БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра высшей математики

А. А. Леваков

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пособие
для студентов факультета
прикладной математики и информатики

Минск
2010

УДК 519.216(075.8)
ББК 22.171я73
Л 34

Рекомендовано
Ученым советом факультета
прикладной математики и информатики
23 февраля 2010 г., протокол № 5

Р е ц е н з е н т
доктор физико-математических наук,
профессор *Н. Н. Труш*

Леваков, А. А.

Л 34 Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений : пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики / А. А. Леваков. — Минск : БГУ, 2010. — 23 с.

Пособие посвящено методам интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. Основное внимание уделено элементарным уравнениям, т. е. тем уравнениям решения, которых могут быть построены с помощью конечного числа элементарных операций над функциями, входящими в уравнения.

Для студентов факультета прикладной математики и информатики, а также для аспирантов и преподавателей этого факультета.

УДК 519.216(075.8)
ББК 22.171я73

Введение

Реальные объекты, функционирующие в условиях естественных помех, характеризуются некоторой неопределенностью. Описание таких систем при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений не всегда отражает действительную картину функционирования объекта. Зачастую стохастические дифференциальные уравнения дают более реалистическую математическую моделью явления.

Как возникают и каков вид стохастических дифференциальных уравнений поясним на следующем примере. Пусть $x(t)$ — координата в момент t достаточно малой частицы, находящейся в жидкости. Перемещение частицы состоит из двух компонент: смещения, вызываемого скоростью движения жидкости и смещения, вызываемого хаотическим характером теплового движения молекул жидкости. Пусть скорость движения жидкости в точке x в момент t равна $a(t,x)$. Относительно флуктуационной составляющей перемещения будем предполагать, что она является случайной величиной со средним значением равным нулю. Тогда перемещение частицы может быть приближенно записано следующим образом

$$x(t+\Delta t) - x(t) = a(t, x(t))\Delta t + \xi(t, \Delta t, x(t)).$$

Можно считать, что $\xi(t, \Delta t, x(t)) = \sigma(t, x(t))\xi(t, \Delta t)$, где $\sigma(t,x)$ характеризует свойства среды в точке x в момент времени t, а $\xi(t, \Delta t)$ — величина приращения, которая получилась бы при условии, что $\sigma(t,x) = 1$. Обычно свойства приращения $\xi(t, \Delta t)$ таковы, что оно совпадает с приращением процесса броуновского движения $W(t+\Delta t) - W(t)$. Следовательно, для приращения $x(t+\Delta t) - x(t)$ можно записать приближенную формулу

$$x(t+\Delta t) - x(t) \approx a(t, x(t))\Delta t + \sigma(t, x(t))(W(t+\Delta t) - W(t)).$$

После замены в этой формуле приращений на дифференциалы для $x(t)$ получаем дифференциальное уравнение

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t)dW(t)). \tag{0.1}$$

Ввиду отсутствия производной у $W(t)$ обычно применяемое определение дифференциала $dW(t)$ не имеет смысла. Для определения решения уравнения (0.1) его записывают и интегральной форме

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(t, x(t))dt + \int_0^t \sigma(t, x(t))dW(t)$$

и под решением уравнения (0.1) понимают решение этого интегрального уравнения, где первый интеграл является интегралом Лебега, а второй — интегралом Ито.

Данное пособие посвящено методам интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и предназначено для студентов факультета прикладной математики и информатики и студентов механико-математического факультета, изучающих экономику и финансы, где наиболее широко используются стохастические дифференциальные уравнения. Следует заметить, что стохастические дифференциальные уравнения начали изучаться сравнительно недавно во второй половине двадцатого века и еще нет сборников по стохастическим дифференциальным уравнениям таких как по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Все утверждения в пособии приведены без доказательств. Необходимые доказательства можно найти в учебниках, список которых приведен в конце пособия.

Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений

1. Определение решения стохастического дифференциального уравнения

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, d-мерный $(\mathcal{F}_t)-$ винеровский процесс $W(t)$ и функции $f: R_+ \times R^d \times \times \Omega \to R^d$, $g: R_+ \times R^d \times \Omega \to R^{d\times r}$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ)

$$dx(t,\omega) = f(t, x(t,\omega), \omega)dt + g(t, x(t,\omega), \omega)dW(t,\omega). \tag{0.2}$$

Определение 0.1. *Под решением $x(t,\omega)$ уравнения* (0.2) *с начальным условием $\eta(\omega)$ понимаем d-мерный непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный случайный процесс $x(t,\omega)$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, такой, что для каждого $t \geqslant 0$ $\int\limits_0^t \|f(s, x(s,\omega), \omega)\|ds < \infty$, $\int\limits_0^t \|g(s, x(s,\omega), \omega)\|^2 ds < \infty$ п. н. и для каждого $t \in R_+$ с вероятностью* 1 *имеет место равенство*

$$x(t,\omega) = \eta(\omega) + \int\limits_0^t f(s, x(s,\omega), \omega)ds + \int\limits_0^t g(s, x(s,\omega), \omega)dW(s,\omega),$$

где первый интеграл при каждом ω является интегралом Лебега, а второй интеграл — интеграл Ито (п. н. — почти наверное).

К элементарным стохастическим дифференциальным уравнениям мы относим те уравнения, для которых возможно построение решений с помощью элементарных операций (арифметических действий, дифференцирований, интегрирований, разрешений аналитических соотношений). Несмотря на то что при этом получаются громоздкие формулы, содержащие интегралы Лебега, Ито или Стратоновича, они все же дают возможность исследования свойств решений СДУ. В дальнейшем в основном мы рассматриваем одномерные элементарные стохастические дифференциальные уравнения $d = r = 1$.

2. Методы вычисления интегралов Лебега и Ито

Интегралы Лебега вычисляют, используя их связь с интегралами Римана: если $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ интегрируема по Лебегу и

$$(R)\int\limits_a^b f(x)dx = (L)\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu.$$

Для вычисления интегралов Ито используют формуму Ито или вытекающую из нее формулу интегрирования по частям для интегралов Ито.

Пусть $W(t)$ — $(\mathcal{F}_t)$-винеровский процесс; процессы $f : [0, a]\times\Omega \to \to R$, $g : [0, a] \times \Omega \to R$ принадлежат соответственно пространствам $\mathcal{L}_2^{\text{loc}}$, $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}$, где $\mathcal{L}_i^{\text{loc}}$ — множество всех измеримых $(\mathcal{F}_t)$-согласованных процессов Ψ таких, что $\int_0^a \|\Psi(s, \omega)\|^i ds < \infty$ п. н.; $X(0, \omega)$ — $(\mathcal{F}_0)$-измеримая случайная величина, а $X(t, \omega)$ — случайный процесс вида

$$X(t, \omega) = X(0, \omega) + \int_0^t f(s, \omega)ds + \int_0^t g(s, \omega)dW(s).$$

Формула Ито. Если функция $h : R_+\times R \to R$ непрерывна вместе с производными h'_t, h''_{x^2}, а $X(t, \omega)$— процесс, определенный выше, то с вероятностью 1

$$h(t, X(t, \omega)) = h(0, X(0, \omega)) + \int\limits_0^t\Big(h'_t(\tau, X(\tau, \omega)) + h'_x(\tau, X(\tau, \omega))f(\tau, \omega)+$$

$$+\frac{1}{2}h''_{x^2}(\tau, X(\tau, \omega))g^2(\tau, \omega)\Big)d\tau + \int\limits_0^t h'_x(\tau, X(\tau, \omega))g(\tau, \omega)dW(\tau).$$

Пусть $Y(t, \omega) = Y(0, \omega) + \int_0^t m(s, \omega)ds + \int_0^t k(s, \omega)dW(s)$ такой же процесс, как и $X(t, \omega)$. Тогда имеет место следующая формула интегрирования по частям

$$\int\limits_0^t X(s,\omega)(m(s,\omega)ds + k(s,\omega)dW(s)) = X(t,\omega)Y(t,\omega) - X(0,\omega)Y(0,\omega) -$$

$$- \int\limits_0^t Y(s,\omega)(f(s,\omega)ds + g(s,\omega)dW(s)) - \int\limits_0^t g(s,\omega)k(s,\omega)ds. \qquad (0.3)$$

В частности, если $f(s)$ абсолютно непрерывная функция, зависящая лишь от s. Тогда

$$\int\limits_0^t f(s)dW(s) = f(t)W(t) - \int\limits_0^t W(s)df(s). \qquad (0.4)$$

Пример 0.1. Вычислим интегралы $I_1 = \int_0^t W^2(s)dW(s)$, $I_2 = = \int_0^t s^2 dW(s)$. Возьмем $X(t) = W(t)$ и $h = x^3$. Тогда по формуле Ито получаем

$$dW^3(t) = 3W(t)dt + 3W^2(t)dW(t).$$

Отсюда $I_1 = \frac{1}{3}W^3(t) - \int\limits_0^t W(s)ds$. По формуле (0.4) имеем

$$I_2 = t^2 W(t) - 2\int\limits_0^t sW(s)ds.$$

3. Простейшие стохастические дифференциальные уравнения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $f : R_+ \times \ \Omega \to R$ и $g : R_+ \times \ \Omega \to R$ — непрерывные процессы, $W(t)$ — $(\mathcal{F}_t)$-винеровский процесс, x_0 — $(\mathcal{F}_0)$-измеримая случайная величина.

Простейшим стохастическим дифференциальным уравнением называют уравнение вида

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dW(t), \quad x(0) = x_0. \qquad (0.5)$$

Ясно, что процесс

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(\tau)d\tau + \int\limits_0^t g(\tau)dW(\tau), \quad t \in R_+,$$

является решением уравнения (0.5).

Пример 0.2. Решением начальной задачи

$$dx(t) = \arctan(t)dt + t^3 dW(t), \quad x(0) = 1.$$

является процесс $x(t) = 1 + \int\limits_0^t \arctan(s)ds + \int\limits_0^t s^3 dW(s) = 1 + \frac{t}{1+t^2} -$
$- \ln(1+t^2) + t^3 W(t) - 3\int\limits_0^t s^2 W(s)ds.$

4. Уравнения, приводимые к простейшим с помощью замены переменных. Линейные однородные уравнения

При построении решений конкретных уравнений и систем пытаются прежде всего преобразовать их к более простым уравнениям. Чаще всего при этом используют замену переменных, т. е. дважды непрерывно дифференцируемую функцию $y = v(t,x)$, имеющую обратную функцию вида $x = u(t,y)$. Согласно формуле Ито, уравнение

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t) \tag{0.6}$$

с помощью замены $y = v(t,x)$ приводится к уравнению

$$dy(t) = F(t,y(t))dt + G(t,y(t))dW(t),$$

где $F(t,y) = (v_t^{'} + v_x^{'} f + \frac{1}{2}(g^2 v_{xx}^{''}))\big|_{x=u(t,y)}$, $G(t,y) = v_x^{'} g\big|_{x=u(t,y)}$.

Уравнение приводимо с помощью замены переменных к простейшему тогда и только тогда, когда выполнено тождество

$$(g(\frac{g_t^{'}}{g^2} - (\frac{f}{g})_x^{'}) + \frac{1}{2} g_{x^2}{''})_x^{'} \equiv 0. \tag{0.7}$$

Для линейных однородных уравнений

$$dx(t) = f_1(t)x(t)dt + g_1(t)x(t)dW(t), x(0) = x_0, \qquad (0.8)$$

тождество (0.7)выполняется, следовательно, оно приводимо к простейшему. Соответствующее простейшее уравнение имеет вид

$$dy(t) = (f_1(t) - \frac{1}{2}g_1^2(s))dt + g_1(t)dW(t),$$

замена $x = \exp y$. Поэтому, процесс

$$x(t) = x_0 \exp(\int\limits_0^t (f_1(s) - 1/2g_1^2(s))ds + \int\limits_0^t g_1(s)dW(s))$$

является решением уравнения (0.8).

Пример 0.3. Простая модель роста популяции имеет вид

$$dN(t) = r(t)N(t)dt + N(t)dW(t), N(0) = N_0,$$

где $N(t)$— численность популяции в момент времени t. Рассматриваемое уравнение является линейным однородным. Процесс $x(t) = N_0 \exp(\int_0^t (r(s) - 1/2)ds + W(t))$ является его решением.

5. Линейные неоднородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к линейным неоднородным уравнениям с помощью замены переменных

Линейное неоднородное уравнение

$$dx(t) = (f_1(t)x(t) + f_2(t))dt + (g_1(t)x(t) + g_2(t))dW(t), x(0) = x_0, \quad (0.9)$$

в общем случае не приводимо к простейшему, но, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, его решения могут быть найдены методом вариации произвольных постоянных. Пусть $x_1(t)$ — решение уравнения (0.8) с $x_0 = 1$. Решение уравнения (0.9) будем искать в виде $x(t) = y(t)x_1(t)$. Легко проверить, что $y(t)$ удовлетворяет простейшему уравнению

$$dy(t) = x_1^{-1}(t)((f_2(t) - g_1(t)g_2(t))dt + g_2(t)dW(t)), y(0) = x_0.$$

Процесс

$$x(t) = x_1(t)(x_0 + \int\limits_0^t x_1^{-1}(s)(f_2(s) - g_1(s)g_2(s))ds + \int\limits_0^t x_1^{-1}g_2(s)dW(s)) \tag{0.10}$$

является решением уравнения (0.9). Таким образом, линейное неоднородное уравнение является элементарным.

Уравнение

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) \tag{0.11}$$

с $g(x) \neq 0,\ A'(x) \neq 0,$ приводимо с помощью замены переменных к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha + \beta y)dt + (\gamma + \delta y)dW(t), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R, \delta \neq 0, \tag{0.12}$$

тогда и только тогда, когда

$$(\frac{(gA')'}{A'})' \equiv 0, \tag{0.13}$$

где $A(x) = \frac{f}{g} - \frac{1}{2}g'$.

Аналогично, уравнение (0.11) с $g(x) \neq 0$ приводимо к (0.12) с $\delta = 0$, если и только если $(gA')' \equiv 0$.

Для уравнения

$$dx(t) = (ax^n(t) + bx(t))dt + kx(t)dW(t), \tag{0.14}$$

$n \neq 0, n \neq 1, a \neq 0, k \neq 0,$ тождество (0.13) выполняется. Легко проверить, что (0.14) приводимо к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (a + (b + \frac{1}{2}k^2 n)y(t))dt + ky(t)dW(t)).$$

Пример 0.4. Рассмотрим

$$dx(t) = (x^4(t) + 2x(t))dt + x(t)dW(t), x(0) = 2.$$

С помощью замены $y = -\frac{1}{3}x^{-3}$ это уравнение приводится к линейному неоднородному уравнению $dy = (1 + 4y)dt + ydW(t),\ y(0) = \frac{1}{24}$, решая которое находим решение исходного уравнения

$$x(t) = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\exp(\frac{7}{2}t + W(t))(-\frac{1}{24} + \int\limits_0^t \exp(-\frac{7}{2}s - W(s))ds)\right)^{-1/3}.$$

6. Сведение интегрирования СДУ к интегрированию уравнения в частных производных первого порядка и обыкновенного дифференциального уравнения

Рассмотрим СДУ

$$dx(t) = (f(x(t)) + \frac{1}{2}g(x(t))g^{'}(x(t)))dt + g(x(t))dW(t), \quad x(0) = x_0. \tag{0.15}$$

Пусть функция $h(\alpha, \beta)$ является решением задачи

$$\frac{\partial h(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = g(h(\alpha,\beta)), \quad h(\alpha, 0) = \alpha. \tag{0.16}$$

Построим функцию $\varphi(\alpha,\beta) = (h^{'}_{\alpha}(\alpha,\beta))^{-1}$ и уравнение

$$\frac{dD}{dt} = \varphi(D, W(t))f(h(D, W(t))), \quad D(0) = x_0. \tag{0.17}$$

Если $D(t)$ — решение задачи (0.17), то процесс $x(t) = h(D(t), W(t))$ является решением уравнения (0.15).

Таким образом, интегрирование СДУ (0.15) сводится к интегрированию уравнений (0.16) и (0.17).

В частности, если $g(x) = kx$, то $h(\alpha,\beta) = \alpha e^{k\beta}$, $\varphi(\alpha,\beta) = e^{-k\beta}$ и интегрирование СДУ

$$dx(t) = (f(x(t)) + \frac{1}{2}kx(t))dt + kx(t)dW(t), \quad x(0) = x_0,$$

сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{dD(t)}{dt} = e^{-kW(t)}f(D(t)e^{kW(t)}), \quad D(0) = x_0.$$

Пример 0.5. Проинтегрируем уравнение

$$dx(t) = (x^3(t) + 2x(t))dt + x^2(t)dW(t), \quad x(0) = x_0.$$

Уравнение (0.16) имеет вид $\frac{\partial h(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = h^2(\alpha,\beta)$, $h(\alpha, 0) = \alpha$. Легко найти, что $h(\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$, $\frac{dD(t)}{dt} = 2D(t) - D^2(t)W(t)$, $D(0) = x_0$. Отсюда

$$D(t) = \frac{x_0}{e^{-2t} + 2x_0\int_0^t e^{-2(t-\tau)}W(\tau)d\tau}$$

и, следовательно,

$$x(t) = \frac{x_0 e^{2t}}{1 - x_0 e^{2t} + 2x_0 \int_0^t e^{2\tau} W(\tau) d\tau}.$$

7. Преобразование СДУ с помощью теоремы Гирсанова

Пусть $x(t)$, $t \in [0,T], T > 0,$ — решение СДУ

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))B(t) \tag{0.18}$$

на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ с потоком $\mathfrak{F}_t$, соответствующее $(\mathfrak{F}_t)$-винеровскому процессу $B(t)$, $f : [0,T] \times R \to$ $\to R$, $g : [0,T] \times R \to R$ — непрерывные отображения и пусть $\gamma(t,x)$ — измеримая по Борелю функция, удовлетворяющая условию $E(\exp(\frac{1}{2}\int_0^t |\gamma(s,x(s))|^2 ds)) < \infty$ для каждого $t \in [0,T]$. Тогда процесс

$$M(t) = \exp(\int\limits_0^t \gamma(s, x(s))dB(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\gamma(s, x(s))\|^2 ds, t \in [0,T],$$

является $(\mathfrak{F}_t)$-мартингалом [1, с. 183]. Определим меру Q на $(\Omega, \mathfrak{F}_T)$ соотношением $dQ = M(T)dP$. Процесс $W(t) = B(t) - \int_0^t \gamma(s, x(s))ds$, $t \in [0,T]$, является $(\mathfrak{F}_t)$-винеровским процессом на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}_T, Q)$ с потоком $\mathfrak{F}_t$ и

$$dx(t) = (f(t, x(t)) + g(t, x(t))\gamma(t, x(t)))dt +$$

$$+ g(t, x(t))dW(t), t \in [0,T] \tag{0.19}$$

(теорема Гирсанова, [1, с. 183]). Таким образом, интегрирование СДУ (0.19) сводится к интегрированию уравнения (0.18).

Если уравнение $dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t)$ является элементарным, то таким же будет и уравнение $dx(t) = (f(t, x(t)) +$ $+ h(t, x(t))g(t, x(t)))dt + g(t, x(t))dW(t)$, где $h(t,x)$ — ограниченная измеримая по Борелю функция. В частности, уравнение $dx(t) =$

$$= (a(t) + b(t)x(t) + (c(t)x(t) + m(t))h(t, x(t)))dt + (c(t)x(t) + m(t))dW(t)$$

является элементарным.

Пример 0.6. Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = \sin x(t)dt + x(t)dW(t), x(0) = x_0. \tag{0.20}$$

Возьмем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, $(\mathcal{F}_t)$-винеровский процесс $B(t)$ и рассмотрим СДУ $d\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t)dB(t)$, $x(0) = x_0$. Процесс $\tilde{x}(t) = x_0 \exp(B(t) - \frac{1}{2}t)$ является решением последнего уравнения. Определим меру Q на $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, $T > 0$, соотношением $dQ = M_T dP$, где

$$M_T = \exp(\int_0^T \gamma(x_0 e^{B(s) - \frac{1}{2}s}))dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma(x_0 e^{B(s) - \frac{1}{2}s})^2 ds,$$

$$\gamma(x) = -\frac{\sin x}{x}, x \neq 0, \gamma(0) = 1.$$

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, T]$, процесс

$$W(t) = B(t) + \int_0^t \frac{\sin(x_0 e^{B(s) - \frac{1}{2}s})}{x_0 e^{B(s) - \frac{1}{2}s}} ds$$

является $(\mathcal{F}_t)$-винеровским процессом, а процесс $(\tilde{x}(t), W(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является решением СДУ (0.20).

8. Преобразование СДУ с помощью замены времени

Рассмотрим СДУ

$$dx(t) = \rho(y(t), x(t)) f(y(t), x(t))dt + \rho^{\frac{1}{2}}(y(t), x(t)) g(y(t), x(t))dW(t),$$

$$dy(t) = \rho(y(t), x(t))dt, \quad y(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \tag{0.21}$$

где $\rho : R_+ \times R \to R_+$, $f : R_+ \times R \to R$, $g : R_+ \times R \to R$ — непрерывные функции. Пусть $(x(t), y(t))$ — решение системы (0.21)на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, соответствующее $(\mathcal{F}_t)$-винеровскому процессу $W(t)$. Предположим, что $\rho(y(t), x(t)) > > 0$. Траекториями процесса $y(t) = \int_0^t \rho(y(s), x(s)ds)$ являются непрерывные строго возрастающие функции. Пусть $\lim\limits_{t \to e-0} y(t) = l$. Существует непрерывный строго возрастающий процесс $\sigma(t)$, определенный на $[0, l[$ такой, что $y(\sigma(\tau)) = \tau$, $\sigma(y(t)) = t$.

Процесс $\tilde{x}(t)$ является решением уравнения

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t). \tag{0.22}$$

Таким образом, построение решений уравнения (0.22) может быть сведено к построению решений системы (0.21).

Если уравнение $dx(t) = f_1(x(t))dt + g_1(x(t))dW(t)$ является элементарным, то уравнение $dx(t) = v^2(x(t))f_1(x(t))dt + v(x(t))g_1(x(t))dW(t)$, где $v(x)$ — непрерывная функция, $v(x) > 0$, тоже элементарное, так же как и уравнения

$$dx(t) = (v^2(x(t))f_1(x(t)) + h(x(t))g_1(x(t))v(x(t)))dt + v(x(t))g_1(x(t))dW(t),$$

$$dx(t) = (f_1(x(t)) + h(x(t))g_1(x(t)))v^2(x(t))dt + v(x(t))g_1(x(t))dW(t),$$

где $h(x)$ — ограниченная непрерывная функция. В частности, элементарным является уравнение

$$dx(t) = (ax(t) + b + h(x(t))(cx(t) + d))v^2(x(t)))dt + v(x(t))(cx(t) + d)dW(t),$$

$a, b, c, d \in R$.

Пример 0.7. Найдем решение начальной задачи

$$dx(t) = x(t)(x^2(t) + 1)^2dt + (x^2(t) + 1)dW(t), x(0) = x_0. \tag{0.23}$$

Система (0.21) для уравнения (0.23) имеет вид

$$\begin{cases} d\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t)dt + dW(t), & x(0) = x_0, \\ d\tilde{y}(t) = \frac{dt}{(\tilde{x}^2(t)+1)^2}, & y(0) = y_0. \end{cases} \tag{0.24}$$

Процесс

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = x_0e^t + \int_0^t e^{t-\tau}dW(\tau), \\ \tilde{y}(t) = \int_0^t \frac{ds}{((x_0e^s + \int_0^s e^{t-\tau}dW(\tau))^2+1)^2} \end{cases}$$

является решением системы (0.24). Пусть $\sigma(t)$ — процесс обратный к $y = \tilde{y}(t)$, тогда $x(t) = x_0e^{\sigma(t)} + \int_0^{\sigma(t)} e^{\sigma(t)-\tau}dW(\tau)$ — решение уравнения (0.23).

9. Переход к уравнению Стратоновича

Рассмотрим СДУ Стратоновича

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t)) \circ dW(t), \quad x(0) = x_0, \tag{0.25}$$

где $f : R_+ \times R \to R$, $g : R_+ \times R \to R$ соответственно непрерывно дифференцируемая и трижды непрерывно дифференцируемые функции. Решение $x = x(t)$ уравнения Стратоновича с начальным условием $x(0) = x_0$ является решением уравнения Ито

$$dx(t) = (f(t, x(t) + c(t, x(t))))dt + g(t, x(t))dW(t), \tag{0.26}$$

где

$$c(t, x(t)) = \frac{1}{2} g(t, x(t)) g_x^{'}(t, x(t))).$$

Обратно, решение $x = x(t)$ уравнения Ито

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t), \quad x(0) = x_0,$$

является решением уравнения Стратоновича

$$dx(t) = (f(t, x(t)) - c(t, x(t)))dt + g(t, x(t)) \circ dW(t), \quad x(0) = x_0.$$

Интегралы Стратоновича не являются мартингалами, каковыми являются интегралы Ито, что дает интегралам Ито важное преимущество при исследовании решений СДУ, но интеграл Стратоновича более удобен при преобразованиях уравнений, так как вместо формулы Ито имеет место более привычная формула

$$dF(x(t)) = F^{'}(x(t)) f(t, x(t))dt + F^{'}(x(t)) g(t, x(t)) \circ dW(t),$$

если $F \in C^3(R)$, $dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t)) \circ dW(t)$.

Пример 0.8. Для уравнения Ито

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t), \quad x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид $dx(t) = x^2(t) \circ dW(t)$. Последнее уравнение имеет решение $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 W(t)}$, которое является также решением исходного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = f_1(t)r(x(t))dt + g_1(t)r(x(t)) \circ dW(t), \quad x(0) = x_0. \qquad (0.27)$$

Если $\frac{dR(x)}{dx} = \frac{1}{r(x)}$, то $d(R(x(t))) = f_1(t)dt + g_1(t) \circ dW(t)$. Процесс $x(t) = R^{-1}(R(x_0) + \int_0^t f_1(s)ds + \int_0^t g_1(s) \circ dW(s))$, где R^{-1} — функция, обратная к $R(x)$, является решением уравнения (0.27).

Уравнение $dx(t) = r(x(t))(a(t)R(x(t)) + b(t))dt + r(x(t))(m(t)R(x(t)) + n(t)) \circ dW(t)$, где $\frac{dR(x)}{dx} = \frac{1}{r(x)}$, с помощью замены $y = R(x)$ сводится к линейному неоднородному уравнению $dy(t) = (a(t)y(t) + b(t))dt + (m(t)y(t) + n(t)) \circ dW(t)$.

Пример 0.9.

$$dx(t) = \frac{x^3(t)+1}{x^2(t)}dt + \frac{2x^3(t)+3}{x^2(t)} \circ dW(t), \quad x(0) = 1,$$

$$y = x^3, \quad dy(t) = 3(y+1)dt + 3(2y+3) \circ dW(t),$$

$$dy(t) = (21y+30)dt + 3(2y+3)dW(t), \quad y(0) = 1,$$

$$y(t) = \exp(3t + 6W(t))(1 - 24\int\limits_0^t \exp(-2s - 6W(s))ds +$$

$$+ \int\limits_0^t 9\exp(-3s - 6W(s))dW(s).$$

Пример 0.10. Уравнение $dx(t) = x(t)(\theta(t) - kln(x(t)) + \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma x(t)dW(t), \quad x(0) = x_0 > 0,\ k, \sigma \in R_+, \theta \in C(R_+),$

называют уравнением Блэка — Карасинского. Перейдем к уравнению Стратоновича

$$dx(t) = x(t)(\theta(t) - k\ln(x(t)))dt + \sigma x(t) \circ dW(t), \quad x(0) = x_0.$$

С помощью замены $u = \ln(x)$ последнее уравнение приводится к линейному уравнению

$$du(t) = (\theta(t) - kx(t))dt + \sigma \circ dW(t), \quad u(0) = \ln(x_0).$$

Решая его и возвращаясь к исходным переменным, имеем

$$x(t) = \exp\left(\exp(-kt)\big(\ln(x_0) + \int\limits_0^t e^{-ks}\theta(s)ds + \sigma \int\limits_0^t e^{-ks}dW(s)\big)\right).$$

10. Линейные системы стохастических дифференциальных уравнений

Рассмотрим ССДУ

$$dx(t) = (f(t) + F(t)x(t))dt + \sum_{i=1}^{r}(g_i(t) + G_i(t)x(t))dW_i(t), \qquad (0.28)$$

где $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_r(t))$ — r-мерное броуновское движение, $F(t), G_i(t)$ — $(d \times d)$-матричные, $f(t), g_i(t)$ — d-векторные измеримые по Борелю функции. Следующая формула аналогична формуле Коши для обыкновенных дифференциальных систем и доказывается так же, как формула (0.10). Процесс

$$x(t) = \Phi(t)(x(0) + \int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)(f(s) - \sum_{i=1}^{r} G_i(s)g_i(s))ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)\sum_{i=1}^{r} g_i(s)dW_i(s)),$$

где $\Phi(t)$ — решение соответствующей однородной системы

$$d\Phi(t) = F(t)\Phi(t)dt + \sum_{i=1}^{r} G_i(t)\Phi(t)dW_i(t), \quad \Phi(0) = I, \qquad (0.29)$$

является решением ССДУ (0.28). В общем случае, даже для постоянных матриц F и G_i решение системы (0.29) не может быть найдено в явном виде. Однако если матрицы F, G_i — постоянны и попарно коммутируют, т. е. $FG_i = G_iF$, $G_iG_j = G_jG_i$ для всех i, j, то

$$\Phi(t) = \exp((F - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} G_i^2)t + \sum_{i=1}^{r} G_iW_i(t)).$$

11. Уравнения Колмогорова

Уравнения Колмогорова устанавливают связь между стохастическими дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных. Они дают возможность находить основные характеристики ССДУ такие, как плотность вероятностей решений ССДУ, математические ожидания функционалов от решений и т. д.

1. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t),$$

где $f : R_+ \times R \to R$ и $g : R_+ \times R \to R$— достаточно гладкие функции. **Одномерной плотностью распределения** решения $x(t)$ в момент t называют такую функцию $p(t, x)$, что

$$P^{x(t)}(B) = \int\limits_B p(t, x)dx \quad \forall B \in \beta(R),$$

где интегрирование проводится по мере Лебега в R.

Пусть для решения $x(t)$ с начальным распределением ν при всех $t \geqslant 0$ существует одномерная плотность распределения $p(t, x)$. Если функции $p(t, x)$, $f(t, x)$, $g(t, x)$ достаточно гладкие, то $p(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\big[f(t,x)p(t,x)\big]+ \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[g^2(t,x)p(t,x)] \qquad (0.30)$$

и начальному условию $p(0, x) = h(x)$, где $h(x)$ — плотность вероятности ν.

Уравнение (0.30) называется **прямым (вторым) уравнением Колмогорова или уравнением Фоккера — Планка — Колмогорова**.

Пример 0.11. Найдем плотность распределения решения стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t) = x(t)dt + adW(t), \quad x(0) = x_0, a > 0.$$

Искомая плотность является решением второго уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} - x\frac{\partial p(t,x)}{\partial x} - p(t,x), \quad p(0,x) = q(x),$$

где $q(x)$ — плотность распределения случайной величины x_0. Функция

$$p(t,x) = e^{-t}\left(\frac{1}{a\sqrt{2\pi(t+a^2/4)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{2a^2(t+a^2/4)})q(\xi)d\xi\right)$$

— решение уравнения Колмогорова [7], следовательно, найденная функция $p(t,x)$ — искомая плотность.

Допустим теперь, что для любых $(s,y) \in R_+ \times R$ уравнение

$$x(t) = y + \int\limits_s^t f(\tau, x(\tau))d\tau + \int\limits_s^t g(\tau, x(\tau))dW(\tau) \qquad (0.31)$$

имеет решение $x = \varphi_{s,y}(t)$. Определим вероятности перехода для уравнения (0.31) $P_{s,y}(t,A) = P(\varphi_{s,y}(t) \in A)$. Допустим, что существует плотность $p_{s,y}(t,x)$ для вероятности $P_{s,y}(t,A)$, т. е. такая функция, что

$$P_{s,y}(t,B) = \int\limits_B p_{s,y}(t,x)dx \quad \forall B \in \beta(R).$$

Если функции $p_{s,y}(t,x)$, $f(t,x)$, $g(t,x)$ достаточно гладкие, то функция $p_{s,y}(t,x)$ удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\frac{\partial p_{s,y}(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\big[f(t,x)p_{s,y}(t,x)\big] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[g^2(t,x)p_{s,y}(t,x)], \quad t \geqslant s.$$

2. Пусть $X_{s,x}(t)$ — решение уравнения

$$X(t) = x + \int\limits_0^t f(s+r, X(r))dr + \int\limits_0^t g(s+r, X(r))dW(r) \qquad (0.32)$$

и пусть

$$F(s, X_{s,x}) = \int\limits_0^{T-s} a(s+t, X_{s,x}(t))\exp(-\int\limits_0^t c(s+r, X_{s,x}(r)dr)dt+$$

$$+b(X_{s,x}(T-s))\exp(-\int\limits_0^{T-s} c(s+r,X_{s,x}(r))dr),$$

$$v(s,x)=E(F(s,X_{s,x})).$$

(E— математическое ожидание). Тогда функция $v(t,x)$ при всех $(t,x)\in[0,T]\times R$ при выполнении некоторых естественных условий удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}g^2(t,x))+$$

$$+\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}f(t,x)-c(t,x)v(t,x)+a(t,x)=0,\quad v(T,x)=b(x).\quad (0.33)$$

Уравнение (0.33) называется **первым или обратным уравнением Колмогорова**.

Пример 0.12. Пусть $x_y(t)$— решение уравнения

$$x(t)=y+\int\limits_0^t(2-x(\tau))d\tau+\int\limits_0^t\sqrt{x(\tau)}dW(\tau).$$

Найдем $E(\exp(-x_y(1-s))), 0\leqslant s\leqslant 1$. Функция $u(s,y)=E(\exp(-$ $-x_y(1-s)))$ является решением следующего обратного уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{2}y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(2-y)\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad u(1,y)=e^{-y}.$$

Решение последнего уравнения будем искать в виде $u(s,y)=$ $=e^{A(s)-yB(s)}$. Подставив эту функцию в уравнение получаем для $A(s)$ и $B(s)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A^{'}(s)=2B(s),\quad A(0)=0,$$

$$B^{'}(s)-B(s)=\frac{1}{2}B^2(s),\quad B(1)=1.$$

Второе уравнение является уравнением Бернулли. Легко найти его решение, а затем и решение всей системы

$$B(s)=\frac{\exp(s)}{3/2-1/2\exp(s)},\quad A(s)=-2\ln(3/2-1/2\exp(s)).$$

Таким образом,

$$E(\exp(-x_y(1-s))) = (3/2 - 1/2\exp(s))^{-2}\exp(\frac{-y\exp(s)}{3/2-1/2\exp(s)}).$$

12. Задачи

I. Используя формулу Ито проверить, что процесс $x(t) = (x_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}W(t))^3$ является решением уравнения $dx(t) = \frac{1}{3}x^{1/3}(t)dt + x^{2/3}(t)dW(t), x(0) = x_0$.

II. Проинтегрировать уравнения:

II_1. $dx(t) = \frac{1}{t^2+1}dt + tdW(t), x(0) = 1$ (простейшее уравнение),

II_2. $dx(t) = 2x(t)dt + e^t x(t)dW(t), x(0) = 1$ (линейное однородное уравнение),

II_3. $dx(t) = ((t+1)x(t)+2)dt + (e^t x(t) + t)dW(t), x(0) = 0$ (линейное неоднородное уравнение),

II_4. $dx(t) = (x^{2/3}(t) + 2x(t))dt + 3x(t)dW(t), x(0) = 1$ (с помощью замены $y = 3x^{1/3}$ приводится к линейному неоднородному уравнению),

II_5. $dx(t) = (x(t) + \frac{x(t)+1}{x^2(t)+1})dt + (x(t)+1)dW(t), x(0) = 0$ (использовать теорему Гирсанова),

II_6. $dx(t) = \frac{3}{2}x^5(t)dt + x^3(t)dW(t), x(0) = 1$, (перейти к уравнению Стратоновича).

III. Показать, что уравнение $dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t), x(0) = x_0$, имеет решение $x(t) = \varphi(x_0, t, \int\limits_0^t a(s)dW(s))$, если функции $f(x), g(x)$ непрерывно дифференцируемы, а функции $\varphi(x_0, t, u)$, $a(t)$ удовлетворяют системе

$$a(t)\varphi_u^{'} = g(\varphi),$$

$$\varphi_t^{'} + \frac{1}{2}a^2(t)\varphi_{u^2}^{''} = f(\varphi),$$

$$\varphi(x_0, 0, 0) = x_0.$$

Применить это утверждение к уравнению

$$dx(t) = x(t)(\alpha - \beta\ln|x(t)| + \frac{1}{2})dt + x(t)dW(t), \quad \alpha, \beta \in R,$$

и показать, что оно имеет решение $x(t) =$

$$= \operatorname{sign}(x_0)\exp\left(\left(\int\limits_0^t \exp(\beta s)dW(s) + \ln|x_0| + \alpha\int\limits_0^t \exp(\beta s)ds\right)\exp(-\beta t)\right).$$

Литература

1. *Ватанабэ С.*, Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. — М.: Наука. 1986. — 445 с.

2. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука. 1968. — 496 с.

3. *Леваков А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения / А. А. Леваков. — Минск: БГУ. 2009. — 231 с.

4. *Липцер Р.Ш.* Статистика случайных процессов / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. — М.: Наука. 1974. — 696 с.

5. *Медведев Г.А.* Диффузионные модели в финансовом анализе / Г. А. Медведев. — Минск: БГУ. 2010. — 159 с.

6. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения / Б. Оксендаль. — М.: Мир. 2003. — 406 с.

7. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин . — М.: Физматлит. 2001. — 576 с.

8. *Ширяев А.Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. — М.: Наука. 1989.— 640 с.

9. *Gard, T. C.* Introduction to stochastic differential equations / T. C. Gard. — 1988. — 234 p.

Содержание

Учебное издание

Леваков Анатолий Афанасьевич

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *А. А. Леваков*

Подписано в печать 12.05.2010. Формат $60 \times 84/16$. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл.печ.л. 1,4. Уч.-изд.л. 0,88.
Тираж 50 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.