УДК 517.983

А.А. КИЛБАС, Н.В. КНЯЗЮК

СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА В ЯДРЕ

Composition relations between the integral operator with the generalized Mittag-Leffler function in the kernel and the right-handed Liouvillc fractional integration and differentiation operators arc proved. Composition formulas for two integral operators involving the generalized Mittag-Leffler functions with different parameters are established.

Специальная функция $$E_{\rho}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\rho k+1)}\quad(\rho\in\mathbb{C},\operatorname{Re}(\rho)>0) \tag{1}$$

и более общая

$$\mathrm{E}_{\rho,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\rho k+\mu)}\ (\rho,\mu\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\rho)>0) \tag{2}$$

с комплексными параметрами ρ, μ и переменной z известны как функции Миттаг-Леффлера. Классические результаты в теории этих функций представлены в работах [1, 2]. Интерес к функциям (1) и (2) и их различным обобщениям вызван их применениями в прикладных задачах и в теории дифференциальных и интегральных уравнений [3, 4].

Т. Прабхакар [5] ввел обобщение функции (2) в виде

$$\mathrm{E}^{\gamma}_{\rho,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k z^k}{\Gamma(\rho k+\mu)k!}\ (\rho,\mu,\gamma\in\mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(\rho)>0), \tag{3}$$

где $(\gamma)_k$ - символ Похгаммера: $(\gamma)_0=1, (\gamma)_k=\gamma(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+k-1)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. В частности, при $\gamma=1$ $\mathrm{E}^{1}_{\rho,\mu}(z)=\mathrm{E}_{\rho,\mu}(z)$. В [5] также были изучены некоторые свойства интегрального оператора

$$(\mathrm{E}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega;a+}\varphi)(x)=\int_a^x (x-t)^{\mu-1}\ \mathrm{E}^{\gamma}_{\rho,\mu}[\omega(x-t)^{\rho}]\ \varphi(t)dt,\ \ x>a, \tag{4}$$

где $\rho,\mu,\gamma\in\mathbb{C}\ (\mathrm{Re}(\rho)>0, \mathrm{Re}(\mu)>0)$, содержащего функцию (3) в ядре.

В работе [6] были исследованы свойства композиций интегрального оператора (4) с дробным интегралом I^{α}_{a+} и дробной производной D^{α}_{a+} Римана - Лиувилля порядка a на конечном отрезке действительной оси. Такие конструкции дробного интегрирования и дифференцирования определяются соответственно формулами [7]:

$$\left(I^{\alpha}_{a+}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\ (\alpha\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\alpha)>0)$$

и

$$\left(D^{\alpha}_{a+}\varphi\right)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(I^{n-\alpha}_{a+}\varphi\right)(x)\ (\alpha\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\alpha)>0);\ n=[\mathrm{Re}(\alpha)]+1.$$

Настоящая работа посвящена исследованию интегрального оператора

$$\left(\mathrm{E}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega;-}\varphi\right)(x)=\int_x^{\infty}\left(\frac{t-x}{tx}\right)^{\mu-1}\mathrm{E}^{\gamma}_{\rho,\mu}\left[\omega\left(\frac{t-x}{tx}\right)^{\rho}\right]\varphi(t)dt,\ \ x\in(1;\ \infty), \tag{5}$$

содержащего обобщенную функцию Миттаг-Леффлера (3) в ядре. Мы показываем, что оператор этого преобразования ограничен из пространства $L(x^{\mu-1};(1;\infty))$ в пространство $L(x^{-\mu-1};(1;\infty))$, где $L(x^{\alpha};(1;\infty))=\left\{f:\int_1^{\infty}x^{\alpha}\left|f(x)\right|dx<\infty\right\}$, и доказываем формулы композиций оператора (5) с операторами правостороннего дробного интегрирования и дифференцирования Лиувилля, определяемыми формулами [7]

$$\left(I^{\alpha}_{-}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}\frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt\ (\alpha\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\alpha)>0) \tag{6}$$

и

$$\left(D^{\alpha}_{-}\varphi\right)(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^n\left(I^{n-\alpha}_{-}\varphi\right)(x)\ (\alpha\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\alpha)>0);\ n=[\mathrm{Re}(\alpha)]+1, \tag{7}$$

соответственно, и выводим формулу композиции двух интегральных операторов (5) с различными параметрами.

В частности, соответствующие результаты получены для интегрального оператора с функцией Миттаг-Леффлера (2) в ядре

$$\left(\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}\varphi\right)(x)=\int_x^{\infty}\left(\frac{t-x}{tx}\right)^{\mu-1}\mathrm{E}_{\rho,\mu}\left[\omega\left(\frac{t-x}{tx}\right)^{\rho}\right]\varphi(t)dt\ (x>0) \tag{8}$$

и для интегрального оператора

$$\left(\Phi_{\gamma,\mu,\omega;-}\varphi\right)(x) = \int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx}\right)^{\mu-1} \Phi\left[\gamma,\mu,\omega\left(\frac{t-x}{tx}\right)^{\rho}\right] \varphi(t)dt \ (x>0) \quad (9)$$

с гипергеометрической функцией Куммера $\Phi(\gamma,\mu;z) \equiv \Gamma(\mu)\mathrm{E}_{1,\mu}^{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{(\mu)_k}\frac{z^k}{k!}$ $(\gamma,\mu \in C)$ в ядре [8].

Непосредственно доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть* $\rho,\mu,\gamma,\omega \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(\rho) > 0,\ \mathrm{Re}(\mu) > 0)$. *Тогда оператор* $\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma}$ *ограничен из пространства* $L(x^{\mu-1};(1;\infty))$ *в пространство* $L(x^{-\mu-1};(1;\infty))$ *и*

$$\left\|\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma}\varphi\right\|_{-\mu-1} \le B\|\varphi\|_{\mu-1},$$

где $B = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|(\gamma)_k\right|}{\left|\Gamma(\rho k+\mu)\right|\left[\mathrm{Re}(\rho)k+\mathrm{Re}(\mu)\right]}\cdot\frac{|\omega|^k}{k!}$.

Теперь рассмотрим композицию дробного интегрального оператора I_-^{α} с оператором $\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma}$. Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(\alpha)>0)$ *и пусть* $\rho,\mu,\gamma,\omega \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(\rho) > 0,$ $\mathrm{Re}(\mu) > 0)$. *Тогда равенства*

$$I_-^{\alpha}\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma} = \mathrm{E}_{\rho,\mu+\alpha,\omega;-}^{\gamma} = \mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma}I_-^{\alpha}\varphi \quad (10)$$

верны для любой функции $\varphi \in L\left(x^{\mu-1};(1;\infty)\right)$.

Доказательство. С использованием (5) и (6) и полугруппового свойства для дробных интегралов Лиувилля [7] имеем

$$\left(I_-^{\alpha}\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma}\varphi\right)(x) = I_-^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k\omega^k}{\Gamma(\rho k+\mu)k!}\int_x^\infty (t-x)^{\mu-1+\rho k}\varphi(t)dt\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k\omega^k}{k!}\left(I_-^{\alpha}I_-^{\rho k+\mu}\varphi\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k\omega^k}{k!}\left(I_-^{\alpha+\rho k+\mu}\varphi\right)(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k\omega^k}{k!}\frac{1}{\Gamma(\rho k+\mu+\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha+\mu-1+\rho k}\varphi(t)dt =$$

$$= \int_x^\infty (t-x)^{\alpha+\mu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k\omega^k(t-x)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\mu+\alpha)k!}\varphi(t)dt =$$

$$= \int_x^\infty (t-x)^{\alpha+\mu-1}\mathrm{E}_{\rho,\mu+\alpha}^{\gamma}\left[\omega(t-x)^{\rho}\right]\varphi(t)dt = \left(\mathrm{E}_{\rho,\mu+\alpha,\omega;-}^{\gamma}\varphi\right)(x),$$

что доказывает первое равенство в (10). Второе равенство доказывается аналогично. ■

Следствие 2.1. Если $\rho,\mu,\alpha,\omega \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(\rho),\mathrm{Re}(\mu),\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$, *то для любой функции* $\varphi \in L\left(x^{\mu-1};(1;\infty)\right)$ *выполняются равенства*

$$I_-^{\alpha}\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-} = \mathrm{E}_{\rho,\mu+\alpha,\omega;-} = \mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}I_-^{\alpha}\varphi. \quad (11)$$

Следствие 2.2. Если $\alpha,\mu,\gamma,\omega \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \mathrm{Re}(\mu) > 0)$, *то для любой функции* $\varphi \in L\left(x^{\mu-1};(1;\infty)\right)$ *верны равенства*

$$I_-^{\alpha}\Phi_{\gamma,\mu,\omega;-}\varphi = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\alpha)}\Phi_{\gamma,\mu+\alpha,\omega;-}\varphi = \Phi_{\gamma,\mu,\omega;-}I_-^{\alpha}\varphi. \quad (12)$$

Доказательство. Формулы (11) и (12) следуют из (10) при $\gamma = 1$ и $\rho = 1$ соответственно с учетом (2) и соотношения $\mathrm{E}_{1,\rho}^{\gamma}(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\Phi(\gamma,\mu;z)$.

Замечание. Из (10), (11) и (12) вытекает свойство коммутативности дробного оператора интегрирования Римана - Лиувилля (6) и операторов (5), (8) и (9) на функциях пространства $L\left(x^{\mu-1};(1;\infty)\right)$.

Далее рассмотрим композицию дробного дифференциального оператора D_{-}^{α} с интегральным оператором (5).

Теорема 3. *Пусть* $\alpha\in\mathbb{C}$ $(\operatorname{Re}(\alpha)>0)$ *и пусть* $\rho,\mu,\gamma,\omega\in\mathbb{C}$ $(\operatorname{Re}(\rho)>0,$ $\operatorname{Re}(\mu)>0)$. *Тогда равенство*

$$D_{-}^{\alpha}\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma}\varphi=\mathrm{E}_{\rho,\mu-\alpha,\omega;-}^{\gamma}\varphi \tag{13}$$

имеет место для любой функции $\varphi\in L\left(x^{\mu-1};(1;\infty)\right)$.

Доказательство. Пусть $n=[\operatorname{Re}(\alpha)]+1$. С использованием (7), (5) и (10) для $x>0$ имеем

$$\left(D_{-}^{\alpha}\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma}\varphi\right)(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_{-}^{n-\alpha}\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma}\varphi\right)(x)=$$

$$=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(\mathrm{E}_{\rho,\mu+n-\alpha,\omega;-}^{\gamma}\varphi\right)(x)=$$

$$=\int_{x}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k\,\omega^k}{\Gamma(\rho k+\mu+n-\alpha)k!}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}(t-x)^{\rho k+\mu+n-\alpha-1}\right)\varphi(t)dt=$$

$$=\int_{x}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k\,\omega^k}{\Gamma(\rho k+\mu-\alpha)k!}(t-x)^{\rho k+\mu-\alpha-1}\right)\varphi(t)dt=$$

$$=\int_{x}^{\infty}(t-x)^{\mu-\alpha-1}\,\mathrm{E}_{\rho,\mu-\alpha}^{\gamma}\left[\omega(t-x)^{\rho}\right]\varphi(t)dt=\left(\mathrm{E}_{\rho,\mu-\alpha,\omega;-}^{\gamma}\varphi\right)(x),$$

что доказывает формулу (13). ■

Следствие 3.1. Если $\alpha,\rho,\mu,\omega\in\mathbb{C}$ $\left(\operatorname{Re}(\alpha)>\operatorname{Re}(\mu)>0,\operatorname{Re}(\rho)>0\right)$, *то для любой функции* $\varphi\in L\left(x^{\mu-1};(1;\infty)\right)$

$$D_{-}^{\alpha}\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}\varphi=\mathrm{E}_{\rho,\mu-\alpha,\omega;-}\varphi.$$

Следствие 3.2. Если $\alpha,\gamma,\mu,\omega\in\mathbb{C}$ $\left(\operatorname{Re}(\alpha)>\operatorname{Re}(\mu)>0\right)$, *то для любой функции* $\varphi\in L\left(x^{\mu-1};(1;\infty)\right)$.

$$D_{-}^{\alpha}\Phi_{\gamma,\mu,\omega;-}\varphi=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-\alpha)}\,\Phi_{\gamma,\mu-\alpha,\omega;-}\varphi.$$

В заключение рассмотрим композицию двух операторов (5) с различными параметрами.

Теорема 4. *Пусть* $\rho,\gamma,\mu,\omega,\sigma,\nu\in\mathbb{C}$ $\left(\operatorname{Re}(\rho),\operatorname{Re}(\mu),\operatorname{Re}(\nu)>0\right)$. *Тогда равенство*

$$\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma}\mathrm{E}_{\rho,\nu,\omega;-}^{\sigma}\varphi=\mathrm{E}_{\rho,\mu+\nu,\omega;-}^{\gamma+\sigma}\varphi \tag{14}$$

верно для любой функции $\varphi\in L\left(x^{\mu-1};(1;\infty)\right)$.

В частности,

$$\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma}\,\mathrm{E}_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma}\varphi=I_{-}^{\mu+\nu}\varphi. \tag{15}$$

Доказательство. Согласно (5) имеем

$$I(x)=\left(\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma}\mathrm{E}_{\rho,\nu,\omega;-}^{\sigma}\varphi\right)(x)=$$

$$=\left(x^{1-\mu}\int_{x}^{\infty}u^{-1-\mu}(u-x)^{\mu-1}\,\mathrm{E}_{\rho,\mu}^{\gamma}\left[\omega\left(\frac{u-x}{ux}\right)^{\rho}\right]du\right)\times$$

$$\times\left(u^{1-\nu}\int_{u}^{\infty}t^{-1-\nu}(t-u)^{\nu-1}\mathrm{E}_{\rho,\nu}^{\sigma}\left[\omega\left(\frac{t-u}{tu}\right)^{\rho}\right]\varphi(t)dt\right)=$$

$$=x^{1-\mu}\int_{x}^{\infty}[\int_{x}^{t}u^{-\nu-\mu}(u-x)^{\mu-1}\ \mathrm{E}_{\rho,\mu}^{\gamma}\left[\omega\left(\frac{u-x}{ux}\right)^{\rho}\right]t^{-1-\nu}(t-u)^{\nu-1}\times$$

$$\times\mathrm{E}_{\rho,\nu}^{\sigma}\left[\omega\left(\frac{t-u}{tu}\right)^{\rho}\right]du]\varphi(t)dt.$$

Осуществляя замены $y=1/x$, $v=1/u$ и $w=1/t$, находим

$$I\left(\frac{1}{y}\right)=\int_{0}^{y}[\int_{w}^{y}(y-v)^{\mu-1}\ \mathrm{E}_{\rho,\mu}^{\gamma}\left[\omega(y-v)^{\rho}\right]\ (v-w)^{\nu-1}\ \mathrm{E}_{\rho,\nu}^{\sigma}\left[\omega(v-w)^{\rho}\right]dv]\times$$

$$\times\varphi\left(\frac{1}{w}\right)dw=\left(\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;0+}^{\gamma}\mathrm{E}_{\rho,\nu,\omega;0+}^{\sigma}\varphi\left(\frac{1}{w}\right)\right)(y)=\left(\mathrm{E}_{\rho,\mu+\nu,\omega;0+}^{\gamma+\sigma}\varphi\left(\frac{1}{w}\right)\right)(y)=$$

$$=\int_{0}^{y}(y-w)^{\mu+\nu-1}\ \mathrm{E}_{\rho,\mu+\nu}^{\gamma+\sigma}\left[\omega(y-w)^{\rho}\right]\varphi\left(\frac{1}{w}\right)dw.$$

Осуществляя замены $y=1/x$ и $w=1/t$, имеем

$$I(x)=x^{1-\mu-\nu}\int_{x}^{\infty}t^{-1-\mu-\nu}(t-x)^{\mu+\nu-1}\ \mathrm{E}_{\rho,\mu+\nu}^{\gamma+\sigma}\left[\omega\left(\frac{t-x}{tx}\right)^{\rho}\right]\varphi(t)dt=\left(\mathrm{E}_{\rho,\mu+\nu,\omega;-}^{\gamma+\sigma}\varphi\right)(x),$$

что доказывает (14). Полагая $\sigma=-\gamma$ в (14) и учитывая равенство $\mathrm{E}_{\rho,\mu}^{0}(z)=\dfrac{1}{\Gamma(\mu)}$, получаем (15). ■

Следствие 4.1. Если $\rho,\mu,\omega,\nu\in\mathbb{C}\ (\mathrm{Re}(\mu),\mathrm{Re}(\nu)>0)$, *то для любой функции* $\varphi\in L\left(x^{\mu-1};(1;\infty)\right)$ *имеет место равенство*

$$\mathrm{E}_{\rho,\mu,\omega;-}\mathrm{E}_{\rho,\nu,\omega;-}\varphi=\mathrm{E}_{\rho,\mu+\nu,\omega;-}^{2}\varphi.$$

Следствие 4.2. Если $\mu,\omega,\nu,\gamma,\sigma\in\mathbb{C}\ (\mathrm{Re}(\mu),\mathrm{Re}(\nu)>0)$, *то для любой функции* $\varphi\in L\left(x^{\mu-1};(1;\infty)\right)$ *выполняется равенство*

$$\Phi_{\gamma,\mu,\omega;-}\ \Phi_{\gamma,\nu,\omega;-}\varphi=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\ \Phi_{\gamma+\sigma,\mu+\nu,\omega;-}\varphi.$$

Работа выполнена в рамках НИР БГУ «Функции гипергеометрического типа и их приложения в математике и механике», входящей в государственную программу Республики Беларусь «Математические модели», а также при частичной финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф06Р-106).

1. Бейтмсн Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., 1967.

2. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.

3. Gorenflo R., Mainardi F. // J. Comput. Appl. Math. 2000. Vol. 118. P. 283.

4. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.// North-Holland Mathematics Studies. Amsterdam, 3006. Vol. 204.

5. Prabhakar T.R. // Yokohama Math. J. 1971. Vol. 19. P. 7.

6. Kilbas A.A., Saigo M. // Integral Transforms Spec. Funct. 1996. Vol. 4. P. 355.

7. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.

8. Бейтмсн Г., Эрдсйи А. Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лсжандра. М., 1965.

Поступила в редакцию 13.03.06.

Анатолий Александрович Килбас - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории функций.

Наталья Владимировна Князюк - аспирант кафедры теории функций. Научный руководитель - А.А. Килбас.