УДК 517.925/926+517.938

А.П. Садовский, Т.В. Щеглова

Система Льенара с комплексными коэффициентами и метод Черкаса

Ключевые слова: кубическая система, метод Черкаса, многообразие центра, проблема центра и фокуса, система Льенара, теорема Люрота, центр.

Резюме

В работе рассматривается система Льенара $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -g(x) - f(x)y$, где $g(0) = f(0) = 0$, $g'(0) = 1$, и системы, приводящиеся к системе Льенара, – обобщения системы Льенара вида: $\dot{x} = yP_0(x)$, $\dot{y} = -x + P_2(x)y^2 + P_3(x)y^3$, где $P_0(0) = 1$, и $\dot{x} = yP_0(x)$, $\dot{y} = -x + xQ(x)y + P_2(x)y^2$, где $P_0(0) = 1$.

Для системы Льенара и ее обобщений с вещественными коэффициентами Л.А. Черкасом был разработан ряд критериев (теорем, определяющих необходимые и достаточные условия), позволяющих устанавливать наличие центра для таких систем в $O(0,0)$. Совокупность этих критериев и составляет «метод Черкаса».

Цель данной работы – доказать справедливость метода Черкаса для системы Льенара и ее обобщений с комплексными коэффициентами. Наличие центра в $O(0,0)$ для систем с комплексными коэффициентами устанавливается посредством доказательства существования аналитического в окрестности $x = y = 0$ интеграла вида $x^2 + y^2 + \sum_{i+j=3}^{+\infty} c_{i,j} x^i y^j$, где $c_{i,j} \in \mathbb{C}$.

Основным результатом работы является доказательство теоремы, аналогичной теореме Л.А. Черкаса, для системы Льенара с комплексными коэффициентами. На основании последнего результата сформулированы критерии наличия центра в $O(0,0)$ для комплексных обобщений системы Льенара.

Работа завершается примером решения проблемы центра и фокуса для кубической системы с комплексными коэффициентами. Многообразие центра системы находится методом Черкаса при одновременном применении теоремы Люрота.

Полученные результаты могут быть использованы при качественном исследовании двумерных автономных систем, имеющих особую точку типа центра или фокуса.

Введение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y + P(x,y), \quad \dot{y} = -x + Q(x,y), \tag{1}$$

где $P(x,y) = \sum_{i+j=2}^{+\infty} a_{i,j} x^i y^j$, $Q(x,y) = \sum_{i+j=2}^{+\infty} b_{i,j} x^i y^j$ – аналитические функции в окрестности $x = y = 0$ и $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{C}$.

Начало координат является особой точкой системы (1), в которой характеристическое уравнение системы имеет чисто мнимые корни. Возникает проблема центра и фокуса.

Определение 1. Особая точка $O(0,0)$ системы (1) называется центром, если система (1) имеет аналитический в окрестности $x = y = 0$ интеграл

$$x^2 + y^2 + \sum_{i+j=3}^{+\infty} c_{i,j} x^i y^j, \tag{2}$$

где $c_{i,j} \in \mathbb{C}$.

Для системы (1) существует формальный ряд [1, с.11–14]

$$U(x,y) = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} f_k(x,y),$$

где $f_k(x,y)$ – однородные многочлены степени k с комплексными коэффициентами, для которого в силу системы (1)

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i \left(x^2 + y^2\right)^{i+1},$$

где $g_i, i = 1,2,...,$ – фокусные величины системы (1). Если все $g_i = 0, i = 1,2,...,$ то $O(0,0)$ системы (1) центр, т.к. в этом случае функция U является интегралом системы (1). В противном случае $O(0,0)$ фокус.

Проблема различения центра и фокуса для различных классов систем с комплексными коэффициентами вида (1) рассматривалась Г. Дюлаком [2], Г. Жолондеком [3, 4], А.П. Садовским и его учениками [5, 6, 7]. Однако стоит отметить, что в большинстве работ данная проблема рассматривается для систем вида (1) с действительными коэффициентами.

В 1972 году Л.А. Черкасом [8] был предложен критерий различения центра и фокуса в $O(0,0)$ для вещественной системы Льенара. Позднее на основании этого критерия Л.А. Черкасом [9, 10] были разработаны аналогичные критерии для обобщений системы Льенара – для вещественных систем вида (1), приводящихся к системе Льенара. Совокупность этих критериев и составляют «метод Черкаса».

В данной статье будет показано, что критерий Л.А. Черкаса справедлив также для комплексной системы Льенара и, как следствие, имеют место критерии для некоторых комплексных обобщений этой системы.

Основная часть. Сформулируем и докажем теоремы, необходимые для доказательства справедливости критерия Л.А. Черкаса для комплексной системы Льенара.

Теорема 1. *Начало координат системы*

$$\dot{x} = y + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} x^{2k}, \quad \dot{y} = -x, \tag{3}$$

где $\alpha_{2k} \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *является центром.*

Доказательство. Для системы (3) существует формальный ряд вида

$$U = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} f_k(x, y),$$

где $f_k(x, y)$ – однородные многочлены степени k с комплексными коэффициентами, для которого

$$\dot{U} = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i \left(x^2 + y^2\right)^{i+1}.$$

В силу системы (3) имеем

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial x}\left(y + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} x^{2k}\right) - \frac{\partial U}{\partial y} x.$$

Делаем замену $v = x^2$. Тогда $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial v} 2x.$ Получаем

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial v} 2x\left(y + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} v^k\right) - \frac{\partial U}{\partial y} x = x\left(\frac{\partial U}{\partial v} 2\left(y + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} v^k\right) - \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

При $x = 0$ последнее выражение обращается в 0. Пусть $x \neq 0$. Рассмотри уравнение в частных производных

$$\frac{\partial U}{\partial v} 2\left(y + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} v^k\right) - \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Т.к. оно разрешимо относительно $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ и функция $2\left(y + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} v^k\right)$ аналитична, то по теореме Ковалевской [11, с.25] указанное уравнение в частных производных имеет аналитическое решение вида

$$U(v, y) = \beta_1 v + \beta_2 y + \beta_3 v^2 + \beta_4 v y + \beta_5 y^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} h_k(v, y),$$

где $h_k(v, y)$ – однородные многочлены степени k.

Подставляя $U(v, y)$ в уравнение, методом неопределенных коэффициентов получаем, что $\beta_2 = 0,$ $\beta_1 = \beta_5.$ Учитывая $v = x^2,$ получаем, что система (3) имеет аналитический в окрестности $x = y = 0$ первый интеграл вида

$$x^2 + y^2 + \sum_{i+j=3}^{+\infty} c_{i,j} x^i y^j = c.$$

Таким образом, $O(0,0)$ является центром системы (3). Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы начало координат системы*

$$\dot{x} = y + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k x^k, \quad \dot{y} = -x, \tag{4}$$

где $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *было центром необходимо и достаточно, чтобы* $a_{2k+1} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $O(0,0)$ – центр системы (4). Тогда система (4) имеет интеграл вида

$$U = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{2m+1} f_k(x, y) + f_{2m+2}(x, y) + \sum_{k=2m+3}^{+\infty} f_k(x, y), \tag{5}$$

где $f_k(x, y)$ – однородные многочлены степени k.

Пусть в системе (4) $a_{2m+1} = a$ – первый ненулевой коэффициент с нечетным индексом. Тогда система (4) принимает вид

$$\dot{x} = y + \varphi\left(x^2\right) + a x^{2m+1} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}, \quad \dot{y} = -x, \tag{6}$$

где $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k} z^k$.

Т.к. (5) – интеграл системы (6), то $\dot{U} \equiv 0.$ Имеем

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} = \left(2x + \sum_{k=3}^{2m+1} \frac{\partial f_k(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_{2m+2}(x, y)}{\partial x} + \sum_{k=2m+3}^{+\infty} \frac{\partial f_k(x, y)}{\partial x}\right) \times$$

$$\times\left(y+\varphi\left(x^2\right)+ax^{2m+1}+\sum\nolimits_{k=m+1}^{+\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}\right)+$$

$$+\left(2y+\sum\nolimits_{k=3}^{2m+1}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial f_{2m+2}(x,y)}{\partial y}+\sum\nolimits_{k=2m+3}^{+\infty}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial y}\right)(-x)\equiv 0$$

Сгруппируем слагаемые, стоящие в левой части тождества, следующим образом

$$\frac{\partial f_{2m+2}(x,y)}{\partial x}y+2xax^{2m+1}-\frac{\partial f_{2m+2}(x,y)}{\partial y}x+$$

$$+\left[\left(2x+\sum\nolimits_{k=3}^{2m+1}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial x}\right)\left(y+\varphi\left(x^2\right)\right)+y\sum\nolimits_{k=2m+3}^{+\infty}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial x}+\varphi\left(x^2\right)\sum\nolimits_{k=2m+2}^{+\infty}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial x}+\right.$$

$$+\left(ax^{2m+1}+\sum\nolimits_{k=m+1}^{+\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}\right)\sum\nolimits_{k=3}^{+\infty}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial x}+2x\sum\nolimits_{k=m+1}^{+\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}-$$

$$\left.-x\left(2y+\sum\nolimits_{k=3}^{2m+1}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial y}\right)-x\sum\nolimits_{k=2m+3}^{+\infty}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial y}\right]\equiv 0$$

Отметим, что при построении однородного многочлена $f_k(x,y)$ используются многочлены $f_i(x,y),\ i=\overline{3,k-1},$ и коэффициенты системы $a_j,\ j<k.$

Так как система

$$\dot{x}=y+\sum\nolimits_{k=1}^{+\infty}a_{2k}x^{2k},\quad \dot{y}=-x \tag{7}$$

имеет центр в $O(0,0)$, то ее интеграл можно выбрать в виде

$$H=x^2+y^2+\sum\nolimits_{k=3}^{2m+1}f_k(x,y)+h_{2m+2}(x,y)+\sum\nolimits_{k=2m+3}^{+\infty}h_k(x,y),$$

где $h_k(x,y)$ – однородные многочлены степени *k*. Из соотношения $\dot{H}\equiv 0$ получаем

$$\left(2x+\sum\nolimits_{k=3}^{2m+1}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial x}\right)\left(y+\varphi\left(x^2\right)\right)-\left(2y+\sum\nolimits_{k=3}^{2m+1}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial y}\right)x\equiv$$

$$\equiv-\frac{\partial h_{2m+2}(x,y)}{\partial x}y+\frac{\partial h_{2m+2}(x,y)}{\partial y}x-\varphi\left(x^2\right)\frac{\partial h_{2m+2}(x,y)}{\partial x}-\sum\nolimits_{k=2m+3}^{+\infty}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial x}\left(y+\varphi\left(x^2\right)\right)+\sum\nolimits_{k=2m+3}^{+\infty}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial y}x$$

Следовательно,

$$\dot{U}=\frac{\partial f_{2m+2}(x,y)}{\partial x}y+2ax^{2m+2}-\frac{\partial f_{2m+2}(x,y)}{\partial y}x-\frac{\partial h_{2m+2}(x,y)}{\partial x}y+\frac{\partial h_{2m+2}(x,y)}{\partial y}x+$$

$$+\left[-\varphi\left(x^2\right)\frac{\partial h_{2m+2}(x,y)}{\partial x}-\sum\nolimits_{k=2m+3}^{+\infty}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial x}\left(y+\varphi\left(x^2\right)\right)+\sum\nolimits_{k=2m+3}^{+\infty}\frac{\partial h_k(x,y)}{\partial y}x+\right.$$

$$+y\sum\nolimits_{k=2m+3}^{+\infty}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial x}+\varphi\left(x^2\right)\sum\nolimits_{k=2m+2}^{+\infty}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial x}+\left(ax^{2m+1}+\sum\nolimits_{k=m+1}^{+\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}\right)\sum\nolimits_{k=3}^{+\infty}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial x}+$$

$$\left.+2x\sum\nolimits_{k=m+1}^{+\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}-x\sum\nolimits_{k=2m+3}^{+\infty}\frac{\partial f_k(x,y)}{\partial y}\right]\equiv 0$$

Выражение в квадратных скобках состоит из однородных полиномов степени не ниже $2m+3$. Таким образом,

$$\dot{U}=\left(\frac{\partial f_{2m+2}(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial h_{2m+2}(x,y)}{\partial x}\right)y+2ax^{2m+2}-\left(\frac{\partial f_{2m+2}(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial h_{2m+2}(x,y)}{\partial y}\right)x+[...]\equiv 0$$

Положим $q_{2m+2}(x,y)=f_{2m+2}(x,y)-h_{2m+2}(x,y).$ Однородный полином $q_{2m+2}(x,y)$ можно представить в виде

$$q_{2m+2}(x,y)=b_{2m+2,0}x^{2m+2}+b_{2m+1,1}x^{2m+1}y+...+b_{1,2m+1}xy^{2m+1}+\beta\left(x^2+y^2\right)^{m+1}.$$

Тогда

$$\dot{U}=\frac{\partial q_{2m+2}(x,y)}{\partial x}y+2ax^{2m+2}-\frac{\partial q_{2m+2}(x,y)}{\partial y}x+[...]=$$

$$=\left((2m+2)b_{2m+2,0}x^{2m+1}+(2m+1)b_{2m+1,1}x^{2m}y+...+b_{1,2m+1}y^{2m+1}+\beta(m+1)2x\left(x^2+y^2\right)^m\right)y+$$

$$+2ax^{2m+2}-\left(b_{2m+1,1}x^{2m+1}+2b_{2m,2}x^{2m}y+...+(2m+1)b_{1,2m+1}xy^{2m}+\beta(m+1)2y\left(x^2+y^2\right)^m\right)x+[...]=$$

$$=\left((2m+2)b_{2m+2,0}x^{2m+1}+(2m+1)b_{2m+1,1}x^{2m}y+\ldots+b_{1,2m+1}y^{2m+1}\right)y+2ax^{2m+2}-$$
$$-\left(b_{2m+1,1}x^{2m+1}+2b_{2m,2}x^{2m}y+\ldots+(2m+1)b_{1,2m+1}xy^{2m}\right)x+[\ldots]\equiv 0$$

Методом неопределенных коэффициентов находим значения коэффициентов $b_{i,j}$. Получаем:

$$\begin{array}{ll} y^{2m+2}: & b_{1,\,2m+1}=0 \\ x^2y^{2m}: & 3b_{3,\,2m-1}-(2m+1)b_{1,\,2m+1}=0 \;\Rightarrow\; b_{3,\,2m-1}=0 \\ x^4y^{2m-2}: & 5b_{5,\,2m-3}-(2m-1)b_{3,\,2m-1}=0 \;\Rightarrow\; b_{5,\,2m-3}=0 \\ \ldots & \\ x^{2m}y^2: & (2m+1)b_{2m+1,\,1}-3b_{2m-1,\,3}=0 \;\Rightarrow\; b_{2m+1,\,1}=0 \\ x^{2m+2}: & -b_{2m+1,\,1}+2a=0 \;\Rightarrow\; a=0 \end{array} \tag{8}$$

Из (8) следует, что $a=0$. Противоречие.

Достаточность. Если $a_{2k+1}=0,\ k=1,2,\ldots,$ тогда по теореме 1 $O(0,0)$ – центр. Теорема доказана.

Рассмотрим систему Льенара с комплексными коэффициентами

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-g(x)-f(x)y, \tag{9}$$

где $g(x)=x+\sum_{k=2}^{+\infty}\beta_k x^k,\ \ f(x)=\sum_{j=1}^{+\infty}\gamma_j x^j,\ \ \beta_k,\gamma_j\in\mathbb{C}.$

Введем функции

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad G(x)=\int_0^x g(t)dt.$$

Теорема 3. *Для того, чтобы начало координат системы (9) было центром необходимо и достаточно, чтобы существовала аналитическая в окрестности* $x=0$ *функция* $\Phi(x)$, *где* $\Phi(0)=0$, *такая, что* $F(x)=\Phi\left(G(x)\right)$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть точка $O(0,0)$ является центром системы (9). Последовательные замены $y=y_1-F(x)$ и $y_1\to y$ приводят (9) к виду

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-g(x). \tag{10}$$

Введем замену

$$u=x\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2\beta_k}{k+1}x^{k-1}\right)^{1/2}, \tag{11}$$

где для $\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2\beta_k}{k+1}x^{k-1}\right)^{1/2}$ рассматривается главное значение функции.

Разложение функции $u=u(x)$ в степенной ряд имеет вид

$$u(x)=x\left(1+\frac{1}{3}\beta_2x+\sum_{k=2}^{+\infty}\delta_k x^k\right),\quad \delta_k\in\mathbb{C}.$$

Из условий $u(0)=0,\ u'(0)\neq 0$ следует, что в окрестности $x=0$ функция $u=u(x)$ имеет обратную $x=x(u)$, где $x(u)=u+\sum_{k=2}^{+\infty}\mu_k u^k,\ \ \mu_k\in\mathbb{C}.$ Тогда $u\equiv u(x(u))$.

Найдем $\dot{u}=du/dt$

$$\dot{u}=\left(\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2\beta_k}{k+1}x^{k-1}\right)^{1/2}+\frac{x\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2\beta_k(k-1)}{k+1}x^{k-2}}{2\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2\beta_k}{k+1}x^{k-1}\right)^{1/2}}\right)\dot{x}=\frac{1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2\beta_k}{k+1}x^{k-1}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\beta_k(k-1)}{k+1}x^{k-1}}{\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2\beta_k}{k+1}x^{k-1}\right)^{1/2}}\dot{x}=$$
$$=\frac{x+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\beta_k(2+k-1)}{k+1}x^k}{x\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2\beta_k}{k+1}x^{k-1}\right)^{1/2}}\dot{x}=\frac{g(x(u))}{u}\left(y-F(x(u))\right).$$

Из вышеизложенного заключаем, что система (10) при помощи замены (11) приводится к системе

$$\dot{u}=\frac{g(x(u))}{u}\left(y-F(x(u))\right),\quad \dot{y}=-\frac{g(x(u))}{u}u, \tag{12}$$

где функция $\dfrac{g(x(u))}{u} = 1 + \nu_1 u + \sum_{k=2}^{+\infty} \nu_k x^k$, $\nu_k \in \mathbb{C}$, аналитична в окрестности начала координат и отлична от нуля при $u = 0$.

Начало координат системы (12) является центром, т.к. получена из (10) при помощи аналитической замены (11). Тогда для системы (12) существует аналитический в окрестности $u = y = 0$ интеграл вида

$$U = u^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} f_k(u, y),$$

для которого в силу системы выполняется тождество $\dot{U} \equiv 0$.

Для системы (12) имеем

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial u}\frac{g(x(u))}{u}\big(y - F(x(u))\big) - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{g(x(u))}{u}u = \frac{g(x(u))}{u}\left(\frac{\partial U}{\partial u}\big(y - F(x(u))\big) - \frac{\partial U}{\partial y}u\right) \equiv 0.$$

Т.к. $\dfrac{g(x(u))}{u} = 1 + \nu_1 u + \sum_{k=2}^{+\infty} \nu_k x^k$, то будет выполняться

$$\frac{\partial U}{\partial u}\big(y - F(x(u))\big) - \frac{\partial U}{\partial y}u \equiv 0.$$

Из последнего тождества заключаем, что $O(0,0)$ – центр для системы

$$\dot{x} = y - F(x(u)), \quad \dot{y} = -u. \tag{13}$$

Из теоремы 2 следует, что функция $F(x(u))$ имеет нулевые нечетные коэффициенты, т.е. $F(x(u)) = \sum_{k=1}^{+\infty} s_{2k} u^{2k}$. Учитывая, что $u^2 = 2G(x)$, имеем

$$F(x) = F(x(u)) = \sum_{k=1}^{+\infty} s_{2k} u^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} s_{2k}\big(2G(x(u))\big)^k = \Phi\big(G(x)\big),$$

где $\Phi(x)$ – аналитическая в окрестности $x = 0$ функция, $\Phi(0) = 0$.

Достаточность. Пусть существует аналитическая в окрестности $x = 0$ функция $\Phi(x)$, где $\Phi(0) = 0$, такая, что $F(x) = \Phi\big(G(x)\big)$. Функции $F(x)$ и $G(x)$ определяются из системы (9).

Последовательные замены $y = y_1 - F(x)$ и $y_1 \to y$ приводят (9) к виду (10). Замена (11) приводит (10) к виду (12).

Рассмотрим систему (13). Докажем, что для системы (13) точка $O(0,0)$ является центром. Имеем

$$F(x) = F(x(u)) = \Phi\big(G(x(u))\big) = \Phi\left(\frac{1}{2}u^2\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} s_{2k} u^{2k}.$$

Значит, $F(x(u))$ является четной функцией. Тогда по теореме 2 система (13) имеет центр в $O(0,0)$. Тогда для системы (13) существует аналитический в окрестности $u = y = 0$ интеграл

$$U(u, y) = u^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} f_k(u, y),$$

для которого

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial u}\big(y - F(x(u))\big) - \frac{\partial U}{\partial y}u \equiv 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial u}\frac{g(x(u))}{u}\big(y - F(x(u))\big) - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{g(x(u))}{u}u \equiv 0.$$

Значит, $O(0,0)$ – центр системы (12). Тогда и $O(0,0)$ системы (9) особая точка типа центр. Теорема доказана.

Теорема 4. *Особая точка $O(0,0)$ системы (9) является центром тогда и только тогда, когда система уравнений*

$$F(x) = F(y), \quad G(x) = G(y)$$

имеет аналитическое в окрестности $x = 0$ решение $y = y(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $O(0,0)$ – центр системы (9).

Рассмотрим уравнение $G(x) = G(y)$. Т.к.

$$G(x) - G(y) = (x - y)\left(\frac{1}{2}(x + y) + \frac{\beta_2}{3}\left(x^2 + xy + y^2\right) + \ldots\right),$$

то из теоремы о неявной функции [12, с. 476] следует, что уравнение $G(x)-G(y)=0$ имеет единственное аналитическое в окрестности $x=0$ решение $y=y(x)$, удовлетворяющее условиям $y(0)=0,\ y'(0)=-1.$

Рассмотрим функции $u=u(x)$ и $x=x(u)$ из теоремы 3. Имеем

$$2G(x)=2G(x(u))=u^2=(-u)^2=2G(x(-u)).$$

Тогда $G(x(u))=G(x(-u)).$

Т.к. $-u(x)=-x\left(1+\frac{\beta_2}{3}x+\sum_{k=2}^{+\infty}\delta_k x^k\right)$ и $x(u)=u+\sum_{k=2}^{+\infty}\mu_k u^k$, то

$$x(-u(x))=-x\left(1+\frac{\beta_2}{3}x+\sum_{k=2}^{+\infty}\delta_k x^k\right)-\sum_{k=2}^{+\infty}\mu_k\left(-x\left(1+\frac{\beta_2}{3}x+\sum_{k=2}^{+\infty}\delta_k x^k\right)\right)^k=-x+\sum_{k=2}^{+\infty}\eta_k x^k,$$

где $\eta_k\in\mathbb{C}.$ Тогда $y=y(x)=x(-u(x)).$

Начало координат системы (9) является центром, тогда $O(0,0)$ системы (13) также центр. Из теоремы 2 следует, что функция $F(x(u))$ является четной. Имеем

$$F(x(u))-F(x(-u))\equiv 0.$$

Значит, $F(x)=F(y).$

Достаточность. Пусть система уравнений

$$F(x)=F(y),\quad G(x)=G(y)$$

имеет аналитическое в окрестности $x=0$ решение $y=y(x),\ y(0)=0,\ y'(0)=-1,$ где $F(x),$ $G(x)$ определяются системой (9). Покажем, что $O(0,0)$ системы (9) является особой точкой типа центр.

Рассмотрим уравнение $G(x)=G(y)$. Т.к.

$$G(x)-G(y)=(x-y)\left(\frac{1}{2}(x+y)+\frac{\beta_2}{3}\left(x^2+xy+y^2\right)+\ldots\right),$$

то уравнение $G(x)-G(y)=0$ имеет единственное аналитическое в окрестности $x=0$ решение $y=y(x),$ где $y(0)=0,\ y'(0)=-1$. Это решение имеет вид $y=-x+\sum_{k=2}^{+\infty}\rho_k x^k,\ \rho_k\in\mathbb{C}.$

Рассмотрим функции $u=u(x)$ и $x=x(u)$ из теоремы 3. Из изложенного выше следует, что $x(-u(x))=-x+\sum_{k=2}^{+\infty}\eta_k x^k.$ Так как $2G(x(u))=u^2=(-u)^2=2G(x(-u)),$ то функция $x(-u(x))$ будет решением уравнения $G(x)-G(x(-u))=0,$ которое обладает теми же свойствами, что и функция $y=y(x).$ Тогда $y=x(-u(x)).$ Т.к. $y=x(-u(x))$ решение уравнения $F(x)-F(y)=0,$ то $F(x)-F(x(-u))=0.$ Значит, функция $F(x(u))$ четная. Действуя аналогично доказательству достаточности в теореме 3, получаем, что $O(0,0)$ системы (9) особая точка типа центр. Теорема доказана.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 4 для системы (9) с вещественными коэффициентами (см. [13, 14]) используются вещественные аналоги теорем 2, 3 и теорема о неявной функции.

Рассмотрим далее систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=yP_0(x),\quad \dot{y}=-x+P_2(x)y^2+P_3(x)y^3, \tag{14}$$

где $P_0(0)=1,\ P_3(0)=b_0\in\mathbb{C}$ и $P_0(x),\ P_2(x),\ P_3(x)$ – полиномы с комплексными коэффициентами.

Теорема 5. *Для наличия в $O(0,0)$ системы (14) центра необходимо и достаточно, чтобы система уравнений*

$$y^4P_3^5(y)V^3(x)=x^4P_3^5(x)V^3(y),\quad xW(x)V^2(y)=yW(y)V^2(x), \tag{15}$$

где

$$V(x)\equiv P_0(x)\left(-P_3(x)+xP_3'(x)\right)+3xP_2(x)P_3(x),$$

$$W(x)\equiv P_0(x)\left(-V'(x)P_3(x)+3V(x)P_3'(x)\right)+4P_2(x)P_3(x)V(x),$$

имела аналитическое в окрестности $x=0$ решение вида $y=y(x),\ y(0)=0,\ y'(0)=-1.$

Утверждение теоремы 5 верно для вещественной системы вида (14) [1, стр.65; 15]. В доказательстве действительная система (14) приводится к действительной системе (9) при помощи невырожденного аналитического преобразования. Т.к. имеет место теорема 4, то утверждение теоремы 5 будет верно и для комплексного случая.

Из равенства нулю первых трех фокусных величин системы (14) следует выполнение соотношений

$$P_3(x)=xQ(x),\ Q'(x)P_0(x)+3Q(x)P_2(x)=xR(x),\ 3R'(x)Q(x)-5R(x)Q'(x)=xS(x),$$

где $Q(x), R(x), S(x)$ - полиномы с комплексными коэффициентами.

Теорема 6. *Особая точка* $O(0,0)$ *системы (14) является центром тогда и только тогда, когда система уравнений*

$$Q^5(x)R^3(y) = Q^5(y)R^3(x), \quad P_0(x)S(x)R^2(y) = P_0(y)S(y)R^2(x) \qquad (16)$$

имеет аналитическое в окрестности $x = 0$ *решение вида* $y = y(x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1,$ *или хотя бы одно из уравнений системы (16) обращается в тождество.*

Доказательство. Покажем, что система уравнений (15) из теоремы 5 равносильна системе уравнений (16) из теоремы 6.

Рассмотрим функции $V(x), W(x)$ из системы (15) и функции $P_0 = P_0(x),\ P_2 = P_2(x),\ P_3 = P_3(x),$ $Q = Q(x),\ R = R(x),\ S = S(x)$ из системы (16). Распишем функцию $V(x)$ через функции $P_0, P_2, Q.$ Для этого подставим $P_3 = xQ$ и $P_3' = Q + xQ'.$ Имеем

$$V(x) = xP_0Q + xP_0Q + x^2Q'P_0 + 3x^2QP_2 = x^2\left(Q'P_0 + 3QP_2\right) = x^3R.$$

Подставив $V(x) = x^3R(x)$ и $P_3(x) = xQ(x)$ в первое уравнение системы (15), получаем первое уравнение системы (16), т.е.

$$Q^5(x)R^3(y) = Q^5(y)R^3(x)\ .$$

Рассмотрим теперь функцию $W(x)$. Учитывая, что

$$xP_2P_3 = \frac{1}{3}\left(V - P_0\left(-P_3 + xP_3'\right)\right) = \frac{1}{3}\left(x^3R - P_0\left(-P_3 + xP_3'\right)\right)$$

и $V'(x) = 3x^2R + x^3R',$ имеем

$$W(x) = x^2\left(-3P_0P_3R + 3xP_0P_3'R - xP_0P_3R' + 4xP_2P_3R\right) =$$

$$= x^2\left(-3P_0P_3R + 3xP_0P_3'R - xP_0P_3R' + \frac{4}{3}P_0\left(-P_3 + xP_3'\right)R\right) + \frac{4}{3}x^5R^2 =$$

$$= \frac{1}{3}x^2P_0\left(-9xQR + 9xQR + 9x^2RQ' - 3x^2R'Q + 4xRQ - 4xRQ - 4x^2RQ'\right) + \frac{4}{3}x^5R^2 =$$

$$= \frac{1}{3}x^2P_0\left(5x^2RQ' - 3x^2R'Q\right) + \frac{4}{3}x^5R^2 = -\frac{1}{3}x^4P_0\left(3R'Q - 5RQ'\right) + \frac{4}{3}x^5R^2 = -\frac{1}{3}x^5P_0S + \frac{4}{3}x^5R^2.$$

Подставив $V(x)$ и $W(x)$ во второе уравнение системы (15), получаем второе уравнение системы (16), т.е.

$$P_0(x)S(x)R^2(y) = P_0(y)S(y)R^2(x).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим далее систему

$$\dot{x} = yP_0(x), \quad \dot{y} = -x + xQ(x)y + P_2(x)y^2, \qquad (17)$$

где $P_0(0) = 1$ и $P_0(x), P_2(x), Q(x)$ – полиномы с комплексными коэффициентами.

Из равенства нулю первых двух фокусных величин системы (17) следует выполнение соотношений

$$Q'(x)P_0(x) + Q(x)P_2(x) = xR(x),\ R'(x)Q(x) - 3R(x)Q'(x) = xS(x),$$

где $R(x), S(x)$ – полиномы с комплексными коэффициентами.

Аналогично теореме 6 доказывается следующая

Теорема 7. *Особая точка* $O(0,0)$ *системы (17) является центром тогда и только тогда, когда система уравнений*

$$Q^3(x)R(y) = Q^3(y)R(x), \quad P_0(x)S(x)R^2(y) = P_0(y)S(y)R^2(x) \qquad (18)$$

имеет аналитическое в окрестности $x = 0$ *решение вида* $y = y(x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1,$ *или хотя бы одно из уравнений системы (18) обращается в тождество.*

Замечание 2. Вещественный аналог этого утверждения представлен в работах [7, 9, 16].

П. Люротом была доказана следующая

Теорема 8. [17, с.259] *Всякое подполе* $\overline{K}$ *поля рациональных функций* $K = k(x),$ *содержащее поле* k, *содержит элемент* y *такой, что* $\overline{K} = k(y).$

Рассмотрим теоремы 6 и 8.

I. Пусть $P_3(x) \equiv 0.$ Тогда $Q(x) \equiv 0.$ Значит, выполняются соотношения (16) и $O(0,0)$ – центр системы (14).

II. Пусть $P_3(x) \neq 0$ и $R(x) \equiv 0$. Тогда выполняются соотношения (16) и $O(0,0)$ – центр системы (14).

III. Пусть $P_3(x)R(x)\neq 0.$ Тогда $Q(x)R(x)\neq 0.$ Введем функции

$$F(x)=\frac{R^3(x)}{Q^5(x)},\quad G(x)=\frac{P_0(x)S(x)}{R^2(x)},$$

где $Q(x),\ R(x),\ S(x)$ – полиномы из теоремы 6. Система (16) примет вид

$$F(x)=F(y),\quad G(x)=G(y).$$

Тогда:

а) если $F(x)=\dfrac{R^3(x)}{Q^5(x)}\equiv const,$ то $O(0,0)$ – центр системы (14);

б) если $G(x)=\dfrac{P_0(x)S(x)}{R^2(x)}\equiv const,$ то $O(0,0)$ – центр системы (14);

в) если $F(x)\neq const$ и $G(x)\neq const$, то $O(0,0)$ является центром системы (14) тогда и только тогда, когда существуют рациональная функция $\varphi(x),$ для которой $\varphi(0)=0,$ $\varphi^{(k)}(0)=0$ для $k<m,$ $m-$первое четное натуральное число такое, что $\varphi^{(m)}(0)\neq 0,$ и рациональные функции $f(z)$ и $g(z)$ такие, что

$$F(x)\equiv f(\varphi(x)),\quad G(x)=g(\varphi(x)). \tag{19}$$

Замечание 3. Чаще всего $m=2.$

Докажем III в).

Необходимость. Пусть $O(0,0)$ – центр системы (14). Тогда верно заключение теоремы 6. В теореме 8 положим $K=\mathbb{C}(x)-$ поле рациональных функций. Тогда в качестве подполя поля K возьмем

$$\bar{K}=\{r(x)\in K:\quad r(x)=r(y(x)),\quad y=y(x),\, y(0)=0,\, y'(0)=-1\},$$

где $y=y(x)$ – решение системы уравнений (16) из теоремы 6. Значит, из теоремы 8 следует существование рациональной функции $\varphi(x)$ такой, что $\bar{K}=k(\varphi(x)).$ Т.к. $F(x)\in\bar{K}$ и $G(x)\in\bar{K}$, то существуют рациональные функции $f(z)$ и $g(z)$ такие, что выполняются условия (19). Условия $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$ получаем из условий $y(0)=0,\, y'(0)=-1$ и $\left(\varphi(y(x))\right)'=\varphi'_y(y(x))\cdot y'(x).$

Т.к. $\varphi(x)\in\bar{K},$ то уравнение $\varphi(x)-\varphi(y)=0$ имеет решение вида $y=y(x)=-x+\sum_{k=2}^{+\infty}\rho_k x^k.$ Пусть $\varphi^{(k)}(0)=0$ для всех $k<m,$ где m – любое натуральное число не меньше двух, и $\varphi^{(m)}(0)\neq 0.$ Покажем, что m будет четным.

Разложим рациональную функцию $\varphi(x)$ в ряд Тейлора в окрестности $x=0.$ Учитывая $y(0)=0,$ имеем

$$\varphi(x)-\varphi(y)=\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}\left(x^m-y^m\right)+\frac{\varphi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\left(x^{m+1}-y^{m+1}\right)+\ldots=(x-y)\times$$

$$\times\left(\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}\left(x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+x^{m-4}y^3+\ldots+xy^{m-2}+y^{m-1}\right)+\frac{\varphi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}h_m(x,y)+\ldots\right),$$

где $h_m(x,y)-$ однородный полином степени m с коэффициентами равными 1.

Поскольку $y'(0)=-1,$ то $x-y\neq 0$. Тогда

$$\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}\left(x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+x^{m-4}y^3+\ldots+xy^{m-2}+y^{m-1}\right)+\frac{\varphi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}h_m(x,y)+\ldots\equiv 0$$

Подставляя $y=y(x)=-x+\sum_{k=2}^{+\infty}\rho_k x^k$ в последнее тождество, имеем

$$\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}x^{m-1}\left(1+(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{m-2}+(-1)^{m-1}\right)+\sum_{j=m}^{+\infty}\eta_j x^j\equiv 0.$$

Т.к. $\varphi^{(m)}(0)\neq 0,$ то последнее тождество выполняется только, если m – четное.

Достаточность. Пусть существуют рациональная функция $\varphi(x),$ для которой $\varphi(0)=0,$ $\varphi^{(k)}(0)=0$ для $k<m,$ $m=2p-$ первое четное натуральное число такое, что $\varphi^{(m)}(0)\neq 0,$ и рациональные функции $f(z)$ и $g(z)$ такие, что выполняются условия (19).

Рассмотрим уравнение $\varphi(x)=\varphi(y).$ При разложении функции $\varphi(x)$ в ряд Тейлора получаем

$$\frac{\varphi^{(2p)}(0)}{(2p)!}x^{2p}+\frac{\varphi^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}+\frac{\varphi^{(2p+2)}(0)}{(2p+2)!}x^{2p+2}+\ldots=\frac{\varphi^{(2p)}(0)}{(2p)!}y^{2p}+\frac{\varphi^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}y^{2p+1}+\frac{\varphi^{(2p+2)}(0)}{(2p+2)!}y^{2p+2}+\ldots$$

Последнее уравнение равносильно уравнению

$$\begin{gathered}\frac{\varphi^{(2p)}(0)}{(2p)!}x^{2p}\left(1+\frac{\varphi^{(2p+1)}(0)}{\varphi^{(2p)}(0)(2p+1)}x+\frac{\varphi^{(2p+2)}(0)}{\varphi^{(2p)}(0)(2p+1)(2p+2)}x^2+\ldots\right)=\\=\frac{\varphi^{(2p)}(0)}{(2p)!}y^{2p}\left(1+\frac{\varphi^{(2p+1)}(0)}{\varphi^{(2p)}(0)(2p+1)}y+\frac{\varphi^{(2p+2)}(0)}{\varphi^{(2p)}(0)(2p+1)(2p+2)}y^2+\ldots\right)\end{gathered}\tag{20}$$

Рассмотрим далее уравнение

$$\begin{gathered}(-x)\left(1+\frac{\varphi^{(2p+1)}(0)}{\varphi^{(2p)}(0)(2p+1)}x+\frac{\varphi^{(2p+2)}(0)}{\varphi^{(2p)}(0)(2p+1)(2p+2)}x^2+\ldots\right)^{\frac{1}{2p}}=\\=y\left(1+\frac{\varphi^{(2p+1)}(0)}{\varphi^{(2p)}(0)(2p+1)}y+\frac{\varphi^{(2p+2)}(0)}{\varphi^{(2p)}(0)(2p+1)(2p+2)}y^2+\ldots\right)^{\frac{1}{2p}}\end{gathered}\tag{21}$$

Уравнение (21) можно представить в виде

$$-x\left(1+\frac{1}{2p}\frac{\varphi^{(2p+1)}(0)}{\varphi^{(2p)}(0)(2p+1)}x+\sum_{k=2}^{+\infty}\sigma_k x^k\right)=y\left(1+\frac{1}{2p}\frac{\varphi^{(2p+1)}(0)}{\varphi^{(2p)}(0)(2p+1)}y+\sum_{k=2}^{+\infty}\sigma_k y^k\right)$$

или

$$x+y+\frac{1}{2p}\frac{\varphi^{(2p+1)}(0)}{\varphi^{(2p)}(0)(2p+1)}\left(x^2+y^2\right)+\sum_{k=2}^{+\infty}\sigma_k\left(x^{k+1}+y^{k+1}\right)=0.$$

Из теоремы о неявной функции следует, что последнее уравнение имеет решение $y=y(x)$, удовлетворяющее условиям $y(0)=0,\ y'(0)=-1.$ Домножая уравнение (21) на $\left(\frac{\varphi^{(2p)}(0)}{(2p)!}\right)^{\frac{1}{2p}}$ и возводя обе части уравнения в степень $2p,$ получаем уравнение (20). Таким образом, уравнение $\varphi(x)-\varphi(y(x))=0$ также будет иметь решение $y=y(x),\ \ y(0)=0,\ y'(0)=-1.$

Тогда

$$f(\varphi(x))=f(\varphi(y(x))),\ g(\varphi(x))=g(\varphi(y(x))).$$

Значит,

$$F(x)=F(y),\quad G(x)=G(y).$$

Следовательно, по теореме 6 $O(0,0)$ – центр системы (14).

Замечание 4. Впервые теорема Люрота для исследования проблемы центра и фокуса для вещественной системы Льенара использовалась в работе [18], а позже в работах [13, 14]. Для системы (14) аналогичный критерий был получен А.П. Садовским в [19].

Проиллюстрируем применение метода Черкаса на следующем примере.

Рассмотрим систему

$$\dot x=y+Hx^2+Qx^3,\quad \dot y=-x+Ax^2+3Bxy+Kx^3+3Lx^2y,\tag{22}$$

где $A,B,H,K,L,Q\in\mathbb{C}.$

Замена $z=y+Hx^2+Qx^3$ приводит систему (22) к системе Льенара

$$\dot x=y,\quad \dot y=-g(x)-f(x)z,$$

где $g(x)=x-Ax^2+\left(3BH-K\right)x^3+3\left(HL+BQ\right)x^4+3LQx^5,\ \ f(x)=-\left(3B+2H\right)x-3\left(L+Q\right)x^2.$

Введем функции $F(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad G(x)=\int_0^x g(t)dt$.

Пусть V – *многообразие центра* системы (22):

$$V=\left\{a\in\mathbb{C}^6:\ \ g_i(a)=0\quad i=1,2,\ldots\right\},$$

где $g_i,\ i=1,2,\ldots,$ – фокусные величины системы (22).

Теорема 8. *Справедливо равенство*

$$V=\bigcup_{i=1}^{5}V\left(J_i\right),$$

где радикальные идеалы $J_i,\ i=\overline{1,5},$ *имеют вид*

$$J_1=\langle 3B+2H,\, L+Q\rangle,\quad J_2=\langle 2A(3B+2H)+15L,\, 27B^2-39BH+12H^2+25K,\, A(3B+2H)+5Q\rangle,$$
$$J_3=\langle AB+L,\, K,\, 2AH+3Q\rangle,\quad J_4=\langle A,\, L,\, Q\rangle,\quad J_5=\langle A,\, B-H,\, L+Q\rangle.$$

Доказательство. Вычислим первые восемь фокусных величин системы (22), используя алгоритм из [20, с.109]: $g_1=A(3B+2H)+3L+3Q,$ $g_2=A(3B+2H)\left(10A^2+207B^2+339BH+124H^2-17K\right)+3\left(10A^2+\right.$ $\left.+207B^2+315BH+148H^2+3K\right)L+3\left(10A^2+243B^2+303BH+124H^2+3K\right)Q,$ g_3 содержит 58 слагаемых, $g_4-144,$ $g_5-312,$ $g_6-604,$ $g_7-1084,$ $g_8-1824.$

Вычисляя базис Гребнера идеала $\langle g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6,g_7,g_8\rangle$ с порядком переменных $Q>K>L>H>B>A,$ получаем идеал

$$I=\langle A(3B+2H)(AB+L)\big(2A(3B+2H)+15L\big),(B-H)(3B+2H)(21AB+4AH-15L)\times$$
$$\times(AB+L)\big(2A(3B+2H)+15L\big),\,(3B+2H)\big(9(AB+L)(B-H)+5AK\big),\,A(3B+2H)+3L+3Q\rangle$$

Радикал идеала I имеет вид:

$$\sqrt{I}=\bigcap\nolimits_{i=1}^{5}J_i.$$

где

$$\bigcap\nolimits_{i=1}^{5}J_i=\langle A(3B+2H)(AB+L)\big(2A(3B+2H)+15L\big),\,(B-H)(3B+2H)(AB+L)\times$$
$$\times\big(2A(3B+2H)+15L\big),\,(3B+2H)\big(5AK+9(B-H)(AB+L)\big),\,(B-H)(3B+2H)\times$$
$$\times\big(6(B-H)(3B+2H)(AB+L)-25KL\big),\,A(3B+2H)+3(L+Q)\rangle.$$

Введем вектор $p=(A,B,H,K,L,Q)$ и функции $\varphi_1(x)=x^2\left(-12+8Ax+\left(27B^2+6K\right)x^2+36BLx^3+\right.$ $\left.+12L^2x^4\right),\varphi_2(x)=x^2(-3+2Ax),\varphi_3(x)=x^2.$

При $p\in V(J_i),\, i=\overline{1,5},$ начало координат системы (22) является центром, т.к.:

1) $p\in V(J_1):\quad F(x)\equiv const,\quad G(x)=-\dfrac{1}{24}\varphi_1(x);$

2) $p\in V(J_2):\quad F(x)=\dfrac{1}{6}(3B+2H)\varphi_2(x),\quad G(x)=-\dfrac{1}{6}\varphi_2(x)+\dfrac{1}{300}(3B+2H)^2\varphi_2^2(x);$

3) $p\in V(J_3):\quad F(x)=\dfrac{1}{6}(3B+2H)\varphi_2(x),\quad G(x)=-\dfrac{1}{6}\varphi_2(x)+\dfrac{1}{12}BH\varphi_2^2(x);$

4) $p\in V(J_4):\quad F(x)=-\dfrac{1}{2}(3B+2H)\varphi_3(x),\quad G(x)=\dfrac{1}{2}\varphi_3(x)+\dfrac{1}{4}(3BH-K)\varphi_3^2(x);$

5) $p\in V(J_5):\quad F(x)=-\dfrac{5}{2}B\varphi_3(x),\quad G(x)=\dfrac{1}{2}\varphi_3(x)+\dfrac{1}{4}\left(3B^2-K\right)\varphi_3^2(x)-\dfrac{1}{2}L^2\varphi_3^3(x).$

Теорема доказана.

Заключение. Таким образом, метод различения особой точки типа центра или фокуса, предложенный Л.А. Черкасом, применим для комплексной системы Льенара и для комплексных обобщений этой системы.

Литература

1. Амелькин, В.В. Нелинейные колебания в системах второго порядка/ В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 208 с.
2. Dulac, H. Determination et integration d'une certaine class d'equations differentielles ayant puor point singulier un centre/ H. Dulac// Bull. Sci Math. – 1908. – V. 32. – P. 230 – 252.
3. Zoladek, H. The classification of reversible cubic systems with center/ H. Zoladek // Topological Methods in Nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center. – 1994. – V. 4. – P. 79 – 136.
4. Zoladek, H. Remarks on the classification of reversible cubic systems with center / H. Zoladek // Topological Methods in Nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center, 1996. Vol.8. P.335 – 342.
5. Бондарь, Ю.Л. Решение проблемы центра и фокуса для одной кубической системы, приводящейся к системе Льенара/ Ю.Л. Бондарь, А.П. Садовский// Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42. № 1. – С. 3 –- 14.
6. Bondar, Y.L. Variety of the center and limit cycles of a cubic system which is reduced to Lienard form/ Y.L. Bondar, A.P. Sadovskii// Buletinul Academiei de Stinte a Republicii Moldova. Mathematica. 2004. № 3 (46). P. 71 – 90.

7. Le Van Linh. The center-focus problem for analytical systems of Lienard form in degenerate case/ Le Van Linh, A.P. Sadovskii// Buletinul Academiei de Stinte a Republicii Moldova. Matematica. – 2003. № 2(42). – P. 37 – 50.
8. Черкас, Л.А. Об условиях центра для некоторых уравнений вида $yy' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$ / Л.А. Черкас// Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 8. – С. 1435 – 1439.
9. Черкас, Л.А. Условия центра для одного уравнения Льенара/ Л.А. Черкас// Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 2. – С. 292 – 298.
10. Черкас, Л.А. Условия центра для уравнения $yy' = \sum_{i=0}^{3} P_i(x)y^i$ / Л.А. Черкас// Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 9. – С. 1594 – 1600.
11. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными/ И.Г. Петровский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 404 с.
12. Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций. Том I. Начала теории/ А.И. Маркушевич. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
13. Christopher, C.J. Limit cycles of differential equations/ C.J. Christopher, C. Li. – Basel: Birkhauser, 2007. – 171 p.
14. Romanovski, V.G. The center and cyclicity problems: a computational algebra approach/ V.G. Romanovskii, D.S. Shafer. – Basel: Birkhauser, 2010. – 330 p.
15. Садовский, А.П. К условиям центра и фокуса для уравнений нелинейных колебаний/ А.П. Садовский// Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 9. – С. 1716 – 1719.
16. Садовский, А.П. Об условиях центра и предельных циклах одной системы дифференциальных уравнений/ А.П. Садовский// Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 1. – С. 98 – 102.
17. Ван дер Варден, Б.Л. Алгебра/ Б.Л. Ван дер Варден. – М.: Наука, 1976. – 623 с.
18. Черкас, Л.А. Об одном признаке отличия центра от фокуса для уравнения Льенара/ Л.А. Черкас// Доклады АН БССР. – 1978. – Т. 22, № 11. – С. 969 – 970.
19. Садовский, А.П. Теорема Люрота и метод Черкаса/ А.П. Садовский// Труды 5-й международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений". – 2010. – Т. 2. – С. 120 – 122.
20. Садовский, А.П. Полиномиальные идеалы и многообразия: пособие для студентов/ А.П. Садовский. – Мн.: Изд-во БГУ, 2008. – 199 с.

Keywords: cubic systems, Cherkas’s method, center variety, center-focus problem, Lienard system, Luroth theorem, center

Resume

In the article Lienard system $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y$ with $g(0) = f(0) = 0, \quad g'(0) = 1,$ and generalizations of Lienard systems of the forms: $\dot{x} = yP_0(x), \quad \dot{y} = -x + P_2(x)y^2 + P_3(x)y^3$ with $P_0(0) = 1,$ and $\dot{x} = yP_0(x),$ $\dot{y} = -x + xQ(x)y + P_2(x)y^2$ with $P_0(0) = 1$ are considered.

L.A. Cherkas created a number of criteria (necessary and sufficient conditions theorems) which allowed to establish center existence in the origin for Lienard system and its generalizations with real coefficients. The variety of these criteria defines Cheras’s method.

The purpose of the research is to prove that Cherkas’s method is also valid for Lienard system and its generalizations with complex coefficients. The existence of a center for systems with complex coefficients is established by means of the proof of existence of an analytical integral in the neighborhood of $x = y = 0$ of the form $x^2 + y^2 + \sum_{i+j=3}^{+\infty} c_{i,j}x^i y^j$ with $c_{i,j} \in \mathbb{C}$.

The main result of the article is the theorem which defines necessary and sufficient conditions for the center existence in $O(0,0)$ for Lienard system with complex coefficients. It is analog of the theorem proved for Lienard system with real coefficients by L.A. Cherkas. Based on this result the criteria of the center existence for complex generalizations of Lienard system are also formulated.

There is an example of finding the solution of the center-focus problem for the cubic system with complex coefficients at the end of the article. The center variety is defined by Cherkas’s method with the help of Luroth theorem.

The obtained results can be used at qualitative research of the two-dimensional autonomous systems with a singular point of center-focus type.