$$-\int_0^t \Delta_x\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t-s,x-\xi)\left(\int_{\mathbb{R}^d} b(s,\xi,u(\alpha(s)),\zeta)\,d\zeta\right)d\xi\right)ds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t-s,x-\xi)f(s,u(\alpha(s)),\xi)\,d\xi\,ds+$$

$$+\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t-s,x-\xi)\sigma(s,u(\alpha(s)),\xi)e_n(\xi)\,d\xi\right)d\beta_n(s).$$

Для данного оператора доказано, что $\Psi(\mathfrak{B}_{2,T,\rho}) \in \mathfrak{B}_{2,T,\rho}$, и выведено условие сжатия вида

$$\|\Psi(u)-\Psi(v)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T,\rho}} \leqslant 4\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{l^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi\right)\rho(x)\,dx+\right.$$

$$+d^2C^2\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{d\xi}{|x-\xi|^{d+1-2\mu}}\right)^2\frac{T^{2-2\mu}}{(1-\mu)^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\rho(x)\,dx\right)\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\varphi^2(t,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta+L^2C_\rho(T)T^2+$$

$$\left.+L^2c^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)C_\rho(T)T\right)\|u-v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T,\rho}},\quad \frac{1}{2}<\mu<1,\quad C=\mathrm{const},$$

которое означает, что этот оператор, определенный в банаховом пространстве $\mathfrak{B}_{2,T,\rho}$, имеет единственную неподвижную точку — решение $u \in \mathfrak{B}_{2,T,\rho}$ уравнения $\Psi(u)=u$, которое, очевидно, представимо в так называемой «мягкой» форме (1) и удовлетворяет условиям (2), (3) — т. е. мягкое решение из пространства $\mathfrak{B}_{2,T,\rho}$ рассматриваемой задачи Коши.

Литература

1. Samoilenko A. M., Mahmudov N. I., Stanzhitskii A. N. *Existance, Uniqueness and Controllability Results for Neutral FSDEs in Hilbert Spaces* // Dynamic Systems and Applications. 2008. V. 17. P. 53–70.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

О.Л. Яблонский

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь

yablonski@bsu.by

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\mathrm{d}X(t)=f(X(t))\,\mathrm{d}L(t),\quad t\in T, \tag{1}$$

с начальным условием $X(0)=x^0$, где L — квадратично интегрируемый процесс Леви.

В докладе будет изучается уравнение (1) в алгебре обобщенных случайных процессов (см., например, [1]). Согласно такому подходу уравнению (1) ставится в соответствие задача Коши следующего вида

$$\mathrm{d}_{\widetilde{h}}\widetilde{X}(\widetilde{t})=\widetilde{f}(\widetilde{X}(\widetilde{t}))\,\mathrm{d}_{\widetilde{h}}\widetilde{L}(\widetilde{t}),\quad \widetilde{X}(\widetilde{t})|_{[\widetilde{0},\widetilde{h})}=\widetilde{X}^0(\widetilde{t}). \tag{2}$$

Переписав задачу (2) при помощи представителей обобщенных процессов получим следующую конечно-разностную задачу

$$X_n(t+h_n)-X_n(t)=f_n(X_n(t))(L_n(t+h_n)-L_n(t)),\quad X_n|_{t\in[0,h_n)}=X_n^0. \tag{3}$$

В настоящей работе считаем, что

$$L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int\limits_0^{1/n} L(t+s)\rho_n(s)\,\mathrm{d}s, \quad f_n(x) = (f * \overline{\rho}_n)(x),$$

где $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_n \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\rho_n \subseteq [0;1/n]$, $\int_0^{1/n} \rho_n(s)\,\mathrm{d}s = 1$.

Заметим, что существуют и другие способы задания последовательности L_n, однако они будут задавать, вообще говоря, другой обобщенный случайный процесс, чем определяемый выше. Это означает, что уравнению (1) соответствует не единственная задача (2) в зависимости от выбора обобщенного случайного процесса $\widetilde{L}$. Задание $\widetilde{L}$ определяет класс эквивалентных последовательностей процессов с гладкими траекториями L_n. При этом последующие результаты не зависят от конкретной последовательности из этого класса (представителя данного класса).

В докладе найдены условия при которых мнемопроцесс $\widetilde{X}$ ассоциирует обычный случайный процесс, т. е. исследовано предельное поведение последовательности решений задачи (3) при помощи стохастического исчисления вариаций, развитого в работе [2].

Обозначим через $(\mathcal{F})_{t\in T}$ фильтрацию, порожденную процессом L, а через $\mathbb{D}^{1,p}$ класс случайных величин, имеющих производную Маллявэна интегрируемую в степени $p \geqslant 1$ (см. [2]). Положим

$$F_n(x) = \int\limits_x^{x+1/n} \rho_n(s)\,\mathrm{d}s, \quad F_n^{-1}(u) = \sup\{x : F_n(x) \geqslant u\}.$$

Теорема. *Пусть функция* $f \in C_B^2(\mathbb{R})$ *и* L *— квадратично интегрируемый процесс Леви на отрезке* $T = [0,a]$. *Начальные условия* $X_n^0(t)$ *задачи* (3) *являются* $\mathcal{F}_{t+1/n}$*-измеримыми и лежат в* $\mathbb{D}^{1,p}$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$ *и* $t \in [0,h_n)$. *Предположим, что неубывающая функция* $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ *такая, что для всех ее точек непрерывности* $u \in [0,1]$ *и всех* $\delta \in (0,1)$ $F_n(F_n^{-1}(u) - \delta h_n) \to \sigma(u)$ *при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$. *Кроме того пусть* $\sup\limits_{t\in[0;h_n)} \mathsf{E}|X_n^0(t) - x^0|^2 \to 0$ *и*

$$\frac{1}{n^2 h_n^2}\Bigg(\int\limits_T (F_n(s-h_n) - F_n(s))^2\,\mathrm{d}s\Bigg)^{1/2} \to 0.$$

Тогда X_n *сходится в* $L^2(T\times\Omega)$.

В докладе будет выписан явный вид для предела X_n, кроме того будут затронуты вопросы существования производной Маллявэна для решений некоторых стохастических дифференциальных уравнений содержащих процессы Леви.

Литература

1. Лазакович Н. В. *Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов* // Докл. Акад. наук Беларуси. 1994. Т. 38. № 5. С. 17–22.

2. Yablonski, A. L. *The calculus of variations for processes with independent increments* // Rocky Mountain J. of Mathematics. 2008. Vol. 38. № 2. P. 669–701.