УДК 517.958:537.8(075.8)

В.Т. ЕРОФЕЕНКО, Ю.В. ПУЛКО

МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НА ДВИЖУЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЯХ*

Boundary conditions, including relativistic case, connecting tangential and normal components of electromagnetic fields on moving surfaces in conducting media were received. Different models of these conditions are considered specifically for the case when the velocity of the medium is far less than the velocity of light in vacuum and for the case when the velocity of light in the medium is commensurable with the velocity of the medium.

Граничные условия на поверхностях раздела существенно зависят от временного режима поля и материальной структуры приповерхностного слоя. Большинство публикаций в литературе связано с исследованием граничных условий на неподвижных поверхностях для полей с гармонической зависимостью от времени [1-3]. Имеются отдельные публикации по моделированию граничных условий для полей с произвольной зависимостью от времени [4]. Слабо разработаны граничные условия для движущихся сред [5]. Данная статья ставит своей целью анализ различных математических моделей граничных условий на движущихся поверхностях раздела проводящих сред на основе преобразования Лоренца, для которых классические граничные условия [6, 7] являются частным случаем.

1. Зависимость между полями в инерциальных системах координат. Рассмотрим евклидово пространство R_3 с фиксированной декартовой системой координат $O'x'y'z'$, заполненное однородной средой, имеющей следующие па-

* Авторы статьи - сотрудники кафедры математической физики.

раметры: ε_1 - диэлектрическая проницаемость, μ_1 - магнитная проницаемость, γ_1 - удельная электрическая проводимость. В пространство помещено однородное тело D с параметрами вещества: $\varepsilon_2,\ \mu_2,\ \gamma_2$. В точке $M(x',y',z')\in D$ в момент времени t' наблюдается электромагнитное поле $\mathbf{E}_2'=\mathbf{E}_2'(\mathbf{r}',\ t')$, $\mathbf{H}_2'=\mathbf{H}_2'(\mathbf{r}',\ t')$, $\mathbf{r}'=(x',\ y',\ z')$. В точке $M(x',\ y',\ z')\in R^3\setminus\bar{D}$ в момент времени t' в системе $O'x'y'z'$ наблюдается электромагнитное поле $\mathbf{E}_1'=\mathbf{E}_1'(\mathbf{r}',\ t')$, $\mathbf{H}_1'=\mathbf{H}_1'(\mathbf{r}',\ t')$. Параметры среды и вещества будем считать постоянными. Среда пространства R_3 и тело D неподвижны относительно друг друга. В этом случае поля $\mathbf{E}_i',\ \mathbf{H}_i'$, $i=1,\ 2$, удовлетворяют классическим уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot}'\mathbf{H}_i'=\varepsilon_i\frac{\partial\mathbf{E}_i'}{\partial t'}+\gamma_i\mathbf{E}_i',\quad \operatorname{rot}'\mathbf{E}_i'=-\mu_i\frac{\partial\mathbf{H}_i'}{\partial t'},\quad \operatorname{div}'\mu_i\mathbf{H}_i'=0,\quad \operatorname{div}'\varepsilon_i\mathbf{E}_i'=\rho_i'. \qquad (1)$$

Свяжем с наблюдателем систему координат *Oxyz,* относительно которой система координат $O'x'y'z'$ движется равномерно и прямолинейно вдоль постоянного вектора V со скоростью $V=|\mathbf{V}|,\ 0\le V<c,\ c$ - скорость света в вакууме. Поля $\mathbf{E}_1',\ \mathbf{H}_1',\ \mathbf{E}_2',\ \mathbf{H}_2'$, наблюдаемые из системы $O'x'y'z'$ в момент времени t', будем наблюдать из системы *Oxyz* в момент времени *t.* Эти поля обозначим: $\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_1(\mathbf{r},t)$, если $\mathbf{r}=(x,y,z)\in R^3\setminus D_8(t)$ и $\mathbf{E}_2=\mathbf{E}_2(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}_2=\mathbf{H}_2(\mathbf{r},t)$, если $\mathbf{r}=(x,y,z)\in D_8(t)$, где $D_8(t)$ - переменная область, занимаемая движущимся телом D в момент времени t и наблюдаемая из системы координат *Oxyz,* так как при движении тело деформируется. Поля в подвижной и неподвижной системах координат связаны между собой в соответствии с преобразованием Лоренца [8, с. 45]:

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}+(\sigma-1)(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathbf{v}-\sigma tV\mathbf{v},\quad t'=\sigma t-\sigma V(\mathbf{r},\mathbf{v})/c^2, \qquad (2)$$

где $\sigma=1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta=V/c$, $\mathbf{v}=\mathbf{V}/V$ - единичный вектор.

Поля $\mathbf{E}_i,\ \mathbf{H}_i,\ i=1,2$, в системе координат *Oxyz* удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_i=\frac{\partial\mathbf{D}_i}{\partial t}+\mathbf{J}_i,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}_i=-\frac{\partial\mathbf{B}_i}{\partial t},\quad \operatorname{div}\mathbf{B}_i=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{D}_i=\rho_i. \qquad (3)$$

Переходя с помощью линейного преобразования Лоренца (2) в уравнениях (3) от переменных *(x,y,z,t)* к новым переменным (x',y',z',t'), получим уравнения Максвелла (1). Отсюда следует, что материальные уравнения имеют вид [9, с. 75]:

$$\mathbf{D}_i=\varepsilon_i a_i\mathbf{E}_i+\varepsilon_i(1-a_i)(\mathbf{v},\mathbf{E}_i)\mathbf{v}-\tfrac{b_i}{V}[\mathbf{H}_i,\mathbf{v}],\ \mathbf{B}_i=\mu_i a_i\mathbf{H}_i+\mu_i(1-a_i)(\mathbf{v},\mathbf{H}_i)\mathbf{v}+\tfrac{b_i}{V}[\mathbf{E}_i,\mathbf{v}],$$

$$\mathbf{J}_i=\gamma_i a_i\sigma\mathbf{E}_i+\tfrac{\gamma_i}{\sigma}(1-\sigma^2a_i)(\mathbf{E}_i,\mathbf{v})\mathbf{v}-\gamma_i\mu_i a_i\sigma V[\mathbf{H}_i,\mathbf{v}]+V\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{D}_i,$$

где $a_i=(1-\beta^2)/(1-s_i^2)$, $b_i=(s_i^2-\beta^2)/(1-s_i^2)$, $s_i=V\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$, $a_i=1+b_i$, $i=1,2$

Отсюда получим связь между полями в инерциальных системах координат:

$$\mathbf{E}_i'(\mathbf{r}',t')=\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t)+(\sigma a_i-1)\big[\mathbf{v},[\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t),\mathbf{v}]\big]-\mu_i a_i\sigma V[\mathbf{H}_i(\mathbf{r},t),\mathbf{v}],\quad i=1,2, \qquad (4)$$

$$\mathbf{H}_i'(\mathbf{r}',t')=\mathbf{H}_i(\mathbf{r},t)+(\sigma a_i-1)\big[\mathbf{v},[\mathbf{H}_i(\mathbf{r},t),\mathbf{v}]\big]+\varepsilon_i a_i\sigma V[\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t),\mathbf{v}], \qquad (5)$$

где координаты $\mathbf{r}$, t определяются через $\mathbf{r}',\ t'$ с помощью обратного преобразования Лоренца

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}'+(\sigma-1)(\mathbf{r}',\mathbf{v})\mathbf{v}+\sigma t'V\mathbf{v},\quad t=\sigma t'+\sigma V(\mathbf{r},\mathbf{v})/c^2. \tag{6}$$

Исследуем модели граничных условий на поверхности Г, которая вместе со средами движется с одинаковой скоростью относительно системы координат $Oxyz$.

2. Граничные условия на границе раздела двух движущихся сред. В системе координат $O'x'y'z'$, где поверхность Г и среды неподвижны, выполняются классические граничные условия для тангенциальных и нормальных составляющих на границе раздела двух проводящих сред

$$[\mathbf{E}_1',\mathbf{n}']\big|_\Gamma=[\mathbf{E}_2',\mathbf{n}']\big|_\Gamma,\quad [\mathbf{H}_1',\mathbf{n}']\big|_\Gamma=[\mathbf{H}_2',\mathbf{n}']\big|_\Gamma, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\left\{\frac{\partial}{\partial t'}\left(\varepsilon_2(\mathbf{E}_2',\mathbf{n}')-\varepsilon_1(\mathbf{E}_1',\mathbf{n}')\right)+\gamma_2(\mathbf{E}_2',\mathbf{n}')-\gamma_1(\mathbf{E}_1',\mathbf{n}')\right\}\Big|_\Gamma=0,\\ \left\{\mu_2(\mathbf{H}_2',\mathbf{n}')-\mu_1(\mathbf{H}_1',\mathbf{n}')\right\}\Big|_\Gamma=0,\end{gathered} \tag{8}$$

где Г - поверхность тела D, $\mathbf{n}'$ - внешняя нормаль к поверхности тела.

Для непроводящих сред ($\gamma_i=0$) первое граничное условие (8) принимает вид

$$\left\{\varepsilon_2(\mathbf{E}_2',\mathbf{n}')-\varepsilon_1(\mathbf{E}_1',\mathbf{n}')\right\}\Big|_\Gamma=0, \tag{9}$$

если граничное условие (9) выполнено в начальный момент времени.

Преобразуем граничные условия (7) - (9) в граничные условия для векторов $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$. В первом уравнении (6) исключим временной параметр t' с помощью второго уравнения (6), получим $\mathbf{r}=\mathbf{r}'-q(\mathbf{r}',\mathbf{v})\mathbf{v}+\mathbf{V}t$, $q=\sigma\beta^2/(1+\sigma)$. Обозначим через Γ_δ деформированную поверхность Г, определив ее с помощью преобразования $\mathbf{r}=\mathbf{r}'-q(\mathbf{r}',\ \mathbf{v})\mathbf{v}$, $\mathbf{r}'\in\Gamma$. Если разрешить данное уравнение относительно $\mathbf{r}'$ и ввести на поверхности Γ_δ ортогональные координаты, то получим зависимость между нормалью $\mathbf{n}'$ к недеформированной поверхности Г, которая не обязательно единичная, и единичной нормалью п к деформированной поверхности Γ_δ в виде $\mathbf{n}'=\mathbf{n}+(\sigma-1)[\mathbf{v},[\mathbf{n},\mathbf{v}]]$.

Преобразуем граничные условия для тангенциальных (7) и нормальных составляющих (8) к подвижной относительно среды системе координат $Oxyz$, используя выражения (4), (5) для полей $\mathbf{E}_i'(\mathbf{r}',t')$, $\mathbf{H}_i'(\mathbf{r}',t')$, $i=1,2$, и выражение для нормали $\mathbf{n}'$. С учетом обратного преобразования Лоренца (6) вычислим производную $\dfrac{\partial u}{\partial t'}=\sigma\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sigma V(\operatorname{grad}(u),\mathbf{v})$, входящую в первое уравнение (8). Имеют место следующие граничные условия сопряжения на движущихся поверхностях раздела проводящих сред с учетом релятивистских эффектов.

Модель 1.

$$\begin{gathered}\{[a_2\mathbf{E}_2-a_1\mathbf{E}_1,\mathbf{n}]-(b_2\mathbf{E}_2-b_1\mathbf{E}_1,\ \mathbf{v})[\mathbf{v},\ \mathbf{n}]-(\sigma-1)V(\mathbf{v},\ \mathbf{n})[\mathbf{v},\ [\mu_2a_2\mathbf{H}_2-\mu_1a_1\mathbf{H}_1,\ \mathbf{v}]]-\\ -(\sigma-1)(a_2\mathbf{E}_2-a_1\mathbf{E}_1,[\mathbf{v},\ \mathbf{n}])\mathbf{v}-\sigma V[[\mu_2a_2\mathbf{H}_2-\mu_1a_1\mathbf{H}_1,\ \mathbf{v}],\ \mathbf{n}]\}\Big|_{\Gamma_\delta(t)}=0,\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\{[a_2\mathbf{H}_2-a_1\mathbf{H}_1,\ \mathbf{n}]-(b_2\mathbf{H}_2-b_1\mathbf{H}_1,\ \mathbf{v})[\mathbf{v},\ \mathbf{n}]-(\sigma-1)(a_2\mathbf{H}_2-a_1\mathbf{H}_1,\ [\mathbf{v},\ \mathbf{n}])\mathbf{v}+\\ +(\sigma-1)V(\mathbf{v},\ \mathbf{n})[\mathbf{v},\ [\varepsilon_2a_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1a_1\mathbf{E}_1,\ \mathbf{v}]]+\sigma V[[\varepsilon_2a_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1a_1\mathbf{E}_1,\ \mathbf{v}],\ \mathbf{n}]\}\Big|_{\Gamma_\delta(t)}=0;\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\{(f_2N_2(\mathbf{E}_2)-f_1N_1(\mathbf{E}_1),\ \mathbf{v})(\mathbf{v},\ \mathbf{n})-\sigma V(\mu_2a_2N_2(\mathbf{H}_2)-\mu_1a_1N_1(\mathbf{H}_1),\ [\mathbf{v},\ \mathbf{n}])+\\ +\sigma(a_2N_2(\mathbf{E}_2)-a_1N_1(\mathbf{E}_1),\ \mathbf{n})-\sigma V^2(\operatorname{grad}(\varepsilon_2\mu_2a_2\mathbf{H}_2-\varepsilon_1\mu_1a_1\mathbf{H}_1,\ [\mathbf{v},\ \mathbf{n}]),\ \mathbf{v})+\\ +\sigma V(\operatorname{grad}(\varepsilon_2a_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1a_1\mathbf{E}_1,\ \mathbf{n}),\ \mathbf{v})+V(\operatorname{grad}(\varepsilon_2f_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1f_1\mathbf{E}_1,\ \mathbf{v}),\ \mathbf{v})(\mathbf{v},\ \mathbf{n})\}\Big|_{\Gamma_\delta(t)}=0,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\left\{\left(\mu_2 f_2 \mathbf{H}_2-\mu_1 f_1 \mathbf{H}_1,\ \mathbf{v}\right)(\mathbf{v},\ \mathbf{n})+\sigma\left(\mu_2 a_2 \mathbf{H}_2-\mu_1 a_1 \mathbf{H}_1,\ \mathbf{n}\right)+\right. \\ \left.\left.+\sigma V\left(\varepsilon_2 \mu_2 a_2 \mathbf{E}_2-\varepsilon_1 \mu_1 a_1 \mathbf{E}_1,\ [\mathbf{v},\ \mathbf{n}]\right)\right\}\right|_{\Gamma_\delta(t)}=0,\end{gathered} \tag{13}$$

где $f_i=\dfrac{1}{\sigma}-\sigma a_i$, $N_i=\varepsilon_i \dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\gamma_i}{\sigma}$, $i=1,2$. ■

Условия (10), (11) являются основными граничными, а условия (12), (13) следуют из (10), (11) и уравнений (3).

Аналогично можно получить граничные условия для движущейся поверхности раздела непроводящих сред, при этом уравнения (10), (11) и (13) сохраняют вид, а граничное условие (12) с учетом выражения (9) принимает вид

$$\begin{gathered}\left\{\left(\varepsilon_2 f_2 \mathbf{E}_2-\varepsilon_1 f_1 \mathbf{E}_1,\ \mathbf{v}\right)(\mathbf{v},\ \mathbf{n})+\sigma\left(\varepsilon_2 a_2 \mathbf{E}_2-\varepsilon_1 a_1 \mathbf{E}_1,\ \mathbf{n}\right)-\right. \\ \left.\left.-\sigma V\left(\varepsilon_2 \mu_2 a_2 \mathbf{H}_2-\varepsilon_1 \mu_1 a_1 \mathbf{H}_1,[\mathbf{v},\ \mathbf{n}]\right)\right\}\right|_{\Gamma_\delta(t)}=0.\end{gathered} \tag{14}$$

3. Модели граничных условий для медленно движущихся сред. Рассмотрим случай, когда $V<<$ c, тогда можно положить $\beta^2 \approx 0$. Получим $\sigma \approx 1$, $a_i \approx g_i = 1/1-s_i^2$, $b_i \approx h_i = s_i^2/1-s_i^2$, $g_i = 1+h_i$, $N_i \approx P_i = \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}+\gamma_i$. Кроме того, поверхность больше не испытывает на себе деформации и задается уравнением $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{V}t$, $\mathbf{r}_0 \in \Gamma$, где Γ - расположение поверхности при $t = 0$. Обозначим движущуюся поверхность через $\Gamma(t)$, при этом $\mathbf{n}'=\mathbf{n}$. Тогда граничные условия (10)- (13) на движущихся поверхностях раздела проводящих сред при $\beta^2 \approx 0$ запишутся в следующем виде.

Модель 2.

$$\left.\left\{\left[g_2 \mathbf{E}_2-g_1 \mathbf{E}_1,\ \mathbf{n}\right]-\left(h_2 \mathbf{E}_2-h_1 \mathbf{E}_1,\ \mathbf{v}\right)[\mathbf{v},\ \mathbf{n}]-V\left[\left[\mu_2 g_2 \mathbf{H}_2-\mu_1 g_1 \mathbf{H}_1,\ \mathbf{v}\right],\ \mathbf{n}\right]\right\}\right|_{\Gamma(t)}=0, \tag{15}$$

$$\left.\left\{\left[g_2 \mathbf{H}_2-g_1 \mathbf{H}_1,\ \mathbf{n}\right]-\left(h_2 \mathbf{H}_2-h_1 \mathbf{H}_1,\ \mathbf{v}\right)[\mathbf{v},\ \mathbf{n}]+V\left[\left[\varepsilon_2 g_2 \mathbf{E}_2-\varepsilon_1 g_1 \mathbf{E}_1,\ \mathbf{v}\right],\ \mathbf{n}\right]\right\}\right|_{\Gamma(t)}=0; \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\left\{\left(g_2 P_2(\mathbf{E}_2)-g_1 P_1(\mathbf{E}_1),\ \mathbf{n}\right)-V\left(\mu_2 g_2 P_2(\mathbf{H}_2)-\mu_1 g_1 P_1(\mathbf{H}_1),\ [\mathbf{v},\ \mathbf{n}]\right)-\right. \\ -\left(h_2 P_2(\mathbf{E}_2)-h_1 P_1(\mathbf{E}_1),\ \mathbf{v}\right)(\mathbf{v},\ \mathbf{n})-V^2\left(\operatorname{grad}\left(\varepsilon_2 \mu_2 g_2 \mathbf{H}_2-\varepsilon_1 \mu_1 g_1 \mathbf{H}_1,\ [\mathbf{v},\ \mathbf{n}]\right),\ \mathbf{v}\right)- \\ \left.\left.-V\left(\operatorname{grad}\left(\varepsilon_2 h_2 \mathbf{E}_2-\varepsilon_1 h_1 \mathbf{E}_1,\ \mathbf{v}\right),\ \mathbf{v}\right)(\mathbf{v},\ \mathbf{n})+V\left(\operatorname{grad}\left(\varepsilon_2 g_2 \mathbf{E}_2-\varepsilon_1 g_1 \mathbf{E}_1,\ \mathbf{n}\right),\ \mathbf{v}\right)\right\}\right|_{\Gamma(t)}=0,\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\left\{\left(\mu_2 g_2 \mathbf{H}_2-\mu_1 g_1 \mathbf{H}_1,\ \mathbf{n}\right)-\left(\mu_2 h_2 \mathbf{H}_2-\mu_1 h_1 \mathbf{H}_1,\ \mathbf{v}\right)(\mathbf{v},\ \mathbf{n})+\right. \\ \left.\left.+V\left(\varepsilon_2 \mu_2 g_2 \mathbf{E}_2-\varepsilon_1 \mu_1 g_1 \mathbf{E}_1,[\mathbf{v},\ \mathbf{n}]\right)\right\}\right|_{\Gamma(t)}=0 \quad ■\end{gathered} \tag{18}$$

В случае непроводящих сред уравнения (15), (16) и (18) сохраняют вид, а граничное условие (17) преобразуется к

$$\begin{gathered}\left\{\left(\varepsilon_2 g_2 \mathbf{E}_2-\varepsilon_1 g_1 \mathbf{E}_1,\ \mathbf{n}\right)-\left(\varepsilon_2 h_2 \mathbf{E}_2-\varepsilon_1 h_1 \mathbf{E}_1,\ \mathbf{v}\right)(\mathbf{v},\ \mathbf{n})-\right. \\ \left.\left.-V\left(\varepsilon_2 \mu_2 g_2 \mathbf{H}_2-\varepsilon_1 \mu_1 g_1 \mathbf{H}_1,\ [\mathbf{v},\ \mathbf{n}]\right)\right\}\right|_{\Gamma(t)}=0.\end{gathered}$$

Построим еще одну модель граничных условий на движущихся поверхностях. Величина $V_{ср}^i = 1/\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}$ определяет скорость света в среде с параметрами ε_i, μ_i. Предположим, что $V << V_{ср}^i$, тогда можно п о л о ж $s_i^2 \approx 0$. С учетом данного предположения получим $g_i \approx 1$, $h_i \approx 0$. Граничные условия сопряжения на движущихся поверхностях раздела проводящих сред при $\beta^2 \approx 0$, $s_i^2 \approx 0$ принимают вид.

Модель 3.

$$\left[\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1,\ \mathbf{n}\right]\Big|_{\Gamma(t)}=V\left[\left[\mu_2\mathbf{H}_2-\mu_1\mathbf{H}_1,\ \mathbf{v}\right],\ \mathbf{n}\right]\Big|_{\Gamma(t)}, \tag{19}$$

$$\left[\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1,\ \mathbf{n}\right]\Big|_{\Gamma(t)}=-V\left[\left[\varepsilon_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1\mathbf{E}_1,\ \mathbf{v}\right],\ \mathbf{n}\right]\Big|_{\Gamma(t)}; \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\Big\{\left(P_2(\mathbf{E}_2)-P_1(\mathbf{E}_1),\ \mathbf{n}\right)-V\left(\mu_2P_2(\mathbf{H}_2)-\mu_1P_1(\mathbf{H}_1),\ [\mathbf{v},\ \mathbf{n}]\right)+\\ +V\left(\operatorname{grad}\left(\varepsilon_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1\mathbf{E}_1,\ \mathbf{n}\right),\ \mathbf{v}\right)\Big\}\Big|_{\Gamma(t)}=0,\end{gathered} \tag{21}$$

$$\left(\mu_2\mathbf{H}_2-\mu_1\mathbf{H}_1,\ \mathbf{n}\right)\Big|_{\Gamma(t)}=-V\left(\varepsilon_2\mu_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1\mu_1\mathbf{E}_1,\ [\mathbf{v},\ \mathbf{n}]\right)\Big|_{\Gamma(t)}.\ \blacksquare \tag{22}$$

В случае непроводящих сред граничные условия (19), (20) и (22) сохраняют вид, а граничное условие (21) преобразуется к

$$\left(\varepsilon_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1\mathbf{E}_1,\ \mathbf{n}\right)\Big|_{\Gamma(t)}=V\left(\varepsilon_2\mu_2\mathbf{H}_2-\varepsilon_1\mu_1\mathbf{H}_1,\ [\mathbf{v},\ \mathbf{n}]\right)\Big|_{\Gamma(t)}. \tag{23}$$

Преобразуя (19), (20) с учетом соотношений (22), (23), получим

Модель 4.

$$\begin{gathered}\left[\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1,\ \mathbf{n}\right]\Big|_{\Gamma(t)}=-V(\mathbf{v},\ \mathbf{n})\left[\mathbf{n},\ \left[\mu_2\mathbf{H}_2-\mu_1\mathbf{H}_1,\ \mathbf{n}\right]\right]\Big|_{\Gamma(t)},\\ \left[\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1,\ \mathbf{n}\right]\Big|_{\Gamma(t)}=V(\mathbf{v},\ \mathbf{n})\left[\mathbf{n},\ \left[\varepsilon_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1\mathbf{E}_1,\ \mathbf{n}\right]\right]\Big|_{\Gamma(t)}.\ \blacksquare\end{gathered} \tag{24}$$

Граничные условия (24) являются классическими граничными условиями на движущихся поверхностях в случае непроводящих сред [10, с. 385; 11].

1. Кизель В.А. Отражение света. М., 1973.
2. Халлиулин Д.Я., Третьяков С.А. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 1. С. 16.
3. Гримальский О.В. // Там же. 2005. Т. 50. № 3. С. 285.
4. Ерофеенко В.Т., Лобанов А.В.// Там же. 2004. Т. 49. № 5. С. 567.
5. Круглей С.С. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2004. № 3. С. 93.
6. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. // УФН. 1989. Т. 159. Вып. 1. С. 155.
7. Иванов В.В., Новиков М.А.//Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38. № 11. С. 1146.
8. Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А. Электродинамика. М., 1978.
9. Ерофеенко В.Т., Козловская И.С. Математические модели в электродинамике. Мн., 2004.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М, 1992.
11. Costen R.C., Adamson D. // ТИИЭР. 1965. Т. 53. №9. С. 1341.

Поступила в редакцию 09.03.06.

Виктор Тихонович Ерофеенко - доктор физико-математических наук, профессор.
Юлия Валерьевна Пулко - аспирант. Научный руководитель - В.Т. Ерофеенко.