

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель Министра образования
Республики Беларусь



В.А. Богуш

2016 г.

Регистрационный № ТД-9.603/тип.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Типовая учебная программа по учебной дисциплине
для специальности
1-31 03 01 Математика (по направлениям)

СОГЛАСОВАНО

Председатель
Учебно-методического объединения
по естественнонаучному
образованию



А.Л. Толстик
2015 г.

СОГЛАСОВАНО

Начальник Управления высшего
образования Министерства
образования Республики Беларусь

С.И. Романюк
« 4 » июня 2016 г.

СОГЛАСОВАНО

Проректор по научно-методической
работе Государственного
учреждения образования
«Республиканский институт высшей
школы»

И.В. Титович
« 10 » июня 2016 г.

Эксперт-нормоконтролер

В.Г. Швабич
« 19 » 05 2016 г.

Минск 2016

СОСТАВИТЕЛИ:

Радыно Я.В. – заведующий кафедрой функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор;

Антоневич А.Б. – профессор кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Мазель М.Х. – доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Леонов Н.Н. – доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Гороховик В.В. – заведующий отделом нелинейного анализа Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор;

Астровский А. И. – профессор кафедры высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:

Кафедрой функционального анализа Белорусского государственного университета
(протокол № 10 от 25.05.2015 г.)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 1 от 23.09.201 г.)

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по естественнонаучному образованию (протокол № 9 от 15.12.2015 г.)

Ответственный за редакцию: Майя Хаймовна Мазель

Ответственный за выпуск: Тимоховцева Ирина Александровна

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Функциональный анализ в наиболее широком подходе изучает такие темы: теория меры, интеграл Лебега, теорема Фубини, метрические пространства, принцип сжимающих отображений и его применения к интегральным уравнениям, компактные метрические пространства, нормированные векторные пространства, банаховы пространства, гильбертовы пространства, пространство линейных непрерывных операторов в нормированных пространствах, теорема Банаха-Штейнгауза, теорема Банаха об обратном операторе, теорема Хана-Банаха, спектр оператора, теория Рисса-Шаудера, применение основных принципов функционального анализа к интегральным уравнениям.

Функциональный анализ изучает множества с согласованными между собой алгебраическими и топологическими структурами, их отображения, а также методы, с помощью которых сведения об этих структурах применяются к конкретным задачам.

Математический анализ, высшая алгебра, топология являются подготовительными дисциплинами к изучению функционального анализа.

Среди областей применения функционального анализа можно указать математическую физику, теорию функций, теорию дифференциальных и интегральных уравнений, теорию вероятностей, методы вычислений, квантовую механику, математическую экономику и ряд других направлений. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Уравнения математической физики», «Методы оптимизации», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление», «Численные методы».

В данном курсе излагаются основы теории меры и интеграла Лебега, метрические и нормированные пространства и операторы в них, основные принципы линейного функционального анализа. В качестве одного из примеров приложений рассматриваются интегральные уравнения.

Основными методами изучения дисциплины «Функциональный анализ» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала.

Цель дисциплины «Функциональный анализ»: освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

Образовательная цель: изложение основ теории меры и интеграла Лебега, изучение функциональных метрических пространств, теории нормированных, в частности, гильбертовых, пространств, теории линейных операторов и операторных уравнений.

Развивающая цель: формирование у студентов основ современного математического мышления, обучение методам математических, изучение конкретных функционально-аналитических конструкций.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Функциональный анализ»:

- формирование у студентов понятия меры и интеграла Лебега;

- изучение непрерывных, равномерно непрерывных отображений и отображений, удовлетворяющих условию Липшица, в функциональных пространствах;
- применение принципа сжимающих отображений к различным задачам;
- изучение основных свойств нормированных и гильбертовых пространств;
- изучение линейных ограниченных, в частности, интегральных, операторов;
- изучение компактных операторов и теории Рисса-Шаудера в гильбертовых пространствах;
- изучение альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в пространствах $L_2[a, b]$ и $C[a, b]$.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

- основы теории меры и интеграла Лебега;
- основные функциональные пространства и операторы в них;
- основные принципы функционального анализа и примеры их приложений;

уметь:

- исследовать на разрешимость и корректную разрешимость операторных уравнений с линейным непрерывным оператором;
- использовать основные понятия функционального анализа при изучении других математических дисциплин;
- применять результаты функционального анализа для решения теоретических и прикладных задач;

владеть:

- основными методами вычисления интегралов Лебега;
- методами вычисления норм операторов и функционалов;
- методами исследования разрешимости уравнений в банаховых пространствах.

Требования к формированию компетентности специалиста.

Академические компетенции предполагают, что специалист должен:

- уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач;
- владеть системным и сравнительным анализом;
- владеть исследовательскими навыками;
- уметь работать самостоятельно;
- быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью);
- владеть междисциплинарным подходом при решении проблем;
- иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером;
- обладать навыками устной и письменной коммуникации;
- уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

Социально-личностные компетенции предполагают, что специалист должен:

- быть способным к социальному взаимодействию;
- обладать способностью к межличностным коммуникациям;
- быть способным к критике и самокритике;
- уметь работать в команде.

Профессиональные компетенции предполагают, что специалист должен:

- владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации. Применять современные методы проектирования информационных систем, использовать веб-сервисы, оформлять техническую документацию;
- применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой профессиональной деятельности.

Научно-исследовательская деятельность предполагает, что специалист должен:

- заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий;
- проводить исследования в области эффективности решения производственных задач;
- работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой;
- осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.

Организационно-управленческая деятельность предполагает, что специалист должен:

- взаимодействовать со специалистами смежных профилей;
- готовить доклады, материалы к презентациям.

Инновационная деятельность предполагает, что специалист должен:

- работать с научной, технической и патентной литературой;
- реализовывать инновационные проекты в профессиональной деятельности.

В соответствии с Общеобразовательным стандартом высшего образования и типовыми учебными планами на изучение дисциплины для направлений специальности 1-31 03 01-01 «Математика (научно-производственная деятельность)» и 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» отводится всего 242 часа, в том числе аудиторных занятий -140 часов; для направления специальности 1-31 03 01-03 «Математика (экономическая деятельность)» отводится всего 236 часов, в том числе аудиторных занятий -140 часов.

Примерное распределение аудиторных часов: 70 часов – лекции, 70 часов – лабораторные занятия.

Текущий контроль освоения теоретического материала рекомендуется проводить в форме зачетов и экзаменов.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

для направлений специальности

1-31 03 01-01 «Математика (научно-производственная деятельность)»

1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)»

№	Наименование тем и разделов	Распределение часов по видам занятий		
		Всего	Лекц.	Лабор.
1	2	3	4	5
1	Тема 1. Мера Лебега	24	12	12
2	Тема 2. Интеграл Лебега	24	12	12
3	Тема 3. Метрические пространства	14	8	6
4	Тема 4. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения	10	4	6
5	Тема 5. Нормированные пространства	6	4	2
6	Тема 6. Гильбертовы пространства	14	6	8
7	Тема 7. Линейные операторы в нормированных пространствах	24	12	12
8	Тема 8. Линейные непрерывные функционалы	14	6	8
9	Тема 9. Компактные операторы	10	6	4
	ВСЕГО	140	70	70

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

для направления специальности

1-31 03 01-03 «Математика (экономическая деятельность)»

№	Наименование тем и разделов	Распределение часов по видам занятий		
		Всего	Лекц.	Лабор.
1	2	3	4	5
1	Тема 1. Мера Лебега	22	12	10
2	Тема 2. Интеграл Лебега	22	12	10
3	Тема 3. Метрические пространства	14	8	6
4	Тема 4. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения	10	4	6
5	Тема 5. Нормированные пространства	6	4	2
6	Тема 6. Гильбертовы пространства	14	6	8
7	Тема 7. Линейные операторы в нормированных пространствах	24	12	12
8	Тема 8. Линейные непрерывные функционалы	12	6	6
9	Тема 9. Компактные операторы	12	6	8
	ВСЕГО	140	70	70

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Наименование тем и разделов

Тема 1. Мера Лебега. Системы множеств. Кольца множеств, полукольца, алгебры, сигма-кольца и сигма-алгебры, борелевские множества. Общее понятие меры. Сигма-аддитивная мера. Продолжение меры по Лебегу. Внешняя мера, измеримые множества, множества меры нуль, основная теорема теории меры. Мера Лебега на прямой. Мера Лебега-Стилтьеса.

Тема 2. Интеграл Лебега. Измеримые функции, простые функции, интеграл от простой функции, интеграл от измеримой функции, простейшие свойства интеграла Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега. Произведение мер, теорема Фубини.

Тема 3. Метрические пространства. Определение и основные примеры функциональных метрических пространств. Топология метрических пространств. Полные метрические пространства. Пополнение метрических пространств. Компактные метрические пространства.

Тема 4. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения. Определения и свойства. Теорема о продолжении. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.

Тема 5. Нормированные пространства. Векторные пространства, нормированные пространства. Непрерывность операций сложения и умножения на число. Банаховы пространства. Пополнение нормированных пространств. Критерий конечно-мерности нормированного пространства.

Тема 6. Гильбертовы пространства. Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье. Критерий существования счетного ортонормированного базиса. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

Тема 7. Линейные операторы в нормированных пространствах. Связь ограниченности с непрерывностью для линейных операторов. Норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Различные виды сходимости линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Обратные операторы. Теорема Банаха об обратном операторе. Обратимость оператора, близкого к единичному. Открытость множества обратимых операторов. Теорема Банаха об обратном операторе.

Тема 8. Линейные непрерывные функционалы. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала. Общий вид линейных непрерывных функционалов в конкретных пространствах. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства. Теорема о замыкании образа линейного ограниченного оператора.

Тема 9. Компактные операторы. Определения и свойства. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Уравнения с компактными операторами. Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве. Альтернатива Фредгольма для интегральных операторов.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Методы обучения студентов практическим навыкам использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на лабораторных занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время лабораторных занятий в форме проверки математических диктантов, лабораторных работ, домашних заданий, а также на контрольных работах, коллоквиумах и зачетах.

Список литературы

Основная литература:

1. Антоневи́ч А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. Минск, Изд-во БГУ, 2006.
2. Антоневи́ч А.Б., Мазель М.Х., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Учебное пособие. Минск, Изд-во БГУ, 2011.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2004.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.

Дополнительная литература:

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ю., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. Киев, Выща школа, 1990.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. СПб., Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2002.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979.
4. Антоневи́ч А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск, Вышэйшая школа, 1978.

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ

С целью текущего контроля предусматривается проведение контрольных работ (как правило, по одной на тему) и домашних работ по индивидуальным заданиям (как правило, по одной на лабораторное занятие), самостоятельные работы и опросы на практических занятиях. По итогам каждого семестра рекомендуется проводить зачет и/или экзамен, коллоквиумы, компьютерные тестирования.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

Самостоятельная работа студентов - это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. В широком смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и вне её, в контакте с преподавателем и в его отсутствии.

Самостоятельная работа реализуется:

1. Непосредственно в процессе аудиторных занятий - на лекциях, практических и семинарских занятиях, при выполнении лабораторных работ.
2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания - на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.
3. В библиотеке, дома, в общежитии, на кафедре при выполнении студентом учебных и творческих задач.

При изучении дисциплины организация самостоятельной работы студентов должна представлять единство трех взаимосвязанных форм:

1. Внеаудиторная самостоятельная работа;
2. Аудиторная самостоятельная работа, которая осуществляется под непосредственным руководством преподавателя;
3. Творческая, в том числе научно-исследовательская работа.

Виды внеаудиторной самостоятельной работы студентов разнообразны: подготовка и написание рефератов, докладов, очерков и других письменных работ на заданные темы.

Аудиторная самостоятельная работа может реализовываться при проведении практических занятий, семинаров, выполнении лабораторного практикума и во время чтения лекций.

При чтении лекционного курса непосредственно в аудитории необходимо контролировать усвоение материала основной массой студентов путем проведения экспресс-опросов по конкретным темам.

На практических и семинарских занятиях различные виды самостоятельной работы студентов позволяют сделать процесс обучения более интересным и поднять активность значительной части студентов в группе.

На практических занятиях рекомендуется не менее 1 часа из двух (50% времени) отводить на самостоятельное решение задач. Практические занятия

целесообразно строить следующим образом: 1. Вводное слово преподавателя (цели занятия, основные вопросы, которые должны быть рассмотрены). 2. Беглый опрос. 3. Решение 1-2 типовых задач. 4. Самостоятельное решение задач. 5. Разбор типовых ошибок при решении (в конце текущего занятия или в начале следующего).

Результативность самостоятельной работы студентов во многом определяется наличием активных методов ее контроля. Существуют следующие виды контроля:

- входной контроль знаний и умений студентов при начале изучения очередной дисциплины;
- текущий контроль, то есть регулярное отслеживание уровня усвоения материала на лекциях, практических и лабораторных занятиях;
- промежуточный контроль по окончании изучения раздела или модуля курса;
- самоконтроль, осуществляемый студентом в процессе изучения дисциплины при подготовке к контрольным мероприятиям;
- итоговый контроль по дисциплине в виде зачета или экзамена;
- контроль остаточных знаний и умений спустя определенное время после завершения изучения дисциплины.