

## О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О ПРЕДЕЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ЗАСТОЙНЫХ ЗОН ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕФТИ ВОДОЙ

ВИДЯКИН В. В., ЕНТОВ В. М., ТАРАНЧУК В. Б.

Методами теории потенциала построено и анализируется решение задачи определения предельно-равновесных целиков остаточной вязкопластической нефти при вытеснении ее водой из пористого пласта в многоскважинной системе. Для некоторых асимптотических случаев приведены результаты сравнения с эталонным точным решением.

1. Рассматривается плоская задача изотермического вытеснения вязкопластической нефти водой в однородном недеформируемом пористом пласте. Пусть в области фильтрации имеются источник и сток равной интенсивности  $Q$ , расположенные на расстоянии  $2a$  друг от друга. Предположим, что в результате длительного вытеснения нефти водой образуется целик, занимающий внешность некоторого замкнутого кусочно-гладкого контура  $\Gamma$ , внутри которого расположены источник и сток. Эта постановка приводит к следующей краевой задаче для давления  $p$  (см., например, [1]):

$$\Delta p = 0 \tag{1.1}$$

$$\Gamma: \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \left| \frac{\partial p}{\partial s} \right| = G$$

Здесь  $G$  — предельный градиент давления для вязкопластической нефти, условия на контуре  $\Gamma$  сформулированы для нормальной и касательной производных.

2. Рассматриваемая задача (1.1) может быть решена методами теории аналитических функций [2, 3]. Приведем другой способ решения. По аналогии с [4, 5] искомое решение ищется в виде суперпозиции потенциала пары источник — сток  $\varphi(x, y)$  и потенциала простого слоя с плотностью  $\nu(\sigma)$ , сосредоточенного на контуре  $\Gamma$

$$p(x, y) = \varphi(x, y) + \int_{\Gamma} \nu(\sigma) \ln R^{-1} d\sigma$$

$$\varphi(x, y) = \frac{D}{4} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 - y^2}, \quad D = \frac{Q\mu}{\pi k}$$

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2, \quad (\xi, \eta) \in \Gamma$$

Здесь  $\sigma$  — дуговая абсцисса точки  $(\xi, \eta)$ ,  $k$  — проницаемость пласта,  $\mu$  — вязкость воды.

Граничные условия в (1.1) приводят к системе нелинейных интегродифференциальных уравнений для отыскания плотности  $\nu(\sigma)$  и формы контура  $\Gamma$

$$(\beta - 2\pi)\nu + \int_{\Gamma} \nu(\sigma) \frac{\partial}{\partial n} (\ln R^{-1}) d\sigma + \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{2.1}$$

$$\left| \int_{\Gamma} \nu(\sigma) \frac{\partial}{\partial s} (\ln R^{-1}) d\sigma + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right| = G$$

где  $\beta$  — угол между касательными в угловых точках контура  $\Gamma$ , для остальных точек  $\beta = \pi$ . Перейдем в системе (2.1) к полярным координатам  $r, \theta$ , считая контур заданным уравнением  $r = g(\theta)$

$$(\beta - 2\pi)\nu(\theta) + \int_0^{2\pi} \nu(\alpha) N(\alpha, \theta) d\alpha + \Phi(\theta) = 0 \tag{2.2}$$

$$\left| \int_0^{2\pi} \nu(\alpha) K(\alpha, \theta) d\alpha + \Psi(\theta) \right| = G [g^2(\theta) + g'^2(\theta)]^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
N(\alpha, \theta) &= [g^2(\theta) - g(\theta)c_1(\alpha, \theta) - g'(\theta)c_2(\alpha, \theta)]\chi \\
K(\alpha, \theta) &= [g'(\theta)g(\theta) - g'(\theta)c_1(\alpha, \theta) + g(\theta)c_2(\alpha, \theta)]\chi \\
c_1(\alpha, \theta) &= g(\alpha)\cos(\theta - \alpha), \quad c_2(\alpha, \theta) = c_1(\alpha, \theta)\operatorname{tg}(\theta - \alpha) \\
\chi &= [g^2(\theta) - 2g(\theta)c_1(\alpha, \theta) + g^2(\alpha)]^{-1} \\
\Phi(\theta) &= c(\theta)[g(\theta)c_3(\theta) + g'(\theta)c_4(\theta)], \quad \Psi(\theta) = c(\theta)[g'(\theta)c_3(\theta) - g(\theta)c_4(\theta)] \\
c_3(\theta) &= (a^2 - g^2(\theta))\cos\theta, \quad c_4(\theta) = (a^2 + g^2(\theta))\sin\theta \\
c(\theta) &= Da[a^4 - 2a^2g^2(\theta)\cos 2\theta + g^4(\theta)]^{-1}
\end{aligned}$$

Система (2.2) может быть решена численно, путем сведения ее к аппроксимирующей, при получении которой производные и интегралы заменяются соответственно конечными разностями и суммами [6]. Характер особенностей ядер  $N(\alpha, \theta)$ ,  $K(\alpha, \theta)$  исследован в [4]. Аппроксимирующая нелинейная система алгебраических уравнений может быть решена, например, каким-либо итерационным методом. При этом, как показали проведенные расчеты, требуется производить большой объем вычислений, а сходимость существенно зависит от начального приближения.

Для преодоления указанных трудностей решение системы (2.2) ищется в виде

$$\delta(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(\theta) \varepsilon^i, \quad \rho(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(\theta) \varepsilon^i \tag{2.3}$$

$$\delta(\theta) = v(\theta)/G, \quad \rho(\theta) = \sqrt{G(aD)^{-1}}g(\theta), \quad \varepsilon = D(aG)^{-1}$$

где  $\delta$ ,  $\rho$ ,  $\varepsilon$  — безразмерные параметры,  $\varepsilon \ll 1$ . Тогда имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
(\beta - 2\pi)\delta_n(\theta) + \int_0^{2\pi} \sum_{i,j}^{i+j=n} \delta_i(\alpha) N_j(\alpha, \theta) d\alpha &= \Phi_n(\theta) \\
\int_0^{2\pi} \sum_{i,j}^{i+j=n} \delta_i(\alpha) K_j(\alpha, \theta) d\alpha &= \Psi_n(\theta) \\
n &= 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где  $N_j$ ,  $K_j$ ,  $\Phi_n$ ,  $\Psi_n$  — коэффициенты разложений в ряд по степеням  $\varepsilon$  соответствующих членов системы.

3. Для  $n=0$  система (2.4) допускает элементарное решение, соответствующее диполю в начале координат, которое может быть получено методом Кирхгофа [2]. Уравнение границы застойной зоны имеет вид

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sqrt{\frac{Da}{G}} \left( \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3t}{2} \right) \\
y(t) &= \sqrt{\frac{Da}{G}} \left( \sin \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \sin \frac{3t}{2} \right), \quad 0 \leq t \leq 4\pi
\end{aligned}$$

Для определения  $\delta_0(\theta)$  при известном  $\rho_0(\theta)$  используется одно из уравнений системы, в которой ядра  $N_0(\alpha, \theta)$ ,  $K_0(\alpha, \theta)$  совпадают с  $N(\alpha, \theta)$ ,  $K(\alpha, \theta)$ , если положить  $g = \rho_0$ .

При  $n=1$  имеем систему (2.4) для определения неизвестных  $\delta_1(\theta)$ ,  $\rho_1(\theta)$ , где

$$\begin{aligned}
N_1(\alpha, \theta) &= [2z(\theta) - z_1(\theta, \alpha) - z_2(\theta, \alpha) - 2N_0(\alpha, \theta)z_5(\theta, \alpha)]\chi_0 \\
K_1(\alpha, \theta) &= -[z'(\theta) - z_3(\theta, \alpha) + z_4(\theta, \alpha) + 2K_0(\alpha, \theta)z_5(\theta, \alpha)]\chi_0 \\
\chi_0 &= [\rho_0^2(\theta) - 2\rho_0(\theta)\rho_0(\alpha)\cos(\theta - \alpha) + \rho_0^2(\alpha)]^{-1} \\
z(\theta) &= \rho_0(\theta)\rho_1(\theta), \quad z_1(\theta, \alpha) = [\rho_1(\theta)\rho_0(\alpha) + \rho_0(\theta)\rho_1(\alpha)]\cos(\theta - \alpha) \\
z_2(\theta, \alpha) &= [\rho_1'(\theta)\rho_0(\alpha) + \rho_0'(\theta)\rho_1(\alpha)]\sin(\theta - \alpha), \quad z_3(\theta, \alpha) = z_2(\theta, \alpha)\operatorname{ctg}(\theta - \alpha) \\
z_4(\theta, \alpha) &= [\rho_0(\theta)\rho_1(\alpha) + \rho_0(\alpha)\rho_1(\theta)]\sin(\theta - \alpha), \quad z_5(\theta, \alpha) = z_0 + z(\alpha) - z_1(\theta, \alpha)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\Phi_1(\theta) = - \left\{ \frac{\sin\theta}{\rho_0^2(\theta)} \rho_1(\theta) + \frac{e_1(\theta) - 2e_2(\theta)}{\rho_0^3(\theta)} \rho_1'(\theta) + \right.$$

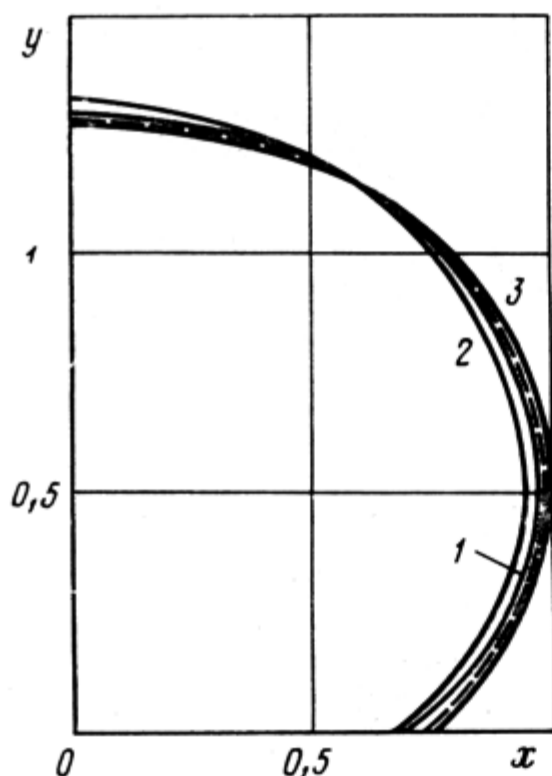
$$+ (e_1(\theta) + e_2(\theta) + 2 \cos 2\theta [e_2(\theta) - e_1(\theta)]) \rho_0^{-4}(\theta) \}$$

$$\Psi_1(\theta) = [\rho_0(\theta) e_3(\theta) + \rho_0^{-3}(\theta) (e_4(\theta) + 2e_5'(\theta))] \rho_1(\theta) + [\rho_0'(\theta) e_3(\theta) - \rho_0^{-2}(\theta) \cos \theta] \rho_1'(\theta) + (e_5(\theta) - e_4(\theta) - 2 \cos 2\theta [e_5(\theta) + e_4(\theta)]) \rho_0^{-4}(\theta)$$

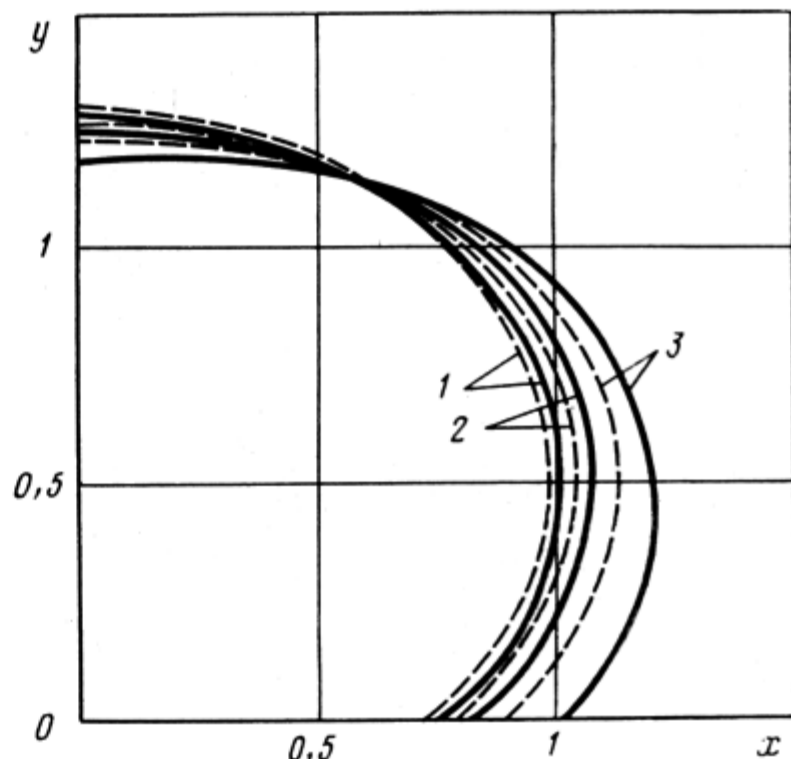
$$e_1(\theta) = \rho_0(\theta) \cos \theta, \quad e_2(\theta) = \rho_0'(\theta) \sin \theta, \quad e_3(\theta) = [\rho_0^2(\theta) + \rho_0'^2(\theta)]^{-1/2}$$

$$e_4(\theta) = \rho_0(\theta) \sin \theta, \quad e_5(\theta) = \rho_0'(\theta) \cos \theta$$

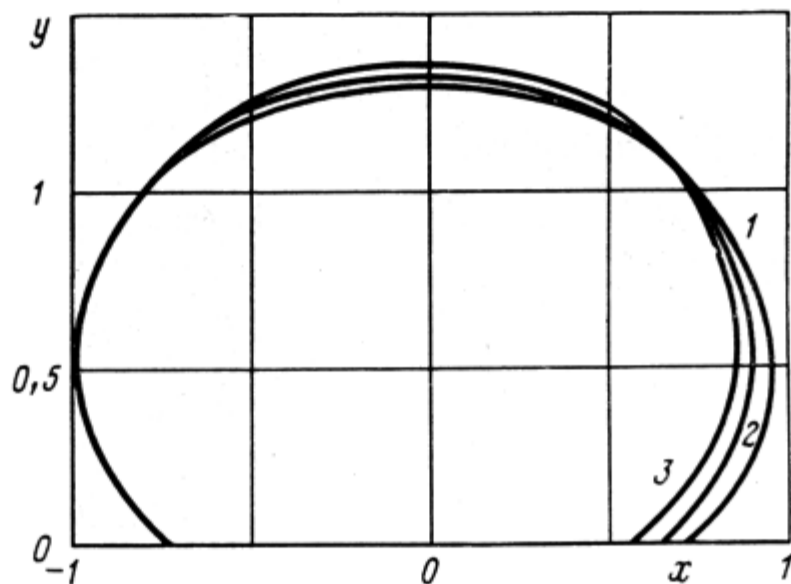
Проводя аналогичные выкладки, вообще говоря, можно записать соответствующие системы для  $n=2, 3, \dots$ . Заметим, что для любого  $n$  из (2.4) получается система линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений. Однако объем выкла-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

док при определении последующих возмущений возрастает, а вносимая поправка при малых  $\varepsilon$  не существенна.

4. Для апробации изложенного метода были проведены методические расчеты с целью изучения сходимости получаемых приближенных решений и сопоставления с точным аналитическим решением [2]. Некоторые результаты вычислений представлены на фиг. 1, 2, где в безразмерных переменных показаны границы предельно равновесных целиков. На фиг. 1 для  $\varepsilon=0,1$  показаны эталонное аналитическое решение (штриховая линия), приближенные решения систем (2.2) (кривая 1) и (2.4) при  $n=0$  и 1 (кривые 2 и 3). При расчете приближенных решений суммирующие – разностный аналог исходных систем строился по аналогии с [4]. Решение нелинейной системы, аппроксимирующей (2.2), рассчитывалось итерационным методом Стеффенсена. Решение линейных систем, аппроксимирующих (2.4) при  $n=0$  и 1, получены методом исключения. Кривая 2 иллюстрирует зависимость  $\rho = \rho_0(\theta)$ , кривая 3 –  $\rho^*(\theta) = \rho_0(\theta) + \varepsilon \rho_1(\theta)$ , где при вычислении  $\rho_1(\theta)$  использовались (3.1) На фиг. 2 приведены решения  $\rho^*(\theta)$  для  $\varepsilon=0,1; 0,2; 0,4$  (кривые 1–3). Соответствующие ана-

литические решения [2] изображены штриховыми линиями. Из графиков видно, что для малых значений  $\varepsilon$  ( $\varepsilon < 0,2$ ) достаточно ограничиться первыми двумя членами ряда (2.5). При этом затраты машинного времени на получение таких решений оказываются на порядок меньше, чем для расчета решений системы (2.2).

5. Укажем на возможность применения описанного метода к решению задач с более сложной геометрией. Пусть в области фильтрации имеются  $m$  источников и  $l$  стоков заданной интенсивности  $Q_i$ , имеющих координаты  $(g_i, \alpha_i)$   $i=1, 2, \dots, m+l$ , расположенных таким образом, что через достаточно длительный промежуток времени образуется только один целик, занимающий внешность замкнутого контура  $\Gamma$ . Решение этой задачи также сводится к решению системы (2.3), (2.4), где, сохранив прежние обозначения, следует положить

$$\Phi(\theta) = \frac{\mu}{2\pi k} \sum_{i=1}^{m+l} Q_i \frac{g^2(\theta) - g(\theta)g_i \cos(\theta - \alpha_i) - g'(\theta)g_i \sin(\theta - \alpha_i)}{g^2(\theta) - 2g(\theta)g_i \cos(\theta - \alpha_i) + g_i^2}$$

$$\Psi(\theta) = \frac{\mu}{2\pi k} \sum_{i=1}^{m+l} Q_i \frac{g(\theta)g'(\theta) - g'(\theta)g_i \cos(\theta - \alpha_i) + g(\theta)g_i \sin(\theta - \alpha_i)}{g^2(\theta) - 2g(\theta)g_i \cos(\theta - \alpha_i) + g_i^2}$$

Если считать, что

$$\left| \sum_{i=1}^m Q_i \right| = \left| \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \right| = Q$$

а величины  $g_i - a$  ( $i=1, \dots, m$ ),  $g_i + a$  ( $i=m+1, \dots, m+l$ ) достаточно малы, то в качестве начального приближения для решения соответствующей аппроксимирующей системы можно использовать результаты, описанные в предыдущих разделах.

Приведем численные решения для случая  $m=2$ ,  $l=1$ . На фиг. 3 показаны границы предельно равновесных целиков в зависимости от безразмерного динамического параметра  $\tau = \pi k G b (Q\mu)^{-1}$ , где  $b$  — расстояние между источниками. При этом полагалось,  $Q_1 = Q_2 = Q/2$ ,  $Q_3 = -Q$ ,  $g_1 = g_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $g_3 = a$ ,  $\alpha_3 = \pi$ ,  $\alpha_1 = \arctg(b/a)$ ,  $\alpha_2 = -\alpha_1$ ,  $\varepsilon = 0,1$ . Кривые 1-3 соответствуют значениям  $\tau = 0; 0,03; 0,06$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
2. Алишаев М. Г. О стационарной фильтрации с начальным градиентом // Теория и практика добычи нефти. М.: Недра, 1968. С. 202-211.
3. Котляр Л. М., Скворцов Э. В. Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с начальным градиентом. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 141 с.
4. Данилов В. Л., Кац Р. М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде. М.: Недра, 1980. 264 с.
5. Ентов В. М., Малахова Т. А., Панков В. Н., Панько С. В. О расчете предельно-равновесных целиков при вытеснении вязкопластической нефти водой из слоисто-неоднородного пласта // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 113-121.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Минск  
Москва

Поступила в редакцию  
1.VII.1987

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

---

ИЗВЕСТИЯ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МЕХАНИКА  
ЖИДКОСТИ И ГАЗА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

---

МОСКВА · 1989