О СВОЙСТВАХ ПРЕДЕЛЬНОСТИ И Г-ПРЕДЕЛЬНОСТИ КЛАССОВ ВОЗМУЩЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Е.К. Макаров

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
jcm@im.bas-net.by

Рассмотрим возмущенную линейную дифференциальную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными ограниченными матрицами коэффициентов A и возмущений Q. Матрицу Коши системы (1) обозначим через X_{A+Q}, а для ее старшего показателя системы будем использовать обозначение $\lambda_n(A+Q)$.

Задача отыскания величин $\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}\}$ для различных классов возмущений $\mathfrak{M}$ — одна из важных задач теории характеристических показателей Ляпунова [1, с. 157; 2, с. 46]. Во многих случаях для величины $\Lambda(\mathfrak{M})$ может быть построен алгоритм, аналогичный алгоритму вычисления сигма-показателя [2, с. 214]. В некоторых других случаях имеют место формулы, сходные с формулами для вычисления центрального [1, с. 99] и экспоненциального [2, с. 57] показателя.

В работе [3] для совокупности $\mathfrak{M}_0[\theta]$ всех возмущений, удовлетворяющих оценке $\|Q(t)\| \leqslant N_Q e^{-\sigma\theta(t)}$, в которой $N_Q \geqslant 0$, $\sigma > 0$ — числа, зависящие от Q, а $\theta : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ — фиксированная монотонно возрастающая к $+\infty$ кусочно-непрерывная функция такая, что $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\theta(t) < +\infty$, сообщается о доказательстве равенства

$$\Lambda(\mathfrak{M}_0[\theta]) = \lim_{\delta\to+0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{T_k(\delta)} \sum_{j=0}^{k} \ln \|X_A(T_{j+1}(\delta), T_j(\delta))\|, \tag{2}$$

где последовательность моментов времени $T_j(\delta)$, $j \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, определена рекуррентной формулой $T_{j+1}(\delta) = T_j(\delta) + \delta\theta(T_j(\delta))$, $T_0(\delta) \geqslant 0$. Классы возмущений $\mathfrak{M}$, для которых величина $\Lambda(\mathfrak{M})$ имеет представление вида (2), в [3] названы предельными.

Для произвольного множества S и всякого $n \in \mathbb{N}$ через $S^{n\times n}$ обозначим множество всех $n \times n$-матриц с элементами из S. Через $\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$ обозначим линейное пространство всех ограниченных кусочно-непрерывных матриц-функций, определенных при $t \geqslant 0$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^{n\times n}$. Строго положительной будем называть такую функцию $\gamma \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, что $\gamma(t) > 0$ при всех $t \geqslant 0$ и все ее односторонние пределы в точках ее разрыва также положительны.

Следуя [4], под одномерным классом малости будем понимать произвольное собственное линейное подпространство $\mathfrak{s} \subset \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, содержащее хотя бы одну строго положительную функцию и удовлетворяющее условию: если $\beta \in \mathfrak{s}$, то и все функции $\varphi \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, такие что $|\varphi(t)| \leqslant |\beta(t)|$ при всех $t \geqslant 0$, принадлежат $\mathfrak{s}$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ под классом малости размерности $n \times n$, соответствующим одномерному классу $\mathfrak{s}$, будем понимать множество матриц $\mathfrak{s}^{n\times n}$. Системой образующих для одномерного класса $\mathfrak{s}$ будем называть подмножество $\mathcal{K} \subset \mathfrak{s}$, состоящее из строго положительных функций и позволяющее для любого $\beta \in \mathfrak{s}$ найти $\varphi \in \mathcal{K}$ такое, что $|\beta| \leqslant C\varphi$ при некотором $C > 0$, зависящем от φ и β.

Через $\mathbb{T}_0$ обозначим множество последовательностей моментов времени $t_k \geqslant 1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, монотонно возрастающих к $+\infty$ и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k^{-1} t_{k+1} = 1$

медленного роста, а также условию $\lim\limits_{k\to+\infty}(t_{k+1}-t_k)=+\infty$. Для любых $\beta\in\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, $N\geqslant 0$ и $\tau\in\mathbb{T}_0$ положим

$$\Omega(A,\tau)=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\sum_{i=0}^{k}\ln\|X_A(t_{i+1},t_i)\|,\quad \Delta_N(\beta,\tau)=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{t_k}\int\limits_{t_0}^{t_k}K_N^\tau(s)\beta(s)\,ds,$$

где $t_k=\tau(k)$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $K_N^\tau(s)=e^{N(s-t_k)}$ при $s\in]t_k,t_{k+1}]$, $K_N^\tau(s)=0$ при $s\leqslant t_0$. Если же функция $\beta\in\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ строго положительна, то дополнительно введем обозначение

$$\gamma(\beta,\tau)=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\sum_{i=0}^{k}\ln\frac{2}{\sin\varphi_i},\quad \varphi_i=\min\left\{\frac{\pi}{2},e^{-2N_A}\int\limits_{t_i-1}^{t_i}\beta(s)\,ds\right\};$$

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{s}^{n\times n}$ — некоторый класс малости возмущений и $\mathcal{K}$ — система образующих соответствующего ему одномерного класса $\mathfrak{s}$. Если существует множество $\Gamma\subset\mathbb{T}_0$ такое, что для любой последовательности $\tau\in\Gamma$ выполнено равенство $\inf\limits_{\beta\in\mathcal{K}}\gamma(\beta,\tau)=0$ и для всякого $\beta\in\mathcal{K}$ при любом $M>0$ найдется последовательность $\tau\in\Gamma$, удовлетворяющая условию $\Delta_M(\beta,\tau)=0$, то $\Lambda(\mathfrak{M})=\sup\limits_{\beta\in\mathcal{K}}\sup\limits_{M>0}\inf\limits_{\tau\in\mathcal{R}_M^\beta}\Omega(A,\tau)=$ $=\sup\limits_{\tau\in\Gamma}\Omega(A,\tau)$, где $\mathcal{R}_M^\beta=\{\tau\in\Gamma:\Delta_M(\beta,\tau)=0\}$.*

Определение 1. Произвольный класс малости $\mathfrak{M}$ будем называть Γ-предельным, если существует множество $\Gamma\subset\mathbb{T}$ такое, что равенство

$$\Lambda(\mathfrak{M})=\sup_{\tau\in\Gamma}\Omega(A,\tau)$$

справедливо для любой системы (1).

Определение 2. Одномерный класс малости $\mathfrak{s}$ будем называть радикальным, если вместе с каждым своим элементом β множество $\mathfrak{s}$ содержит и все его степени β^ε, $\varepsilon\in]0,1]$.

Теорема 2. *Если одномерный класс малости $\mathfrak{s}$ является радикальным, состоит из функций, стремящихся к нулю на бесконечности, и имеет систему образующих $\mathcal{K}$, каждый элемент β которой является непрерывной функцией, имеющей точный нулевой показатель Ляпунова и удовлетворяющей при некотором $C_\beta>0$ и всех достаточно больших t условию*

$$\int\limits_{t-1}^{t}\ln\beta(s)\,ds\geqslant C_\beta\ln\beta(t),$$

то при любом $n\in\mathbb{N}$ класс малости $\mathfrak{M}=\mathfrak{s}^{n\times n}$ является Γ-предельным.

Аналогичные теоремы справедливы и для классов возмущений бесконечно малых в среднем с положительным весом.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, договор № Ф14Р-011.

Литература

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.

3. Барабанов Е. А. *О крайних показателях Ляпунова линейных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях* // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 357.

4. Макаров Е. К. *Аксиоматическое представление классов малости возмущений коэффициентов линейных дифференциальных систем* // Вестн. Удмуртского гос. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 1. С. 46–57.