

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель Министра образования  
Республики Беларусь

 А. А. Богущ

«05» апреля 2016 г.  
Регистрационный номер Д-901/16-559/тип.



## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Типовая учебная программа по учебной дисциплине  
для специальности

1-31 03 01 Математика (по направлениям)  
направлений специальности:

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность);

1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность);

1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность);

1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)

СОГЛАСОВАНО

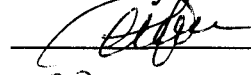
Председатель  
учебно-методического объединения  
по естественнонаучному образова-  
нию

 А. А. Богущ  
«19» апреля 2016 г.



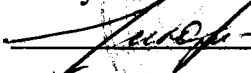
СОГЛАСОВАНО

Начальник управления высшего об-  
разования Министерства образова-  
ния Республики Беларусь

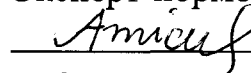
 С. И. Романюк  
«05» апреля 2016 г.

СОГЛАСОВАНО

Проректор по научно-методической  
работе государственного учреждения  
образования «Республиканский ин-  
ститут высшей школы»

 И. В. Титович  
«15» марта 2016 г.

Эксперт-нормоконтролер

 А. А. Денисевич  
«09» 02 2016 г.

## **СОСТАВИТЕЛИ:**

**Сергей Михайлович Агеев** – профессор кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Виталий Владимирович Балащенко** – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Глеб Олегович Кукрак** – старший преподаватель кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук;

**Владимир Леонидович Тимохович** – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

## **РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**Кафедра математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры учреждения образования «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы»;**

**Кафедра математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка»;**

**Иван Васильевич Белько** – профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет», доктор физико-математических наук, профессор

## **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:**

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 11 от 05.05.2015);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета (протокол № 5 от 15.05.2015);

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по естественному образованию (протокол № 6 от 19.05.2015)

Ответственный за редакцию: **Виталий Владимирович Балащенко**

Ответственный за выпуск: **Сергей Михайлович Агеев**

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

**Дифференциальная геометрия и топология** является одной из основных дисциплин, которые читаются студентам-математикам. Примечательная особенность этого курса – тесная связь и использование таких фундаментальных математических учебных дисциплин (прочитанных ранее или читаемых одновременно) как *«Аналитическая геометрия»*, *«Алгебра и теория чисел»*, *«Математический анализ»*, *«Дифференциальные уравнения»*. Основные конструкции и аппарат дифференциальной геометрии и топологии эффективны не только внутри математики, но и во многих разделах механики, теоретической физики, других естественнонаучных и технических дисциплинах. Дифференциальная геометрия и топология играет важную роль в математическом образовании, так как ее конструкции, идеи и методы исследований широко используются в других математических дисциплинах, в частности, они интенсивно используются в дальнейшем при чтении учебной дисциплины *«Функциональный анализ»*, а также многих специальных курсов. В свою очередь, для успешного изучения дифференциальной геометрии и топологии требуется знание ряда разделов алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений, что предполагает согласование курса дифференциальной геометрии и топологии с указанными дисциплинами.

Главными **целями** учебной дисциплины **«Дифференциальная геометрия и топология»** являются:

- освоение фундаментальных понятий метрического и топологического пространств, компактности, связности, фундаментальной группы, кривой, поверхности и связанных с ними инвариантов (кривизна и кручение кривой, гауссова и средняя кривизны поверхности и др.), основ теории гладких многообразий, а также исследование основных свойств и связей рассматриваемых понятий с конкретными геометрическими и топологическими объектами, изучаемыми в курсах аналитической геометрии, алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений;
- овладение основными методами исследований в дифференциальной геометрии и топологии: методы задания метрики и топологии, приложения компактности, связности, а также основных свойств непрерывных отображений, метод параметризации кривой и поверхности, методы вычисления основных геометрических характеристик кривых и поверхностей, основанных на аппарате алгебры и математического анализа;
- приобретение студентами достаточного объема знаний, навыков и умений в области дифференциальной геометрии и топологии для их использования при изучении других математических дисциплин, а также в приложениях (вычислительная геометрия, компьютерная графика и др.).

Для достижения этих целей решаются следующие **задачи**:

- Определяется понятие метрического пространства, и рассматриваются его некоторые топологические свойства;
- Вводятся понятия топологического пространства, непрерывного отображе-

ния; рассматриваются основные конструкции, связанные с топологическими пространствами; изучаются понятия компактности, полноты, связности;

- Изучаются кривые и поверхности в евклидовом пространстве методами дифференциального и интегрального исчисления.

На первой лекции вводится понятие метрического пространства как обобщение  $n$ -мерного евклидова пространства и любого множества в нем. Далее, после краткого исследования геометрических свойств метрического пространства даются определения топологического пространства и непрерывного отображения. Таким образом создается преемственность, с одной стороны, с аналитической геометрией, где изучаются  $n$ -мерные евклидовы и аффинные пространства и их преобразования, с другой стороны – с темами курса математического анализа, где изучаются числовые множества и непрерывные функции. Определяются и изучаются основные операции над метрическими и топологическими пространствами и множествами в них: операции замыкания и взятия внутренней и границы множества, декартово произведение, изометрическое и топологическое вложения. Далее вводятся и исследуются такие фундаментальные понятия как компактность, полнота, связность, фактор-топология и фактор-пространство.

При изложении дифференциально-геометрической части дисциплины основное внимание уделяется исследованию кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. При этом наравне с уже известными из аналитической геометрии методами, основанными на введении координатной системы и применении алгебры векторов, интенсивно используется аппарат и методы математического анализа и дифференциальных уравнений. Для кривых определяются и изучаются такие геометрические характеристики как кривизна и кручение. Раскрывается их механический смысл. Далее рассматриваются поверхности в евклидовом пространстве, изучаются их основные геометрические свойства и характеристики, внутренняя геометрия, а также связанные с поверхностью кривые: линии кривизны, асимптотические и геодезические линии. При этом выявляются непосредственные связи с теорией дифференциальных уравнений.

В течение всего процесса обучения происходит систематическое установление тесных взаимосвязей между отдельными темами курса, а также связей с такими областями математики, как *теоретическая механика, дифференциальные уравнения, алгебра и теория чисел, функциональный анализ.*

В соответствии с образовательным стандартом в результате изучения дисциплины обучающийся должен:

**знать:**

– определения: метрического и топологического пространств, непрерывного отображения, топологии произведения, компактности, полноты метрического пространства, связности, фактор-топологии и фактор-пространства, топологической группы, параметризованной кривой, натуральной параметризации, кривизны и кручения кривой, натуральных уравнений кривой, параметризованной поверхности, касательного вектора и касательного пространства, первой и второй квадратичных форм поверхности, главных кривизн и главных направлений поверхности, типы точки поверхности, гауссовой и

средней кривизны, линий кривизны, геодезической линий;

– основные свойства: операций над множествами в топологическом пространстве, непрерывного отображения, компактных пространств и множеств, полноты, связности, топологической группы, натуральной параметризации кривой, кривизны и кручения кривой, нормальной кривизны поверхности, линий кривизны, геодезических линий;

**уметь:**

- применять понятия и методы топологии при решении задач в различных областях математики;

– вычислять замыкание, внутренность и границу множеств на плоскости и в  $E^3$ , исследовать на непрерывность отображения, заданные аналитически или графиком, проверять компактность и полноту множеств на прямой, плоскости и в  $E^3$ , проверять и использовать понятие связности;

– вычислять натуральную параметризацию, кривизну и кручение кривой, параметризовать поверхность, заданную уравнением, использовать первую квадратичную форму для вычисления длины дуги кривой на поверхности, вычислять главные направления, главные кривизны, гауссову и среднюю кривизны.

**владеть:**

- методом координат при решении основных задач в различных областях математики;

– аналитическими методами для решения основных задач дифференциальной геометрии и топологии.

Преподавание дифференциальной геометрии и топологии должно строиться таким образом, чтобы обучающийся приобретал следующие компетенции специалиста:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным вырабатывать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникаций.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

ПК-2. Владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации. Применять современные методы проектирования информационных систем, использовать веб-сервисы, оформлять техническую документацию.

ПК-3. Применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности.

ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.

ПК-7. Проводить исследования в области эффективности решения производственных задач.

ПК-8. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой; Самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности.

ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.

ПК-13. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.

ПК-16. Готовить доклады, материалы к презентациям.

ПК-22. Работать с научной, технической и патентной литературой.

ПК-27. Реализовывать инновационные проекты в профессиональной деятельности.

Всего на изучение дифференциальной геометрии и топологии отводится максимально 242 часа, из них аудиторных – 140. Примерное распределение аудиторных часов приведено в тематическом плане дисциплины.

## ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Названия разделов и тем	Количество часов	
	Лекции	Лабораторные занятия
<b>Раздел 1. Введение</b>	<b>1</b>	
1.1. Роль геометрии и топологии в математике, естествознании и приложениях	1	
<b>Раздел 2. Метрические и топологические пространства</b>	<b>13</b>	<b>14</b>
2.1. Метрическое пространство. Геометрия и топология метрического пространства.	3	3
2.2. Топологическое пространство. Замкнутые множества и операция замыкания.	3	4
2.3. Граница и внутренность множества. Сходящиеся последовательности.	2	2
2.4. Способы задания топологий. Сравнение топологий. База топологии.	2	2
2.5. Подпространство и индуцированная топология. Аксиомы отделимости.	3	3
<b>Раздел 3. Непрерывные отображения</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
3.1. Непрерывное отображение и его свойства. Гомеоморфизм.	2	2
3.2. Фактор-пространство и фактор-топология, простейшие конструкции.	2	2
<b>Раздел 4. Произведение топологических пространств</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
4.1. Произведение топологических пространств. Непрерывное отображение в произведение.	2	2
4.2. Сходящиеся последовательности в произведении. Понятие топологической группы.	2	2
<b>Раздел 5. Компактность</b>	<b>6</b>	<b>6</b>
5.1. Компактное топологическое пространство и его свойства. Критерий компактности множества в $\mathbb{R}^n$ .	4	2
5.2. Критерии компактности метризуемого пространства. Произведение компактных пространств.	2	4
<b>Раздел 6. Полные метрические пространства</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
6.1. Полное метрическое пространство и его простейшие свойства.	2	2

6.2. Критерий компактности полного метрического пространства. Пополнение метрического пространства.	2	2
<b>Раздел 7. Связные топологические пространства</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
7.1. Связное топологическое пространство и его простейшие свойства.	2	2
7.2. Линейно связное пространство.	2	2
<b>Раздел 8. Теория кривых</b>	<b>12</b>	<b>12</b>
8.1. Параметризованные кривые в $E^3$ . Натуральная параметризация. Кривые (линии).	3	4
8.2. Способы задания линий на плоскости и в пространстве.	2	2
8.3. Касательная прямая. Соприкасающаяся плоскость.	2	2
8.4. Вектор кривизны и кривизна. Базис и репер Френе. Формулы Френе.	2	2
8.5. Кручение. Натуральные уравнения кривой.	3	2
<b>Раздел 9. Теория поверхностей</b>	<b>22</b>	<b>22</b>
9.1. Параметризованные поверхности в $E^3$ . Поверхности. Способы задания.	2	2
9.2. Кривые на поверхности. Касательное пространство к поверхности, касательная плоскость, нормаль.	2	2
9.3. Первая фундаментальная форма поверхности.	4	4
9.4. Нормальная кривизна. Вторая фундаментальная форма поверхности.	2	2
9.5. Основной оператор поверхности и его свойства. Формула Эйлера.	2	2
9.6. Главные направления. Главные кривизны. Полная (гауссова) и средняя кривизны поверхности.	2	4
9.7. Изометрические отображения поверхностей (изгибания). Внутренняя геометрия поверхности. Теорема Гаусса.	3	2
9.8. Асимптотические линии на поверхности. Линии кривизны.	2	2
9.9. Геодезические линии. Понятие о гладком многообразии.	3	2
<b>Всего часов</b>	<b>70</b>	<b>70</b>



## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### Раздел 1. Введение

1.1. Роль геометрии и топологии в математике, естествознании и приложениях.

Объекты дифференциальной геометрии и топологии. Методы исследований в дифференциальной геометрии и топологии. Связь с механикой, теоретической физикой и другими математическими дисциплинами.

### Раздел 2. Метрические и топологические пространства

2.1. Метрическое пространство. Геометрия и топология метрического пространства.

Понятие метрического пространства. Геометрия метрического пространства. Топология метрического пространства.

2.2. Топологическое пространство. Замкнутые множества и операция замыкания.

2.3. Граница и внутренность множества. Сходящиеся последовательности. Сепарабельность метрических топологических пространств.

2.4. Способы задания топологий. Сравнение топологий. База топологии.

2.5. Подпространство и индуцированная топология. Аксиомы отделимости.

### Раздел 3. Непрерывные отображения

3.1. Непрерывное отображение и его свойства. Гомеоморфизм.

Определение и основные свойства непрерывных отображений. Понятие о топологических инвариантах.

3.2. Фактор-пространство и фактор-топология, простейшие конструкции.

### Раздел 4. Произведение топологических пространств

4.1. Произведение топологических пространств. Непрерывное отображение в произведение.

4.2. Сходящиеся последовательности в произведении. Понятие топологической группы.

### Раздел 5. Компактность

5.1. Компактное топологическое пространство и его свойства. Критерий компактности множества в  $\mathbf{R}^n$ .

5.2 Критерии компактности метризуемого пространства. Произведение компактных пространств.

### Раздел 6. Полные метрические пространства

6.1. Полное метрическое пространство и его простейшие свойства.

Вполне ограниченное метрическое пространство.

6.2. Критерий компактности полного метрического пространства. Пополнение метрического пространства.

### Раздел 7. Связные топологические пространства

7.1. Связное топологическое пространство и его простейшие свойства.

7.2. Линейно связное пространство.

Связные компоненты топологического пространства.

## Раздел 8. Теория кривых

8.1. Параметризованные кривые в  $E^3$ . Натуральная параметризация. Кривые (линии).

Параметризованные кривые в  $E^3$  ( $E^n$ ). Натуральная параметризация. Кривые (линии). Локальная эквивалентность понятий параметризованной кривой и линии.

8.2. Способы задания линий на плоскости и в пространстве.

8.3 Касательная прямая. Соприкасающаяся плоскость.

Понятия касательного вектора, касательной прямой и соприкасающейся плоскости кривой. Ориентация линии.

8.4. Вектор кривизны и кривизна. Базис и репер Френе. Формулы Френе.

8.5. Кручение. Натуральные уравнения кривой.

## Раздел 9. Теория поверхностей

9.1. Параметризованные поверхности в  $E^3$ . Поверхности. Способы задания.

Параметризованные поверхности в  $E^3$  ( $E^n$ ). Поверхности. Локальная эквивалентность поверхности и параметризованной поверхности. Локальные (криволинейные) координаты на поверхности.

9.2. Кривые на поверхности. Касательное пространство к поверхности, касательная плоскость, нормаль.

Ориентация поверхности.

9.3. Первая фундаментальная форма поверхности.

Первая фундаментальная форма поверхности. Гладкие отображения поверхностей. Дифференциал гладкого отображения поверхностей.

9.4. Нормальная кривизна. Вторая фундаментальная форма поверхности.

Сферическое отображение поверхности.

9.5 Основной оператор поверхности и его свойства. Формула Эйлера.

9.6 Главные направления. Главные кривизны. Полная (гауссова) и средняя кривизны поверхности.

Типы точек на поверхности. Асимптотические направления на поверхности. Индикатриса Дюпена.

9.7 Изометрические отображения поверхностей (изгибания). Внутренняя геометрия поверхности. Теорема Гаусса.

9.8 Асимптотические линии на поверхности. Линии кривизны.

Ковариантное дифференцирование векторных полей.

9.9. Геодезические линии. Понятие о гладком многообразии.

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Основная литература

1. Кононов С.Г., Прасолов А.В., Тимохович В.Л., Тралле А.Е., Феденко А.С. Топология. - Минск.: Выш. шк., 1990.
2. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. - М.: Высш. шк., 1979.
3. Синюков Н.С., Матвеев Т.И. Топология.- Киев: Вища шк., 1984.
4. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. - М.: Высш. шк., 1980.
5. Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология: Введение. - М.: Мир, 1977.
6. Белько И.В., Бурдун А.А., Ведерников В.И., Феденко А.С. Дифференциальная геометрия (под ред. А.С.Феденко).-Минск. Изд-во БГУ, 1982.
7. Сборник задач по дифференциальной геометрии (под ред. А.С.Феденко).- М.: Наука, 1979.
8. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.- М.: Физматлит, 2004.
9. Постников М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия.- М., Наука, 1979.

### Дополнительная литература

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию.- М.: Наука, 1977.
2. Келли Дж. Общая топология.- М.: Наука, 1981.
3. Энгелькинг Р. Общая топология.- М.: Мир, 1986.
4. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. -М.: Наука, 1973.
5. Спеньер Э. Алгебраическая топология. - М.: Мир, 1971.
6. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии.- М.: Наука, 1989.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия.- М.: Наука, 1979 (2-е издание - 1986).
8. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.- М.: Физматлит, 2004.
9. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли.- М.: Мир, 1987.
10. Торп Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии.- М.: Мир, 1982.
11. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия.- М.: Наука, 1990.
12. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: 1956.

## Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

В процессе *самостоятельной работы* по дисциплине «*Дифференциальная геометрия и топология*» студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях и лабораторных занятиях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;
- подготовка к различным формам промежуточной аттестации (лабораторной и контрольной работе, коллоквиуму, зачету, экзамену);
- поиск и изучение понятий и фактов из параллельно читаемых курсов «*Алгебра и теория чисел*», «*Математический анализ*», «*Дифференциальные уравнения*», необходимых для усвоения дисциплины «*Дифференциальная геометрия и топология*»;
- выполнение домашних заданий; самостоятельное выполнение заданий для практических и лабораторных работ;
- подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети Интернет.

Рекомендуется следующее *распределение часов*, отведенных на самостоятельную работу (102 часа) по дисциплине «*Дифференциальная геометрия и топология*»:

Раздел 1. Введение (1 час).

Раздел 2. Метрические и топологические пространства (20 часов).

Раздел 3. Непрерывные отображения (6 часов).

Раздел 4. Произведение топологических пространств (6 часов).

Раздел 5. Компактность (10 часов).

Раздел 6. Полные метрические пространства (6 часов).

Раздел 7. Связные топологические пространства (7 часов).

Раздел 8. Теория кривых (16 часов).

Раздел 9. Теория поверхностей (30 часов).

*Критерием оценки* результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «*Дифференциальная геометрия и топология*», является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается при выполнении контрольных и лабораторных работ, тестовых заданий, на коллоквиумах и при сдаче зачетов и экзаменов.

*Управляемая самостоятельная работа* (УСР) студентов – это самостоятельная работа, выполняемая по заданию преподавателя, при его методическом руководстве и контроле.

*Целью* УСР по дисциплине «*Дифференциальная геометрия и топология*» является целенаправленное обучение студентов основным навыкам и умениям для успешного усвоения теоретического и практического учебного материала по изучаемой дисциплине.

*К организационным формам* проведения УСР по дисциплине «*Диф-*

*дифференциальная геометрия и топология»* относится аудиторная деятельность на лабораторных занятиях. **Видами отчетности УСР** являются: контрольные работы, коллоквиумы, отчеты по практическим и лабораторным работам.

Контроль УСР по дисциплине *«Дифференциальная геометрия и топология»* проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

- экспресс-опроса на аудиторных занятиях;
- контрольной работы;
- тестового задания;
- коллоквиума;
- защиты учебных заданий по лабораторным работам.

Учет результатов контроля текущей успеваемости студентов ведется преподавателем. Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

Задания студентам по УСР разрабатываются преподавателями, читающими лекции и проводящими лабораторные занятия, в соответствии с рабочим вариантом учебной программы.