НАСЫЩЕННЫЕ ФОРМАЦИИ И ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.Ф. Васильев[1], Т.И. Васильева[2], Д.Н. Симоненко[2]

[1]Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь formation56@mail.ru
[2]Белорусский государственный университет транспорта
Кирова 34, 246653 Гомель, Беларусь tivasilyeva@mail.ru, dsimonenkon@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфизмов и подпрямых произведений, называется формацией.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация. Нахождение условий, при которых $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, где $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$, является классической задачей. Еще в 1938 году Фиттинг [1] доказал нильпотентность группы, являющейся произведением своих нормальных нильпотентных подгрупп. Этот результат послужил основой последующих многочисленных исследований по изучению формаций, замкнутых относительно произведений заданных $\mathfrak{F}$-подгрупп. В 1972 году Брайс и Косси [2] получили конструктивное описание всех разрешимых наследственных формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу G, представимую в произведение своих нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. В работе [4] Амберг, Л. С. Казарин, Хёфлинг нашли наследственные формации $\mathfrak{F}$, замкнутые относительно произведений произвольных $\mathfrak{F}$-подгрупп. В работах [5], [6] в классе всех разрешимых групп было получено описание нормально наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу $G = AB$, где A и B — абнормальные (контрнормальные, т.е. $A^G = G = B^G$) $\mathfrak{F}$-подгруппы в G.

В последние годы активно изучаются произведения групп, у которых факторы связаны определенными условиями перестановочности для подгрупп.

Согласно [7, с. 151] группа $G = AB$ называется произведением взаимно перестановочных подгрупп A и B, если A перестановочна с каждой подгруппой из B и B перестановочна с каждой подгруппой из A. Более того, если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B, то группа $G = AB$ называется произведением тотально перестановочных подгрупп A и B. В работе [8] Асаад и Шаалан показали, что группа $G = AB$, где A и B — тотально перестановочные сверхразрешимые подгруппы G, сама является сверхразрешимой. Этот результат послужил основой исследований в [9], [10] (см. также [7]) по нахождению формаций $\mathfrak{F}$, замкнутых относительно произведений тотально перестановочных подгрупп. Отметим следующий результат из [10].

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, содержащая класс всех сверхразрешимых групп. Тогда $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, где A и B — тотально перестановочные сверхразрешимые подгруппы группы G.

Для краткости формулировок введем

Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{F}$ назовем MP-замкнутым в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB$, где A и B — взаимно перестановочные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G.

Пустой класс будем считать MP-замкнутым в любом классе $\mathfrak{X}$.

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп, класс $\mathfrak{F}$ будем называть MP-замкнутым. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп, то $\mathfrak{F}$ будем называть разрешимым MP-замкнутым классом.

Известно немного примеров формаций, замкнутых относительно взятия взаимно перестановочных произведений подгрупп (см. [7]). В частности, MP-замкнутыми являются формации всех π-групп, формации всех разрешимых π-групп, формации всех дисперсивных по Оре групп и некоторые др.

Возникает следующая

Проблема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация (класс Фиттинга, класс Шунка) и $\mathfrak{X}$ — класс групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Для данного класса $\mathfrak{X}$ описать все формации (классы Фиттинга, классы Шунка) $\mathfrak{F}$, MP-замкнутые в $\mathfrak{X}$.*

В настоящем сообщении данная проблема исследуется в случае, когда $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, а $\mathfrak{X}$ — класс всех групп.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Многие классические формации являются насыщенными, например, формации всех нильпотентных, всех сверхразрешимых, всех разрешимых групп и др. Гашюц [11] ввел понятие локальной формации, которое позволяет конструировать насыщенные формации. Согласно известной теореме Любезедер-Шмида семейства всех насыщенных и всех локальных формаций совпадают (см. [12, гл. IV]).

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые π-группы для $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, и F — максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является MP-замкнутой тогда и только тогда, когда формация $F(p)$ MP-замкнута для любого простого p.*

Из теоремы получается следующий известный результат (см. [7, с. 162]).

Следствие 1. *Пусть группа $G = AB$ — произведение попарно перестановочных подгрупп A и B. Если A и B дисперсивны по Оре, то G дисперсивна по Оре.*

В работе [13] В. С. Монахов исследовал класс всех групп, у которых любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой. Им было показано, что такой класс является насыщенной наследственной формацией Фиттинга, содержащей все сверхразрешимые группы.

Следствие 2. *Пусть группа $G = AB$ — произведение попарно перестановочных подгрупп A и B. Если в A и B любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, то любая подгруппа Шмидта группы G сверхразрешима.*

Отсюда вытекает следующий хорошо известный результат.

Следствие 3. *Если группа $G = AB$ — произведение попарно перестановочных нильпотентных подгрупп A и B, то G сверхразрешима.*

Литература

1. Fitting H. *Beiträge zur Theorie der endlichen Gruppen* // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1938. Bd. 48. S. 77–141.

2. Bryce R. A., Cossey J. *Fitting formations of finite soluble groups* // Math. Z. 1972. Bd. 127, № 3. P. 217–233.

3. Hawkes T. O. *On Fitting formations* // Math. Z. 1970. V. 117, № 1–4. P. 177–182.

4. Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б. *Конечные группы с кратными факторизациями* // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4, Вып. 4. С. 1251–1263.

5. Васильев, А. Ф. *Об абнормально факторизуемых конечных разрешимых группах* // Украинский матем. журн. 2002. Т. 54, № 9. С. 1163–1171.

6. Vasil'ev A. F. *On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups* // Acta Applicandae Mathematicae. 2005. V. 85, № 1. P. 305–311.

7. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. *Products of Finite Groups.* Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2010.

8. Asaad M., Shaalan A. *On the supersolubility of finite groups* // Arch. Math. 1989. V. 53, № 4. P. 318–326.

9. Maier R. *A completeness property of certain formations*// Bull. London Math. Soc. 1992. V. 24. P. 540–544.

10. Ballester-Bolinches A., Pérez-Ramos M. D. *A question of R. Maier concerning formations* // J. Algebra. 1996. V. 182. P. 738–747.

11. Gaschütz W. *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen* // Math. Z. 1963. Bd. 80, № 4. S. 300–305.

12. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

13. Монахов В. С. *О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта* // Матем. заметки. 1995. Т. 58. Вып. 5. С. 717–722.