t+h} \\ \sigma_{t+h} = w_h + \alpha_h(|\sigma_t z_t| - \gamma_h \sigma_t z_t) \ + \beta_h \sigma_t \end{cases}$$

слабо сходится при $h \to 0$ к процессу

$$\begin{cases} dy_t = \sigma_t dW_1(t) \\ d\sigma_t = (w - \theta\sigma_t)dt + \varphi\sigma_t dW_2(t), \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} w_h = w,\ \lim_{h\to 0} h^{-1}(1 - \beta_h - \alpha_h\sqrt{2/\pi}) = \theta,\ \lim_{h\to 0} h^{-1/2}\alpha_h(\gamma^2 + 1 - 2/\pi) = \varphi,$$

а начальные значения процесса y_0, σ_0 фиксированы.

Следствие 6. Процесс TARCH (1,1) с дисперсией вида

$$\sigma_{t+h} = wh + \frac{\varphi\sqrt{h}}{\gamma^2 + 1 - 2/\pi}(|\sigma_t z_t| - \gamma\ \sigma_t z_t) \ + (1 - \theta h - \frac{\varphi\sqrt{2h/\pi}}{\gamma^2 + 1 - 2/\pi})\sigma_t,$$

где ω, θ, φ – некоторые константы, слабо сходится при $h \to 0$ к процессу (6).

Модель HGARCH(1,1) (Heston's GARCH, [5]) с временным шагом h:

$$\begin{cases} y_{t+h} = y_t + \sqrt{h}\sigma_{t+h} z_{t+h} \\ \sigma_{t+h}^2 = w_h + \alpha_h(z_t - \gamma_h\sigma_t)^2 + \beta_h\sigma_t^2. \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть y_0, σ_0 фиксированы. Тогда, если существуют конечные пределы*

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}(w_h + \alpha_h) = w,\ \lim_{h\to 0} h^{-1}(1 - \beta_h - \gamma_h^2\alpha_h) = \theta,\ \lim_{h\to 0} 2h^{-1}\alpha_h^2 = \varphi,\ \lim_{h\to 0} 4h^{-1}\alpha_h^2\gamma_h^2 = \psi,$$

то процесс (7) слабо сходится при h → 0 к процессу

$$\begin{cases} dy_t = \sigma_t dW_1(t) \\ d\sigma_t^2 = (w - \theta\sigma_t^2)dt + \sqrt{\varphi + \psi\sigma_t^2}\,dW_2(t). \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство основано на проверке выполнения условий теоремы 1:

а) так как начальные значения процесса фиксированы, ${}_hY_0=[y_0,\sigma_0]^T=Y_0$, то $F(y_0)=F_h({}_hy_0)$;

б) для любого значения h и любого момента времени t выполняется

$$E_t[\sigma_{t+h}^2-\sigma_t^2]=w_h+(\beta_h-1)\sigma_t^2+\alpha_hE_t[z_t^2-2\gamma_hz_t\sigma_t+\gamma_h^2\sigma_t^2]=(w_h+\alpha_h)-(1-\beta_h-\gamma^2\alpha_h^2)\sigma_t^2.$$

Следовательно, устремляя h к нулю, получим

$$\mu_h(Y)=h^{-1}E_t\begin{bmatrix}y_{t+h}-y_t\\ \sigma_{t+h}^2-\sigma_t^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ h^{-1}(w_h+\alpha_h)+h^{-1}(\beta_h+\gamma_h^2\alpha_h-1)\sigma_t^2\end{bmatrix}\xrightarrow[h\to0]{}\begin{bmatrix}0\\ w-\theta\sigma_t^2\end{bmatrix};$$

в) для любого значения h и любого момента времени t выполняется

$$Var_t[\sigma_{t+h}^2-\sigma_t^2]=Var_t[\alpha_h(z_t^2-2z_t\gamma_h\sigma_t+\gamma_h^2\sigma_t^2)]=2\alpha_h^2+4\alpha_h^2\gamma_h^2\sigma_t^2.$$

Следовательно, устремляя h к нулю, имеем

$$\Omega_h(Y)=h^{-1}Var_t\begin{bmatrix}y_{t+h}-y_t\\ \sigma_{t+h}^2-\sigma_t^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_t^2 & 0\\ 0 & 2h^{-1}\alpha_h^2+4h^{-1}\alpha_h^2\gamma_h^2\sigma_t^2\end{bmatrix}\xrightarrow[h\to0]{}\begin{bmatrix}\sigma_t^2 & 0\\ 0 & \varphi+\psi\sigma_t^2\end{bmatrix};$$

г) аналогично пункту (г) в теореме 2.

Следовательно, процесс (7) слабо сходится к процессу (8).

Следствие 7. Модель HGARCH(1,1) с дисперсией вида

$$\sigma_{t+h}^2=\omega h-\frac{\varphi h^{1/2}}{\sqrt{2}}+\frac{\varphi h^{1/2}}{\sqrt{2}}(z_t-\gamma\ \sigma_t)^2+(1-\theta h-\frac{\psi^2}{4\varphi}\frac{h^{1/2}}{\sqrt{2}})\sigma_t^2,$$

где ω, θ, φ, ψ – некоторые константы, слабо сходится при $h\to0$ к процессу (8).

Модель EGARCH (Exponential GARCH, [6]) с временным шагом h:

$$\begin{cases}y_{t+h}=y_t+\sqrt{h}\sigma_{t+h}z_{t+h}\\ \ln\sigma_{t+h}^2=\omega_h+\alpha_h[\theta_hz_t+\gamma_h(|z_t|-\sqrt{2/\pi})]+\beta_h\ln\sigma_t^2.\end{cases}\tag{9}$$

Теорема 4. Пусть y_0, σ_0 фиксированы. Тогда, если существуют конечные пределы

$$\lim_{h\to0}h^{-1}w_h=w,\ \lim_{h\to0}h^{-1}(1-\beta_h)=\varphi,\ \lim_{h\to0}h^{-1/2}\alpha_h\sqrt{\theta_h^2+\gamma_h^2(1-2/\pi)}=\psi,$$

то процесс (12) слабо сходится при $h\to0$ к процессу

$$\begin{cases}dy_t=\sigma_tdW_1(t)\\ d\ln\sigma_t^2=(w-\varphi\ln\sigma_t^2)dt+\psi dW_2(t).\end{cases}\tag{10}$$

Доказательство основано на проверке выполнения условий теоремы 1:

а) так как начальные значения процесса фиксированы, ${}_hY_0=[y_0,\sigma_0]^T=Y_0$, то $F(y_0)=F_h({}_hy_0)$;

б) для любого значения h и любого момента времени t выполняется

$$E_t[\ln\sigma_{t+h}^2-\ln\sigma_t^2]=w_h+\alpha_h\theta_h\cdot0+\alpha_h\gamma_h(\sqrt{2/\pi}-\sqrt{2/\pi})+(\beta_h-1)\ln\sigma_t^2=w_h+(\beta_h-1)\ln\sigma_t^2$$

Поэтому, устремляя h к нулю, имеем

$$\mu_h(Y)=h^{-1}E_t\begin{bmatrix}y_{t+h}-y_t\\ \ln\sigma_{t+h}^2-\ln\sigma_t^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ h^{-1}w_h+h^{-1}(\beta_h-1)\ln\sigma_t^2\end{bmatrix}\xrightarrow[h\to0]{}\begin{bmatrix}0\\ w-\varphi\ln\sigma_t^2\end{bmatrix};$$

в) для любого значения h и любого момента времени t выполняется

$$Var_t[\ln\sigma^2_{t+h} - \ln\sigma^2_t] = \alpha_h^2\theta_h^2 Var_t[z_t] + \alpha_h^2\gamma_h^2 Var_t[|z_t|] = \alpha_h^2\theta_h^2 + \alpha_h^2\gamma_h^2(1-2/\pi).$$

Поэтому, устремляя h к нулю, имеем

$$\Omega_h(Y) = h^{-1}Var_t\begin{bmatrix} y_{t+h} - y_t \\ \ln\sigma^2_{t+h} - \ln\sigma^2_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_t^2 & 0 \\ 0 & h^{-1}\alpha_h^2(\theta_h^2 + \gamma_h^2(1-2/\pi)) \end{bmatrix} \xrightarrow[h\to 0]{} \begin{bmatrix} \sigma_t^2 & 0 \\ 0 & \psi^2 \end{bmatrix};$$

г) аналогично пункту (г) в теореме 2.

Следовательно, процесс (9) слабо сходится к процессу (10).

Следствие 8. Процесс EGARCH(1,1) с дисперсией вида

$$\ln\sigma^2_{t+h} = \omega h + \psi\sqrt{\frac{h}{\theta^2 + \gamma^2(1-2/\pi)}}[\theta z_t + \gamma(|z_t| - \sqrt{2/\pi})] + (1-\varphi h)\ln\sigma_t^2,$$

где ω, θ, φ, ψ – некоторые константы, слабо сходится при $h \to 0$ к процессу (10).

Исследования частично поддержаны грантом БГУ для молодых ученых.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bollerslev T.* Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // Journ. of Econometric. 1986. Vol. 31. P. 307–327.
2. *Ding Z., Granger C. W. J., Engle R. F.* A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model // Journ. of Empirical Finance. 1993. Vol. 1. P. 83–106.
3. *Engle R. F.* Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 987–1008.
4. *Glosten L. R., Jagannathan R., Runkle D.* On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks // Journal of Finance. 1993. Vol. 48. P. 1779–1801.
5. *Heston S., Nandi S.* A Closed-Form GARCH Option Valuation Model. Working paper. Federal Reserve Bank of Atlanta. 1993.
6. *Nelson D.* Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach // Econometrica. 1991. Vol. 59. P. 349–370.
7. *Stroock D.W., Varadhan S. R. S.* // Multidimensional Diffusion Processes. Springer-Verlag, 1979.
8. *Taylor S.* Modeling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study // Mathematical Finance. 1994. Vol. 4. P. 183–204.