3. С использованием функций из раздела геометрической обработки изображений, такой как ImageTrim, функций из раздела обработки цвета, такой как Binarize, функций из раздела фильтрации изображения GaussianFiler, а также других функций, были получены обработанные изображения, подходящие для построения трехмерной модели кости.

4. На основании обработанных изображений с помощью функций Image3D получена трехмерная геометрическая модель бедренной кости пациента в возрасте 40 лет.

Преимуществом данной методики обработки изображения является её универсальность, обработка других изображений потребует лишь небольшой корректировки настроек фильтров.

Разработанная методика обработки изображений может быть использован при написании собственных пакетов для создания трехмерных моделей на основании томографических снимков.

Литература

1. *Абламейко С.В., Недзьведь А.М.* Обработка оптических изображений клеточных структур в медицине / Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2005.
2. *Gonzalez R.C., Woods R. E.* Digital Image Processing / Upper Saddle River, New Jersey, 2009.
3. Интернет-адрес: http://wolfram.com.

О СЛОЖНОСТИ РАСПОЗНАВАНИЯ ГРАФОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР 3-УНИФОРМНЫХ ГИПЕРГРАФОВ КРАТНОСТИ НЕ ВЫШЕ 2

Р. П. Шацов

В работе рассматриваются простые графы, т.е. конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Граф пересечений ребер $L(H)$ гиперграфа H определяется условиями:

1. вершины графа $L(H)$ биективно соответствуют ребрам гиперграфа H;
2. две вершины смежны в $L(H)$ тогда и только тогда, когда соответствующие ребра гиперграфа H пересекаются.

Граф называется k-униформным, если каждое его ребро содержит в точности k вершин. Кратность гиперграфа – максимальное число его ребер, содержащих пару вершин. Класс графов пересечений ребер k-униформных гиперграфов кратности не выше m обозначим через L_k^m.

Кликой называется произвольное множество попарно смежных вершин графа; максимальная клика максимальна относительно включения. Семейство $Q=(Q_1,Q_2,...,Q_p)$ клик графа G называется покрытием этого графа, если каждая вершина и каждое ребро графа содержится в некоторой клике из Q; при этом клики Q_i называются кластерами покрытия. Покрытие графа будем называть минимальным, если никакая его часть не является покрытием этого графа. Покрытие Q графа G называется (k, m)-покрытием, если выполняются следующие условия:

1. каждая вершина графа G входит не более чем в k кластеров покрытия Q;
2. любые два кластера из Q имеют не более чем m общих вершин.

Теорема 1 [1]. Граф G принадлежит классу L_k^m тогда и только тогда, когда существует (k, m)-покрытие этого графа.

Известно, что задача распознавания «$G \in L_2^m$» полиномиально разрешима для любого фиксированного m. ([2, 3, 4]). Hlineny P., Kratochvil J. ([5]) доказали, что задача распознавания «$G \in L_k^1$» является NP-полной при любом фиксированном $k \geq 3$. В [1] доказано, что для любого фиксированного m задача распознавания «$G \in L_k^m$» (k – часть входа) является NP-полной.

В этой работе показано, что задача «$G \in L_3^2$» является NP-полной.

Рассмотрим следующий вариант задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ:

Задача А.

Вход: множество булевых переменных $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ и такой набор элементарных дизъюнкций $D = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ над X, что выполняются следующие условия:

- каждая дизъюнкция d_j содержит не более трех литератов,
- каждая переменная x_i входит не больше, чем в три дизъюнкции из D,
- литералы x_i и $\overline{x_i}$ входят по крайней мере в одну, но не более чем в две дизъюнкции из D.

Вопрос: существует ли такая функция $t: X \to \{0,1\}$, что в точке $(t(x_1), t(x_2), \ldots, t(x_n))$ каждая элементарная дизъюнкция d_j принимает значение 1?

Известно, что задача А является NP-полной [5].

Рассмотрим следующие вспомогательные графы G и F (рисунок 1). Назовем вершины a_1, a_2, a_3, a_4 графа G и вершины b_1, b_2, b_3 графа F контактными.

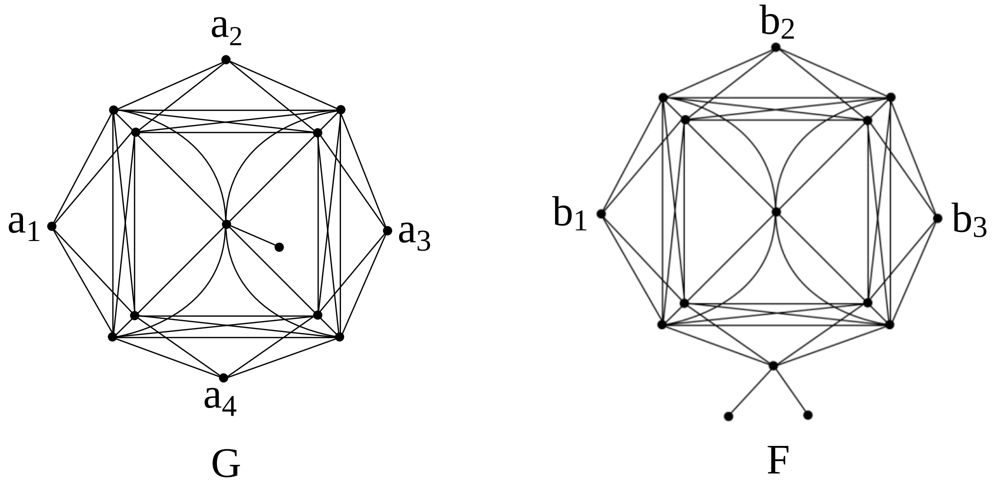

Рис. 1 Вспомогательные графы *G* и *F*

С помощью теоремы 1 непосредственно устанавливаются следующие свойства графов *G* и *F*.

Лемма 1. В любом минимальном (3, 2)-покрытии графа *G* из вершин a_i и a_{i+1} (индекс изменяется по модулю 4) ровно одна входит в единственный кластер, а другая – как минимум в два.

Из леммы 1 вытекает следующее утверждение:

Следствие 1. В любом минимальном (3, 2)-покрытии графа *G* в последовательности a_1, a_2, a_3, a_4 вершины поочередно входят в один или как минимум в два кластера покрытия.

Лемма 2. В любом (3, 2)-покрытии графа *F* по крайней мере одна из вершин a_1, a_2, a_3 входит как минимум в два кластера покрытия.

На рисунках 2 и 3 представлены варианты покрытия кластерами графов *G* и *F* соответственно.

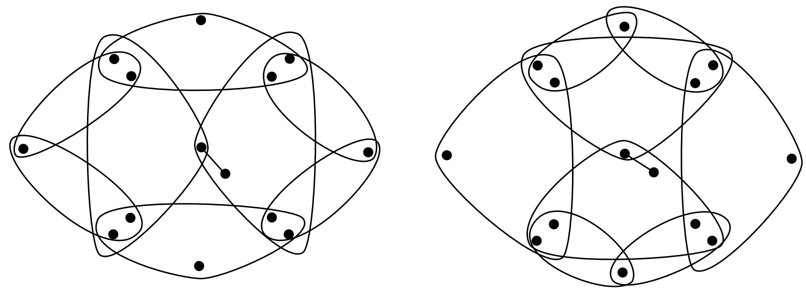

Рис. 2. Покрытие графа *G* кластерами

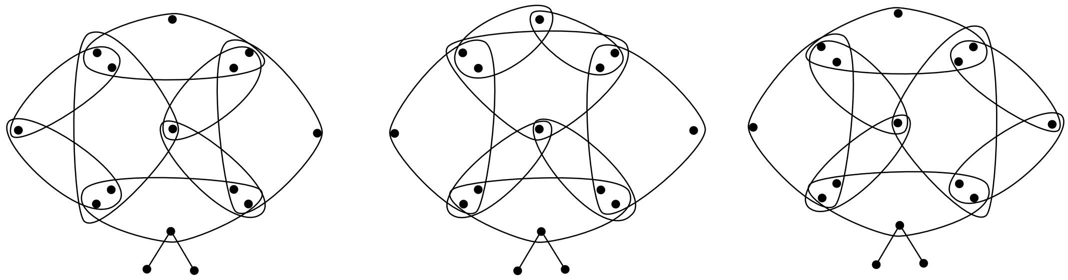

Рис. 3. Покрытие графа *F* кластерами

Теорема 2. Задача распознавания «$G \in L_3^2$» является NP-полной.

Доказательство. Очевидно, что задача распознавания «$G \in L_3^2$» принадлежит классу NP. Сведем задачу A к рассматриваемой задаче.

Каждой переменной из $x_i \in X$ поставим в соответствие копию G_i графа *G*, а каждой дизъюнкции $d_j \in D$ – копию F_j графа *F*. Вершины a_1, a_3 графа G_i отождествим с литералом x_i, а a_2, a_4 – с $\overline{x_i}$. Вершины графа F_j отождествим с литералами дизъюнкции d_j. Отождествим контактные вершины графов G_i и F_j, если соответствующие литералы совпадают (рисунок 4). Полученный граф обозначим через *R*.

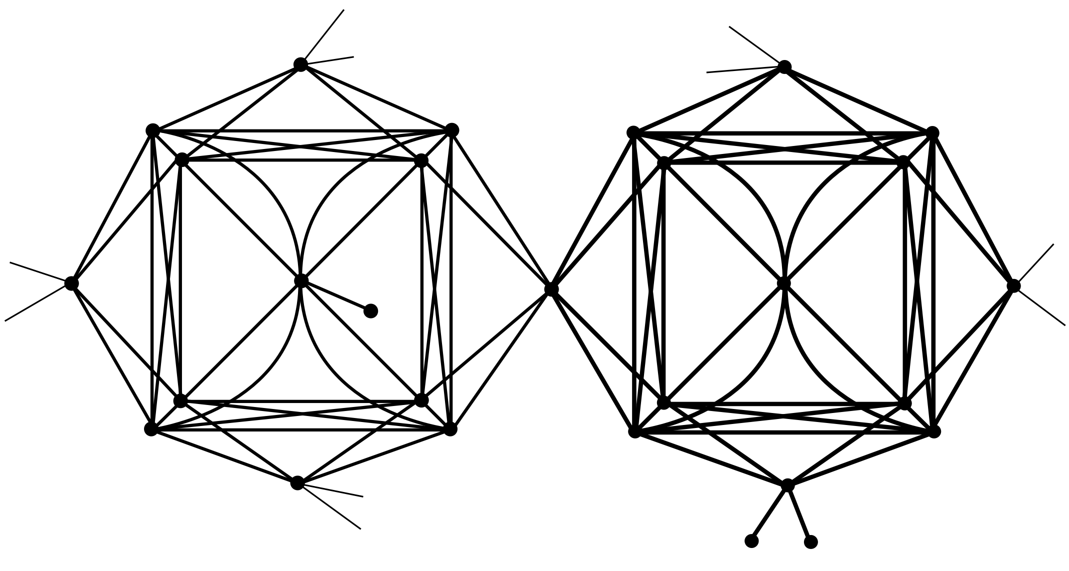

Рис. 4. Построение графа *R*

Нетрудно проверить, что для графа *R* существует (3, 2)-покрытие тогда и только тогда, когда существует такая функция $t : X \to \{0, 1\}$, что в точке

$(t(x_1), t(x_2), ..., t(x_n))$ каждая элементарная дизъюнкция d_j принимает значение 1.

Теорема доказана.

Литература

1. *Glebova O., Metelsky Y., Skums P.* Krausz dimension and its generalizations in special graph classes // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 2013. T. 15. P. 107–120.
2. *Beineke L. W.* Derived graphs and digraphs // Beitrage zur Graphentheorie. Leipzig. 1968. P. 17-33.
3. *Bermond J. C, Meyer J. C.* Graphe representatif des arretes d'un multigraphe // J. Math. Pures et Appl. 1973. V. 52. P. 299-308.
4. *Ташкинов В.* А. Характеризация реберных графов p-графов // Тезисы докладов 5-й Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск. 1980. С. 135-137.
5. *Hlineny P., Kratochvil J.* Computational complexity of the Krausz dimension of graphs // Lecture Notes in Computer Science. 1997. V. 1335. P. 214–228.

АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ОБЪЕКТЫ ДЛЯ КРИВОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Шоломицкая

Пусть дана гладкая кривая γ, заданная натуральной параметризацией $\bar{\rho}(\mathrm{s})$. Будем считать, что кривая γ без самопересечений, т.е. $\rho(\mathrm{s}_1) \neq \rho(\mathrm{s}_2)$ при $s_1 \neq s_2$ ($\rho(\mathrm{s})$ - точка, заданная радиус-вектором $\bar{\rho}(\mathrm{s})$), а в точке $\rho_0 = \rho(0)$ кривизна и кручение отличны от нуля. В точке ρ_0 можно рассматривать различные геометрические объекты, обладающие определенными аппроксимирующими свойствами. Это хорошо известные линейные объекты: касательная прямая и соприкасающаяся плоскость, а также такие объекты второго порядка как соприкасающаяся окружность и соприкасающаяся сфера.

Нами решается задача о нахождении фигуры второго порядка (квадрики), проходящей через точку ρ_0 и обладающей наилучшими аппроксимирующими свойствами. Сформулируем эту задачу следующим образом.

Будем считать, что репер $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ совпадает с репером Френе в точке ρ_0. Пусть квадрика $\mathcal{L}$ задается (в указанном репере) уравнением:

$$\Phi(x,y,z) = 0,$$

где

$$\Phi(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz.$$