ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В КУРСЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Л. А. Альсевич, Г. А. Расолько

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: rasolka@bsu.by

С целью повышения качества подготовки студентов разработано учебно-методическое пособие по «Дифференциальным уравнениям» с использованием информационных технологий на примере системы компьютерной математики MathCAD. Использование информационных технологий в фундаментальном курсе высшей математики позволяет визуализировать получаемые промежуточные и итоговые результаты, сократить временные затраты по решению трудоемких задач и для некоторых задач построить семейство интегральных кривых, что не всегда возможно сделать вручную.

Ключевые слова: MathCAD, системы компьютерной математики, дифференциальные уравнения, фазовая плоскость, голоморфные уравнения.

Специальной ключевой компетенцией в современном информационном обществе становится владение информационными технологиями, в частности системами компьютерной математики (СМК), как в самой математике, так и в тех областях человеческой практики, где математика имеет важное прикладное значение.

Для повышения качества профессиональной подготовки студентов высшая школа разрабатывает новые методологические подходы в образовательном процессе. Одним из таких подходов, на наш взгляд, является использование компьютера как средства изучения фундаментальных математических дисциплин студентами физико-математических специальностей. С этой целью авторы предлагают проводить практические и (или) лабораторные занятия по изучению многих тем курса «Дифференциальные уравнения» в компьютерном классе с использованием системы компьютерной математики MathCAD.

В ряде случаев использование компьютера при рутинной вычислительной работе способствует поддержанию интереса к решению задачи и проведению исследования полученного результата. Такой подход позволяет, используя наглядность и компьютерный эксперимент, спрогнозировать ход решения рассматриваемой задачи и получить окончательный ответ.

Авторами доклада разработано учебно-методическое пособие по решению задач некоторых разделов фундаментального курса вузовской математики «Дифференциальные уравнения» с использованием системы компьютерной математики MathCAD.

Учебно-методическое пособие включает темы: «Фазовая плоскость однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами», «Фазовая плоскость однородной двумерной линейной стационарной дифференциальной системы», «Интегрирование элементарных дифференциальных уравнений первого порядка с построением семейства интегральных кривых», «Построение аналитических приближений решений дифференциальных уравнений» и др.

Для каждой из рассматриваемых типовых задач приводится теория, необходимая для решения, указывается алгоритм решения и подробный пример его выполнения в пакете MathCAD с необходимыми пояснениями основных этапов реализации алгоритма. Даются комментарии к ряду промежуточных и окончательных результатов, полученных с помощью MathCAD. После решения одного или нескольких примеров (в зависимости от темы) предлагается достаточно большое количество разнообразных контролирующих заданий для самостоятельного решения по изучаемой теме.

Опыт проведения практических занятий по курсу «Дифференциальные уравнения» показывает, что решение рассмотренных задач вручную достаточно трудоемко: нужно осуществить большой объем вычислительной работы. Работа с использованием компьютера является более продуктивной: рутинную вычислительную работу осуществляет компьютер.

Предполагается, что после выполнения задания студент оформляет отчет, в котором приводятся необходимая теория, алгоритм выполнения задания, протокол его выполнения, комментируются некоторые узловые моменты.

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим один из примеров использования пакета MathCAD при решении типовой задачи, рассмотренной в пособии в теме «Фазовая плоскость однородной двумерной линейной стационарной дифференциальной системы», который показывает несомненные преимущества проведения практических занятий с использованием компьютера.

Задача. Установить тип точки покоя и начертить схему расположения фазовых графиков однородной линейной дифференциальной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица системы, $A \neq \lambda E$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

После формулировки задачи приводится алгоритм ее решения:

- Составить характеристический многочлен матрицы A: $\det(A - \lambda E)$ и найти его корни.
- Установить тип точки покоя.
- По данной матрице A записать матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det A & a_{11} + a_{22} \end{pmatrix}$.
- На фазовой плоскости $O\,y_1\,y_2$ построить фазовые графики системы

$$\begin{cases} Dy_1 = y_2, \\ Dy_2 = -\det A \cdot y_1 + (a_{11} + a_{22})y_2, \end{cases}$$

которые совпадают с фазовыми графиками уравнения

$$D^2 y_1 - (a_{11} + a_{22})Dy_1 + \det A \cdot y_1 = 0 .$$

- Построить невырожденную матрицу S такую, что $B = S^{-1}AS$. Для этого, например, переходя к координатной форме записи, можно решить систему $SB = AS$, где $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ – искомая матрица, и выбрать α, β, γ, δ таким образом, чтобы $\det S \neq 0$.

- Применить линейное невырожденное преобразование $x = Sy$, при котором вектор $a = (a_1, a_2)$ переходит в вектор $b = (b_1, b_2)$, определяемый равенством $Sa = b$, и нарисовать на плоскости Ox_1x_2 фазовые графики исходной системы. Для этого посмотреть, например, куда переходят векторы, определяющие координатные оси, лучевые фазовые графики и т. д.

Далее задание уточняется.

Задание. Установить тип точки покоя и начертить схему расположения фазовых графиков системы

$$\begin{cases} Dx_1 = -x_1 + 4x_2, \\ Dx_2 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Затем приводится протокол выполнения задания в пакете MathCAD:

$$\text{ORIGIN} \equiv 1 \qquad a11 := -1 \qquad a12 := 4 \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a21 := 1 \qquad a22 := 2$$

$$A := \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -|A| & a11 + a22 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} := |A - \lambda \cdot E| \ \Big| \begin{matrix} \text{solve} \\ \lambda \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Точка покоя - седло

$$y1(t, C1, C2) := C1 \cdot e^{v1 \cdot t} + C2 \cdot e^{v2 \cdot t} \rightarrow C1 \cdot e^{-2 \cdot t} + C2 \cdot e^{3 \cdot t}$$

$$y2(t, C1, C2) := \frac{d}{dt} y1(t, C1, C2) \rightarrow 3 \cdot C2 \cdot e^{3 \cdot t} - 2 \cdot C1 \cdot e^{-2 \cdot t}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y2(t, C1, C2)}{y1(t, C1, C2)} \rightarrow 3$$

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{y2(t, C1, C2)}{y1(t, C1, C2)} \rightarrow -2$$

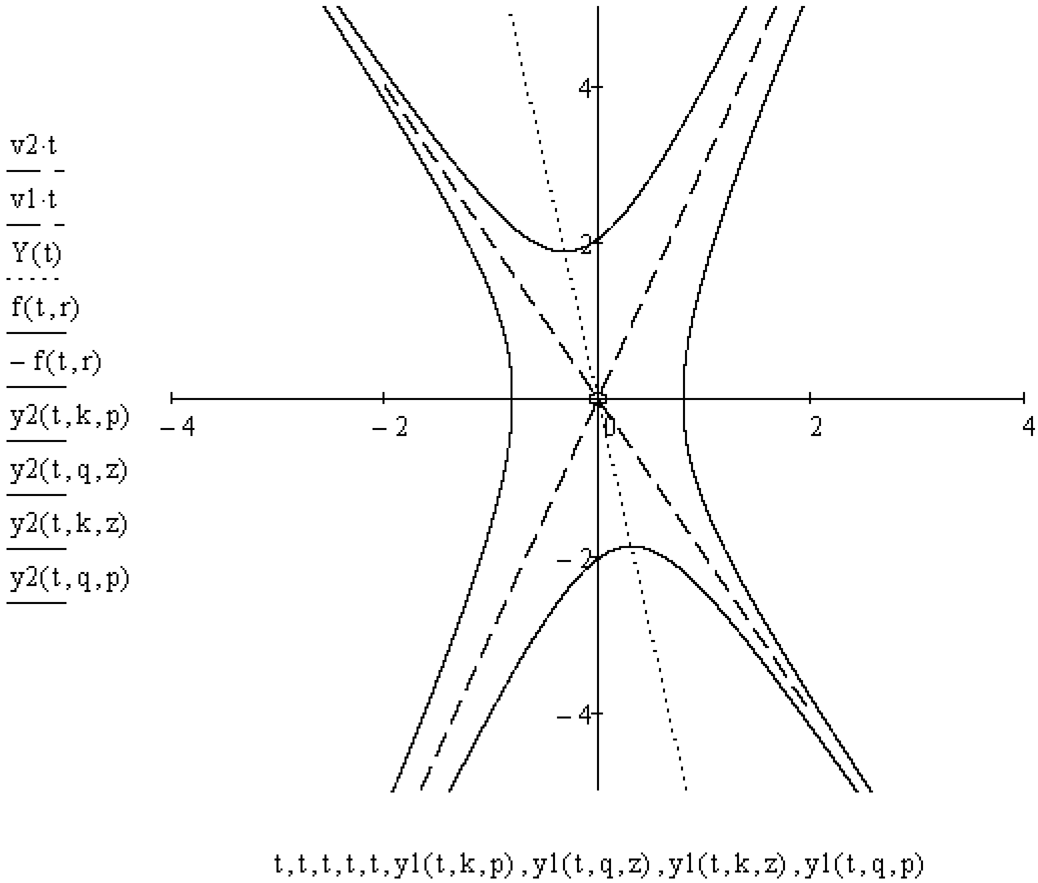
$$f(x, r) := \left| \begin{array}{l} \sqrt{r^2 - x^2} \ \text{ if } \ |x| \le r \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$$a0 := |A| \qquad a1 := -a11 - a22$$

$$Y(x) := -\frac{a0 \cdot x}{a1} \qquad r := 0.079$$

$a := -2 \qquad h := 0.0001 \qquad b := 2 \qquad t := a, a+h..b$

$k := 0.5 \qquad p := 0.3 \qquad q := -0.5 \qquad z := -0.3$



$$A\cdot\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot B \rightarrow \begin{pmatrix}4\cdot\gamma - 6\cdot\beta - \alpha & 4\cdot\delta - \alpha - 2\cdot\beta\\ 2\cdot\gamma + \alpha - 6\cdot\delta & \beta - \gamma + \delta\end{pmatrix}$$

Given $\quad 0 = 4\cdot\gamma - 6\cdot\beta - \alpha \qquad 0 = 4\cdot\delta - \alpha - 2\cdot\beta \qquad \left|\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\right| = -1$

$\qquad 0 = 2\cdot\gamma + \alpha - 6\cdot\delta \qquad 0 = \beta - \gamma + \delta$

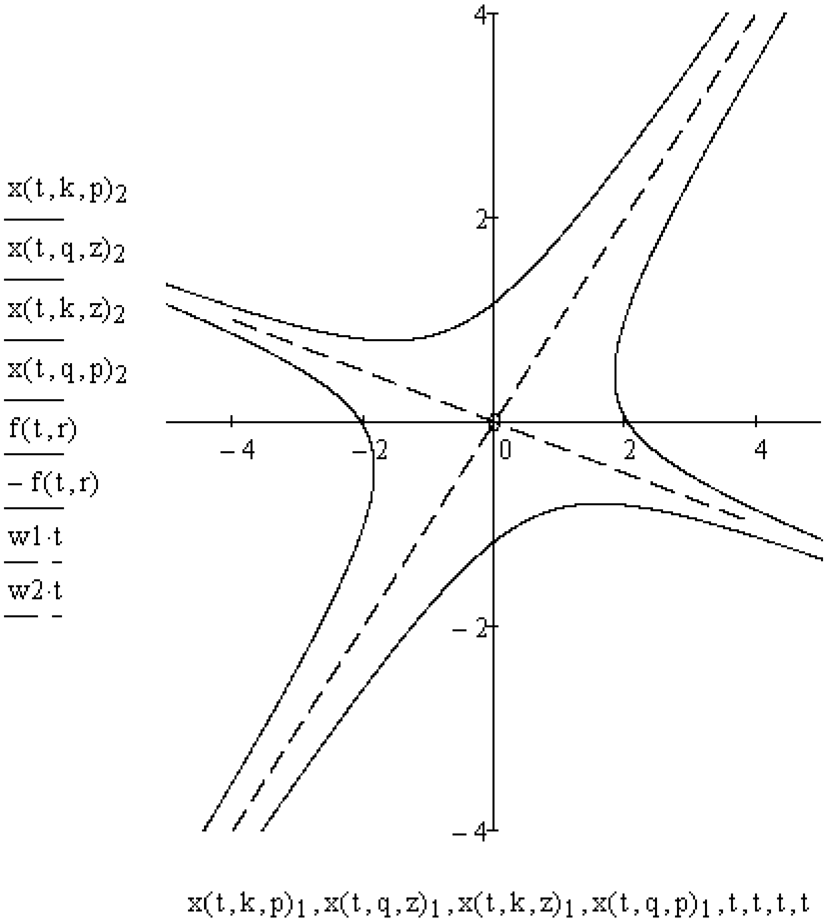
$$\mathrm{Find}(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad S := \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$x(t,C1,C2) := S\cdot\begin{pmatrix}y1(t,C1,C2)\\ y2(t,C1,C2)\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}C2\cdot e^{3\cdot t} - 4\cdot C1\cdot e^{-2\cdot t}\\ C1\cdot e^{-2\cdot t} + C2\cdot e^{3\cdot t}\end{pmatrix}$$

$a := -4 \qquad h := 0.001 \qquad b := 4 \qquad t := a, a+h .. b$

$$w1 := \lim_{t \to \infty} \frac{x(t, C1, C2)_2}{x(t, C1, C2)_1} \to 1$$

$$w2 := \lim_{t \to -\infty} \frac{x(t, C1, C2)_2}{x(t, C1, C2)_1} \to -\frac{1}{4}$$



MathCAD – мощная универсальная система компьютерной математики, созданная фирмой MathSoft в 1980-х гг. и пользующаяся большой популярностью, как у студентов различных специальностей, так и научных работников. Характерной особенностью пакета MathCAD является использование привычных стандартных математических обозначений: документ на экране выглядит точно так же, как обычный математический расчет. Пакет ориентирован в первую очередь на проведение численных расчетов, но имеет встроенный символьный процессор Maple, что позволяет выполнять аналитические преобразования. MathCAD является средой визуального программирования и не требует знания специального набора команд.

Отметим, что при решении рассмотренных в пособии задач по приведенным алгоритмам можно использовать в качестве СМК и другие системы: Mathematica, Maple, MatLab .