

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель Министра образования  
Республики Беларусь

\_\_\_\_\_ /подпись/  
« 05 » \_\_\_\_\_ /дата/  
Регистрационный № \_\_\_\_\_ /тип.



## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Типовая учебная программа по учебной дисциплине  
для специальности

1-31 03 01 Математика (по направлениям)  
направлений специальности:

- 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность);
- 1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность);
- 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность);
- 1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)

СОГЛАСОВАНО

Председатель  
учебно-методического объединения  
по естественнонаучному образова-

нию  
\_\_\_\_\_ /подпись/  
« 15 » \_\_\_\_\_ /дата/



СОГЛАСОВАНО

Начальник управления высшего об-  
разования Министерства образова-  
ния Республики Беларусь

\_\_\_\_\_ /подпись/ С.И. Романюк  
« 05 » \_\_\_\_\_ /дата/ 2016 г.

СОГЛАСОВАНО

Проректор по научно-методической  
работе государственного учреждения  
образования «Республиканский ин-  
ститут вышей школы»

\_\_\_\_\_ /подпись/ И.В. Титович  
« 15 » \_\_\_\_\_ /дата/ 2016 г.

Эксперт-нормоконтролер

\_\_\_\_\_ /подпись/ А.А. Демисевич  
« 10 » \_\_\_\_\_ /дата/ 2016 г.

## **СОСТАВИТЕЛИ:**

**Сергей Гаврилович Кононов** – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Тамара Васильевна Тихонова** – старший преподаватель кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета

## **РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

Кафедра математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры учреждения образования «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы»;

Кафедра математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка»;

**Иван Васильевич Белько** – профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет», доктор физико-математических наук, профессор

## **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:**

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 11 от 05.05.2015);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета (протокол № 5 от 15.05.2015);

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по естественному образованию (протокол № 6 от 19.05.2015)

Ответственный за редакцию: Сергей Гаврилович Кононов

Ответственный за выпуск: Сергей Гаврилович Кононов

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

**Аналитическая геометрия** является одной из основных дисциплин, которые читаются студентам-математикам в начале обучения в университете. Понятия и основные факты аналитической геометрии используются при изучении многих математических дисциплин, в первую очередь таких, как «*Дифференциальная геометрия и топология*», «*Дифференциальные уравнения*», «*Алгебра и теория чисел*», «*Математический анализ*».

Главными **целями** учебной дисциплины «*Аналитическая геометрия*» являются:

- освоение новых по сравнению с элементарной геометрией пространств: многомерных евклидовых, аффинных, проективных и изучение фигур первого и второго порядков в этих пространствах;
- овладение основным методом исследования в аналитической геометрии – методом координат;
- приобретение студентами достаточного объема знаний, навыков и умений в области аналитической геометрии для их использования при изучении других математических дисциплин.

Для достижения этих целей решаются следующие **задачи**:

- Определяется понятие геометрического вектора как класса эквивалентных направленных отрезков. Излагается векторная алгебра, используемая в дальнейшем как основной инструмент построения аналитической геометрии;
- Всесторонне изучаются фигуры первого и второго порядков, являющиеся основными объектами исследования в аналитической геометрии;
- Вводятся основные типы геометрических преобразований и проводится идея рассмотрения различных геометрий как совокупности инвариантов той или иной группы преобразований.

В начале изучения дисциплины с целью сохранения преемственности со школьной геометрией рассмотрение ограничивается трехмерным евклидовым пространством  $E^3$ . При этом векторы в трехмерном евклидовом пространстве  $E^3$ , прямые на евклидовой плоскости  $E^2$ , плоскости и прямые в пространстве  $E^3$  изучаются всесторонне с точки зрения высшей математики. Затем рассматриваются фигуры второго порядка на плоскости  $E^2$  и в пространстве  $E^3$ , вводится принципиально новое понятие проективной плоскости и аналогов рассмотренных ранее фигур на проективной плоскости.

Далее рассматриваются аффинные преобразования и движения плоскости  $E^2$  и пространства  $E^3$ , широко используемые в настоящее время в различных графических программах компьютерной геометрии.

Заключительная часть аналитической геометрии посвящена многомерным аффинным и евклидовым пространствам. Определяются и изучаются фигуры первого и второго порядков в вещественных аффинных и евклидовых пространствах; аффинные преобразования и движения; аффинная и евклидова геометрия.

В течение всего процесса обучения происходит систематическое изучение

геометрических преобразований, проведение теоретико-группового взгляда на геометрию.

Изучение аналитической геометрии в течение всего срока обучения проходит во взаимосвязи с читаемыми параллельно дисциплинами: «Введение в математику», «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ».

В соответствии с образовательным стандартом в результате изучения дисциплины обучающийся должен:

**знать:**

- векторы в  $E^3$ , операции над векторами;
- эллипсы, гиперболы, параболы, эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, их канонические уравнения и свойства;
- понятия  $n$ -мерного аффинного и евклидова пространств; аффинные реперы и координаты точек;  $k$ -мерные плоскости и фигуры второго порядка, группы геометрических преобразований;

**уметь:**

- выполнять операции над векторами; записывать общие и параметрические уравнения плоскостей в различных пространствах, определять их взаимное расположение; находить расстояния между плоскостями;
- по общему уравнению фигуры второго порядка в  $E^2$  и  $E^3$  определять ее тип, размеры, расположение относительно системы координат; приводить общее уравнение фигуры второго порядка в аффинном пространстве к нормальному виду;

**владеть:**

- методом координат при решении основных задач аналитической геометрии.

Преподавание аналитической геометрии должно строиться таким образом, чтобы обучающийся приобретал следующие компетенции специалиста:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным вырабатывать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

ПК-2. Владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации. Применять современные методы проектирования информационных систем, использовать веб-сервисы, оформлять тех-

ническую документацию.

ПК-3. Применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности.

ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.

ПК-7. Проводить исследования в области эффективности решения производственных задач.

ПК-8. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой; Самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности.

ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.

ПК-13. Составлять документацию (графики работ, инструкции, планы, заявки, деловые письма и т.п.), а также отчетную документацию по установленным формам.

ПК-14. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.

ПК-18. Готовить доклады, материалы к презентациям.

ПК-24. Работать с научной, технической и патентной литературой.

ПК-29. Реализовывать инновационные проекты в профессиональной деятельности.

Всего на изучение аналитической геометрии отводится 242 часа, из них аудиторных – 140. Примерное распределение аудиторных часов приведено в тематическом плане дисциплины.

## ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Названия разделов и тем	Количество часов	
	Лекции	Лабораторные занятия
<b>Раздел 1. Введение</b>	<b>1</b>	
1.1. Роль геометрии в математике и ее приложениях	1	
1.2. Предмет и методы аналитической геометрии.		
<b>Раздел 2. Векторы</b>	<b>13</b>	<b>13</b>
2.1. Понятие вектора	2	
2.2. Сложение векторов. Умножение векторов на числа	2	4
2.3. Проекции	1	1
2.4. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базисы	2	2
2.5. Скалярное произведение векторов	2	2
2.6. Векторное произведение векторов	2	2
2.7. Смешанное произведение векторов	1	1
2.8. Формулы преобразования координат векторов	1	1
<b>Раздел 3. Прямые и плоскости</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
3.1. Аффинные реперы и координаты точек. Формулы преобразования координат точек	2	
3.2. Фигуры и их уравнения	1	4
3.3. Прямые на плоскости	4	4
3.4. Плоскости и прямые в пространстве	4	4
<b>Раздел 4. Фигуры второго порядка на плоскости и в пространстве</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
4.1. Эллипс, гипербола, парабола	2	2
4.2. Фигуры второго порядка на плоскости	2	4
4.3. Фигуры вращения. Цилиндрические и конические фигуры	2	1
4.4. Фигуры второго порядка в пространстве	2	2
4.5. Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида и гиперболического параболоида	1	1
<b>Раздел 5. Проективная плоскость</b>	<b>3</b>	<b>2</b>
5.1. Модели проективной плоскости. Однородные координаты	2	1

5.2. Фигуры первого и второго порядков на проективной плоскости	1	1
<b>Раздел 6. Аффинные преобразования и движения</b>	<b>7</b>	<b>7</b>
6.1. Аффинные преобразования плоскости и пространства	2	1
6.2. Линейный оператор, индуцированный аффинным преобразованием	2	1
6.3. Координатное выражение аффинного преобразования	1	3
6.4. Движения плоскости и пространства	2	2
<b>Раздел 7. Аффинные пространства</b>	<b>15</b>	<b>14</b>
7.1. Определение, примеры и простейшие свойства аффинного пространства	2	1
7.2. Плоскости в аффинном пространстве	2	4
7.3. Системы координат в аффинном пространстве	1	1
7.4. Уравнения плоскостей в аффинном пространстве	2	2
7.5. Аффинные отображения. Изоморфизмы и автоморфизмы аффинных пространств	2	1
7.6. Бариецентрические линейные комбинации точек и бариецентрические координаты	2	1
7.7. Параллелепипеды и симплексы в вещественных аффинных пространствах. Выпуклые фигуры	1	2
7.8. Фигуры второго порядка в вещественных аффинных пространствах	3	2
<b>Раздел 8. Евклидовы пространства</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
8.1. Евклидовы векторные пространства	2	2
8.2. Евклидовы точечные пространства	4	4
8.3. Шары, сферы, симплексы, параллелепипеды в евклидовых пространствах. Вычисление расстояний и величин углов между двумя плоскостями. Объемы параллелепипедов и симплексов.	2	
8.4. Движения и евклидова геометрия	1	2
8.5. Фигуры второго порядка в евклидовых пространствах	2	4
<b>Всего часов</b>	<b>70</b>	<b>70</b>

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### Раздел 1. Введение

1.1. Роль геометрии в математике и ее приложениях.

1.2. Предмет и методы аналитической геометрии.

### Раздел 2. Векторы

2.1. Понятие вектора.

Направленные отрезки. Векторы как классы эквивалентных направленных отрезков.

2.2. Сложение векторов. Умножение векторов на числа.

Определения и основные свойства линейных операций над векторами: сложение векторов, умножение векторов на числа. Откладывание вектора от точки.

2.3. Проекции.

Определения и основные свойства параллельного проектирования на плоскости и в пространстве.

2.4. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базисы.

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, коллинеарные и компланарные векторы. Базисы и координаты векторов. Ориентация прямой, плоскости и пространства.

2.5. Скалярное произведение векторов.

2.6. Векторное произведение векторов.

2.7. Смешанное произведение векторов.

2.8. Формулы преобразования координат векторов.

### Раздел 3. Прямые и плоскости

3.1. Аффинные реперы и координаты точек. Формулы преобразования координат точек.

Аффинные реперы (декартовы системы координат) на прямой, на плоскости и в пространстве. Ортонормированные реперы (прямоугольные декартовы системы координат). Полярные, сферические и цилиндрические системы координат. Формулы преобразования аффинных координат точек.

3.2. Фигуры и их уравнения.

Два основных способа задания фигур: параметризация фигуры и задание фигуры с помощью уравнения.

3.3. Прямые на плоскости.

Различные виды уравнений прямой на плоскости. Определение взаимного расположения двух прямых на плоскости по их уравнениям. Пучок прямых. Формулы для вычисления расстояния от точки до прямой и величины угла между прямыми.

3.4. Плоскости и прямые в пространстве.

Различные виды уравнений плоскости в пространстве. Определение взаимного расположения двух плоскостей по их уравнениям. Различные виды урав-



нений прямой в пространстве. Определение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве по их уравнениям. Формулы для вычисления расстояний от точки до прямой и от точки до плоскости в пространстве. Геометрический смысл линейных неравенств с двумя и тремя неизвестными.

#### **Раздел 4. Фигуры второго порядка на плоскости и в пространстве**

##### **4.1. Эллипс, гипербола, парабола.**

Эллипс – различные определения, каноническое уравнение, фокусы, эксцентриситет. Гипербола – определение, каноническое уравнение, фокусы, эксцентриситет, асимптоты. Директрисы эллипса и гиперболы. Парабола – каноническое уравнение, фокус и директриса. Параметрические задания эллипса и гиперболы. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.

##### **4.2. Фигуры второго порядка на плоскости.**

Общее уравнение фигуры второго порядка на плоскости, приведение его к каноническому виду.

##### **4.3. Фигуры вращения. Цилиндрические и конические фигуры.**

Фигуры вращения, цилиндрические и конические фигуры в пространстве. Эллипсоиды вращения, трехосные эллипсоиды. Эллиптические параболоиды. Однополостные и двуполостные гиперболоиды. Цилиндры второго порядка – эллиптический, параболический, гиперболический. Конусы второго порядка.

##### **4.4. Фигуры второго порядка в пространстве.**

Понятие фигуры второго порядка в пространстве. Метод сечений исследования формы пространственной фигуры на примере гиперболического параболоида. Описание фигур второго порядка в пространстве, их канонические уравнения.

4.5. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

Плоские сечения пространственных фигур второго порядка.

#### **Раздел 5. Проективная плоскость**

##### **5.1. Модели проективной плоскости. Однородные координаты.**

Две модели вещественной проективной плоскости. Однородные координаты на проективной плоскости.

##### **5.2. Фигуры первого и второго порядков на проективной плоскости.**

#### **Раздел 6. Аффинные преобразования и движения**

##### **6.1. Аффинные преобразования плоскости и пространства.**

Определение, примеры и основные свойства аффинных преобразований плоскости и пространства.

##### **6.2. Линейный оператор, индуцированный аффинным преобразованием.**

##### **6.3. Координатное выражение аффинного преобразования.**

#### 6.4. Движения плоскости и пространства.

Определение, примеры и основные свойства движений плоскости и пространства. Координатная запись движения. Описание движений плоскости  $E^2$  и пространства  $E^3$ .

### Раздел 7. Аффинные пространства

7.1. Определение, примеры и простейшие свойства аффинного пространства.

Понятие аффинного пространства и его простейшие свойства, вытекающие из аксиом. Примеры. Арифметическое аффинное пространство.

7.2. Плоскости в аффинном пространстве.

Понятие  $k$ -мерной плоскости в пространстве  $A^n$ , аффинная оболочка множества точек. Аффинно независимые системы точек.

7.3. Системы координат в аффинном пространстве.

Аффинные реперы и координаты точек в аффинном пространстве. Формулы преобразования координат.

7.4. Уравнения плоскостей в аффинном пространстве.

Общие и параметрические уравнения плоскостей в пространстве  $A^n$ . Типы взаимного расположения двух плоскостей в аффинном пространстве, характеристика пары плоскостей.

7.5. Аффинные отображения. Изоморфизмы и автоморфизмы аффинных пространств.

Аффинные отображения. Изоморфизм аффинных пространств. Аффинные преобразования. Геометрия аффинной группы.

7.6. Барицентрические линейные комбинации точек и барицентрические координаты.

7.7. Параллелепипеды и симплексы в вещественных аффинных пространствах. Выпуклые фигуры.

Параллелепипеды и симплексы в вещественных аффинных пространствах. Понятие выпуклой фигуры, выпуклая оболочка множества точек.

7.8. Фигуры второго порядка в вещественных аффинных пространствах.

Фигуры второго порядка (квадрики) в вещественном аффинном пространстве  $A^n$ . Пересечение квадрики с прямой. Асимптотические направления. Линии эллиптического, гиперболического, параболического типов на плоскости  $E^2$ . Центры квадрик. Диаметральные плоскости квадрики. Диаметры линий второго порядка. Приведение уравнений квадрики к нормальному виду с помощью преобразования координат. Аффинная классификация квадрик в вещественном аффинном пространстве  $A^n$ . Аффинная классификация линий второго порядка. Аффинная классификация поверхностей второго порядка.

### Раздел 8. Евклидовы пространства

8.1. Евклидовы векторные пространства.

Понятие евклидова векторного пространства. Ортонормированные базисы и

ортогональные матрицы. Ортогональное дополнение подпространства. Матрица Грама системы векторов.

8.2. Евклидовы точечные пространства.

Понятие  $n$ -мерного евклидова точечного пространства  $E^n$ . Ортонормированные реперы. Плоскости в пространстве  $E^n$ , ортогональность плоскостей.

8.3. Шары, сферы, симплексы, параллелепипеды в евклидовых пространствах. Вычисление расстояний и величин углов между двумя плоскостями. Объемы параллелепипедов и симплексов.

8.4. Движения и евклидова геометрия.

Группа движений пространства  $E^n$  и евклидова геометрия.

8.5. Фигуры второго порядка в евклидовых пространствах.

Приведение уравнения квадрики в пространстве  $E^n$  к каноническому виду. Исследование поверхности второго порядка в пространстве  $E^3$  по общему уравнению.

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Основная литература

1. *Кононов С.Г.* Аналитическая геометрия: учебное пособие. – Минск: БГУ, 2014. – 238 с.
2. *Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 302 с.
3. *Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – Ч. 2. – 269 с.
4. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник. – М., Наука, 1979. – 512 с.
5. *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие. – М., Наука, 1976. – 384 с.
6. *Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С.* Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие. – Минск: Университетское, 1989. – 285 с.

### Дополнительная литература

1. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1986. – 303 с.
2. *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия: учебник. – М., Наука, 1970. – 527 с.
3. *Постников М.М.* Аналитическая геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1973. – 751 с.
4. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1979. – 336 с.

## Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

В процессе *самостоятельной работы* по дисциплине «Аналитическая геометрия» студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях и лабораторных занятиях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;
- подготовка к различным формам промежуточной аттестации (практической, лабораторной и контрольной работе, коллоквиуму, зачету, экзамену);
- поиск и изучение понятий и фактов из параллельно читаемых курсов «Введение в математику», «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», необходимых для усвоения дисциплины «Аналитическая геометрия»;
- выполнение домашних заданий; самостоятельное выполнение заданий для лабораторных работ;
- подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети Интернет.

Рекомендуется следующее *распределение часов*, отведенных на самостоятельную работу (102 часа) по дисциплине «Аналитическая геометрия»:

Раздел 1. Введение (1 час).

Раздел 2. Векторы (25 часов).

Раздел 3. Прямые и плоскости (10 часов).

Раздел 4. Фигуры второго порядка на плоскости и в пространстве (10 часов).

Раздел 5. Проективная плоскость (6 часов).

Раздел 6. Аффинные преобразования и движения (10 часов).

Раздел 7. Аффинные пространства (20 часов).

Раздел 8. Евклидовы пространства (20 часов).

*Критерием оценки* результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Аналитическая геометрия», является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается при выполнении контрольных и лабораторных работ, тестовых заданий, на коллоквиумах и при сдаче зачетов и экзаменов.

*Управляемая самостоятельная работа* (УСР) студентов – это самостоятельная работа, выполняемая по заданию преподавателя, при его методическом руководстве и контроле.

*Целью* УСР по аналитической геометрии является целенаправленное обучение основным навыкам и умениям для успешного усвоения теоретического и практического учебного материала по изучаемой дисциплине.

К **организационным формам** проведения УСР по дисциплине «*Аналитическая геометрия*» относится аудиторная деятельность на лабораторных занятиях. **Видами отчетности** УСР являются: контрольные работы, коллоквиумы, отчеты по лабораторным работам.

Контроль УСР по дисциплине «*Аналитическая геометрия*» проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

- экспресс-опроса на аудиторных занятиях;
- контрольной работы;
- тестового задания;
- коллоквиума;
- защиты учебных заданий по лабораторным работам.

Учет результатов контроля текущей успеваемости студентов ведется преподавателем. Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

Задания студентам по УСР разрабатываются преподавателями, читающими лекции и проводящими лабораторные занятия, в соответствии с рабочим вариантом учебной программы.