БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра высшей математики

А. А. Леваков

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА И ИТО

Пособие
для студентов факультета
прикладной математики и информатики

Минск
2010

УДК 517.518.12(075.8)
ББК 22.161.6я73
Л 34

Рекомендовано
Ученым советом факультета
прикладной математики и информатики
4 мая 2010 г., протокол № 6

Р е ц е н з е н т
доктор физико-математических наук,
профессор *Н. Н. Труш*

Леваков, А. А.

Л 34 Введение в теорию интегралов Лебега и Ито : пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики / А. А. Леваков. — Минск : БГУ, 2010. — 24 с.

В пособии с единых позиций введены интегралы Лебега и Ито и приведены их основные свойства. Основное внимание уделено тем разделам теории интегралов Лебега и Ито, которые используются в теории стохастических дифференциальных уравнений.

Для студентов факультета прикладной математики и информатики, а также для аспирантов и преподавателей этого факультета.

УДК 517.518.12(075.8)
ББК 22.161.6я73

Введение

Реальные объекты, функционирующие в условиях естественных помех, характеризуются некоторой неопределенностью. Если моделью процесса является обыкновенное дифференциальное уравнение $dx(t) = f(t, x(t))dt$, то для получения модели, учитывающей помехи типа белого шума, к правой части дифференциального уравнения прибавляют слагаемое $g(t, x(t)dW(t))$ и в качестве модели используют стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t)$$

или в интегральной форме

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(t, x(t))dt + \int\limits_0^t g(t, x(t))dW(t),$$

где первый интеграл является интегралом Лебега, а второй — интегралом Ито.

Данное пособие является введением в теорию интегралов Лебега и Ито и предназначено для студентов факультета прикладной математики и информатики и студентов механико-математического факультета, изучающих экономику и финансы, где наиболее широко используются стохастические дифференциальные уравнения. Все утверждения в пособии приведены без доказательств. Необходимые доказательства можно найти в учебниках, список которых приведен в конце пособия.

Введение в теорию интегралов Лебега и Ито

1. Мера Лебега

На числовой прямой возьмем отрезок $[a,b]$. Подмножества этого отрезка одного из видов $\alpha < x < \beta, \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \alpha \leqslant x < \beta, \alpha < x \leqslant \beta$ называем промежутком с концами α, β (промежуток пуст, если $\alpha > \beta$). Мерой промежутка $|\alpha,\beta|$ считаем его длину, т. е. число $m(|\alpha,\beta|) = \beta - \alpha$ (если промежуток пуст, то его мера равна нулю). Подмножество D отрезка $[\alpha,\beta]$ называем **элементарным**, если оно является объединением конечного числа непересекающихся промежутков B_k. Определим меру элементарного множества следующим образом: $m(D) = \sum_k m(B_k)$. **Верхней мерой** $\mu^*(A)$ множества $A \in [a,b]$ называем число

$$\inf_{A \subset D} m(D),$$

где нижняя грань берется по всевозможным элементарным множествам D, содержащим A. **Нижней мерой** $\mu_*(A)$ множества A называем число

$$b - a - \mu^*([a,b] \backslash A).$$

Множество A называется **измеримым в смысле Лебега**, если

$$\mu^*(A) = \mu_*(A).$$

Общее значение $\mu(A)$ верхней и нижней мер для измеримого множества A называется его **лебеговой мерой**. Для измеримости множества A необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовало элементарное множество D, что

$$\mu^*(A \triangle D) < \varepsilon,$$

где $A \triangle D$ — симметрическая разность множеств A и D. Таким образом измеримыми являются те и только те множества, которые могут быть с любой степенью точности аппроксимированы элементарными множествами.

Свойства меры Лебега и измеримых по Лебегу множеств.

1. Объединение и пересечение счетного числа измеримых множеств являются измеримыми множествами.

2. Если последовательность (A_n) непересекающихся измеримых множеств такова, что $A = \bigcup\limits_n A_n$, то

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n).$$

Это свойство меры Лебега называется σ-аддитивностью.

3. Всякое счетное множество измеримо и его мера равна нулю.

Выше мы рассматривали на прямой те множества, которые являются подмножествами отрезка $[a, b]$. Нетрудно освободиться от этого ограничения, например, следующим образом. Представим всю прямую как объединение отрезков $E_n = \{n \leqslant x \leqslant n+1\}$, n— целое. Скажем, что множество A измеримо, если его пересечение $A_n = A \bigcap E_n$ с каждым из этих отрезков измеримо. Если ряд $\sum_n \mu(A_n)$ сходится , то его сумму называем мерой множества A. В противном случае говорят, что множество A имеет бесконечную меру.

Мы построили лебегову меру на прямой. Аналогично может быть построена лебеговская мера на плоскости или вообще на любом конечномерном евклидовом пространстве. В каждом из этих случаев мера строится по одному и тому же образцу: исходя из меры для некоторой системы простейших множеств (промежутков в случае прямой, прямоугольников в случае плоскости и т. п.) определяют меру вначале для конечных объединений таких множеств, а потом распространяют ее на более широкий класс множеств — на множества, измеримые по Лебегу. Сами определения и свойства измеримых множеств сохраняются в пространствах любой размерности.

2. Измеримые по Лебегу функции

Функция $f : [a, b] \to R$ называется **измеримой по Лебегу**, если при любом $a \in R$ измеримо по Лебегу множество

$$\{x | f(x < a)\}.$$

Функция $f(x)$ называется **простой**, если она измерима и принимает конечное число значений. Функция $f(x)$, принимающая конечное число различных значений $y_1, \ldots, y_n$ измерима в том и только в том случае, если все множества $A_n = \{x | f(x) = y_n\}$ измеримы.

Свойства измеримых функций.

1. Для любой измеримой функции $f : [a,b] \to R$ найдется последовательность простых функций $f_n(x)$ таких, что $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$, для всех $x \in [a,b]$.

Если к тому же $f(x) \geqslant 0$, то найдется последовательность простых функций $f_n(x)$ таких , что $f_n(x) \uparrow f(x)$, $n \to \infty$, для всех $x \in [a,b]$.

2. Сумма разность и произведение двух измеримых функций измеримы. Частное двух измеримых функции измеримо при условии, что знаменатель не обращается в нуль.

Последовательность функций $f_n : [a,b] \to R$ называется сходящейся почти всюду к функции $f(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (0.1)$$

для почти всех $x \in [a,b]$ (т. е. множества тех точек x, в которых равенство (0.1) не выполняется, имеет меру нуль).

3. Если последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду на $[a,b]$, то $f(x)$ также измерима.

4. Пусть $f(x)$— измеримая функция. Тогда $\forall \delta > 0$ существует непрерывная функция $\varphi(x)$, что

$$\mu\{x | f(x) \neq \varphi(x)\} < \delta,$$

т. е. измеримая функция становится непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.

3. Интеграл Лебега

Введем сначала понятие интеграла Лебега для простых функций. Пусть $f : [a,b] \to R$— некоторая простая функция, принимающая значения $y_1, \ldots, y_n, y_i \neq y_j$ при $i \neq j$.

Интеграл от простой функции f определим равенством

$$\int\limits_{[a,b]} f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \qquad (0.2)$$

где $A_n = \{x | f(x) = y_n\}$.

Рассмотрим теперь неотрицательную измеримую по Лебегу функцию $f : [a,b] \to R_+$. Существует последовательность (f_n)— простых неотрицательных функций таких, что $f_n(x) \uparrow f(x)$, $n \to \infty$, для каждого $x \in [a,b]$. Величина

$$\int\limits_T f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_T f_n(x)d\mu$$

называется **интегралом Лебега** от f по мере μ (интеграл может принимать значение $+\infty$.) Определение корректно, т. к. предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности f_n.

Пусть $f(x)$— произвольная измеримая функция и $f^+(x) = \max(f(x),0)$, $f^-(x) = -\min(f(x),0)$, и по крайней мере один интеграл $\int_T f^+(x)d\mu$, $\int_T f^-(x)d\mu$, конечен. Тогда по определению полагают

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = \int\limits_{[a,b]} f^+(x)d\mu - \int\limits_{[a,b]} f^-(x)d\mu.$$

Функцию f называют **интегрируемой по Лебегу**, если $\int_T |f(t)|d\mu < \infty$.

Если A — измеримое по Лебегу подмножество $[a,b]$, то под интегралом $\int_A f(x)d\mu$ понимают $\int_{[a,b]} f(x)1_A(x)d\mu$ (здесь и далее $1_A(x)$ — индикаторная функция множества A, т. е. $1_A(x) = 1$, если $x \in A$ и $1_A(x) = 0$, если $x \subsetneq A$).

Свойства интеграла Лебега.

1. $\int_A d\mu = \mu(A)$.

2. Для любых $\alpha, \beta \in R$ и любых интегрируемых на A функций $f(x)$ и $g(x)$

$$\int\limits_A (\alpha f(x) + \beta g(x))d\mu = \alpha \int\limits_A f(x)d\mu + \beta \int\limits_A g(x))d\mu.$$

(линейность интеграла Лебега).

3. Ограниченная измеримая на A функция интегрируема на A.

4. Если $\mu(A) = 0$, то $\int_A f(x) = 0$.

5. Если $f(x) \geqslant g(x)$, то $\int_A f(x)d\mu \geqslant \int_A g(x)d\mu$.

6. Функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на A одновременно.

7. Если $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$\int\limits_A f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f(x)d\mu,$$

причем из существования интеграла в левой части последнего равенства вытекает существование интегралов и абсолютная сходимость ряда в правой части (σ - аддитивность интеграла Лебега).

8. Если $f(x)$ интегрируема на A функция, то $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0,$ что

$$\Big| \int\limits_e f(x) d\mu \Big| < \varepsilon$$

для всякого измеримого множества e такого, что $\mu(e) < \delta$ (абсолютная непрерывность интеграла Лебега).

9. Если последовательность $(f_n(x))$ на A сходится к $f(x)$ почти всюду и для всех n и $x \in A$

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ интегрируема на $A,$ то предельная функция $f(x)$ интегрируема на A и

$$\int\limits_a f_n(x) d\mu \to \int\limits_A f(x) d\mu$$

(предельный переход под знаком интеграла Лебега).

10. Если $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b],$ то $f(x)$ интегрируема по Лебегу и

$$(R) \int\limits_a^b f(x) dx = (L) \int\limits_{[a,b]} f(x) d\mu.$$

4. Пространства $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$

Рассмотрим множество всех интегрируемых функций $f : [a,b] \to$ $\to R.$ Это множество с обычными операциями сложения функций и умножения функций на вещественные числа является векторным пространством. В нем можно ввести норму, положив

$$\|f\| = \int\limits_{[a,b]} |f(x)| d\mu. \qquad (0.3)$$

Две функции f и g называют эквивалентными, если $\mu\{x|f(x) \neq = g(x)\} = 0,$ т. е. если они совпадают почти всюду.

Пространством $\mathbf{L_1}$ называется нормированное пространство, элементами которого служат классы эквивалентных между собой интегрируемых функций $f : [a, b] \to R,$ а норма определяется формулой (0.3).

Пространством $\mathbf{L_2}$ называется евклидово пространство, элементами которого служат классы эквивалентных между собой функций таких, что их квадраты интегрируемы, а скалярное произведение определяется формулой

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{[a,b]} f(x)g(x)d\mu.$$

Функции с интегрируемым квадратом являются интегрируемыми. Пространства L_1 и L_2 являются **полными**, т. е. всякая фундаментальная последовательность является сходящейся.

5. Интеграл Лебега — Стилтьеса

Вводя понятие меры Лебега, мы исходили из длины промежутка. Можно ввести меру несколько более общим способом. Пусть $F(t)$— некоторая неубывающая, непрерывная слева функция, заданная на отрезке $[a, b]$.Положим $m((\alpha, \beta)) = F(\beta) - F(\alpha + 0),$ $m([\alpha, \beta]) = F(\beta + +0) - F(\alpha),$ $m((\alpha, \beta]) = F(\beta+0) - F(\alpha+0),$ $m((\alpha, \beta)) = F(\beta) - F(\alpha).$ Далее повторяя все рассуждения, приведенные при определении меры Лебега, можно построить некоторую меру μ_F с теми же свойствами, что и мера Лебега. Класс множеств измеримых относительно μ_F будет, вообще говоря, зависеть от выбора функции $F,$ но при любом выборе F все счетные объединения и пересечения открытых множеств будут μ_F измеримыми. Меры, полученные с помощью той или инной функции $F,$ называются **мерами Лебега — Стилтьеса**. В частности, если $F(t) \equiv t,$ то мера Лебега — Стилтьеса совпадает с мерой Лебега.

Если F— функция скачков, $x_1, x_2, \ldots$— ее точки разрыва, а $h_1, h_2, \ldots$ — величины ее скачков в этих точках. Тогда отвечающая этой функции мера $\mu(F)$ устроена следующим образом: все подмножества отрезка $[a, b]$ измеримы и мера множества A есть

$$\mu(A) = \sum_{x_i \in A} h_i.$$

Такая мера называется **дискретной**.

Пусть F — абсолютно непрерывная неубывающая функция и $f = F'$ — ее производная. Тогда соответствующая мера μ_F определена для всех измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[a, b]$, причем для каждого такого множества A

$$\mu_F(A) = \int\limits_A f(x) d\mu.$$

Мера μ_F, отвечающая абсолютно непрерывной функции F, называется **абсолютно непрерывной мерой**.

Если F — сингулярная непрерывная функция, то отвечающая ей мера μ_F целиком сосредоточена на том множестве, мера Лебега которого равна нулю. Мера μ_F называется при этом **сингулярной**.

Всякая мера Лебега — Стилтьеса может быть представлена в виде суммы дискретной меры, абсолютно непрерывной и сингулярной.

Интеграл Лебега, построенный по мере Лебега — Стилтьеса, называется **интегралом Лебега — Стилтьеса**.

6. Измеримые функции

Пусть T — некоторое множество. Говорят, что система $\mathcal{F}$ его подмножеств является **алгеброй**, если $T \in \mathcal{F}, A^c = T \setminus A \in \mathcal{F}, A \cup B \in \mathcal{F}$ $\forall A, B \in \mathcal{F}$. Алгебра называется **$\sigma$-алгеброй**, если с каждой последовательностью множеств $A_1, A_2, \ldots,$ принадлежащих $\mathcal{F}$, объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ принадлежит $\mathcal{F}$. Множество T с σ-алгеброй $\mathcal{F}$ называется **измеримым пространством** $(T, \mathcal{F})$. Если S — система подмножеств из T, то пересечение всех σ-алгебр, содержащих S, является σ-алгеброй и называется σ-алгеброй, порожденной S. В частности, если $T = R^n$, то σ-алгебра, порожденная открытыми множествами из R^n, называется **борелевской σ-алгеброй** и обозначается $\beta(R^n)$.

Пусть заданы два измеримых пространства $(T_1, \mathcal{F}_1), (T_2, \mathcal{F}_2)$ и отображение $f : T_1 \to T_2$. Отображение f называется **$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$-измеримым**, если $f^{-1}(E) \in \mathcal{F}_1$ для каждого $E \in \mathcal{F}_2$. Если $T_2 = R$ и функции f_n, $n \geqslant 1$, f, g являются $(\mathcal{F}, \beta(R))$-измеримыми, то $(\mathcal{F}, \beta(R))$-измеримы и функции $\sup\limits_n f_n$; $\inf\limits_n f_n$; $f \times g$; $\frac{f}{g}$, если $g \neq 0$. Отображение $f : R \to R$ называется **измеримым по Борелю**, если оно является $(\beta(R), \beta(R))$-измеримым. Если $g : R \to R$ — измеримое по Борелю отображение, $f : T \to R$ — $(\mathcal{F}, \beta(R))$-измеримое отображение, то $g \circ f$ является $(\mathcal{F}, \beta(R))$-измеримым. Предел последовательности измеримых по Борелю отображений $f_n : R \to R$ является измеримым по Борелю.

Пусть $(T, \mathcal{F})$ — измеримое пространство. Функция $\mu : \mathcal{F} \to R_+$, определенная на множествах A из σ-алгебры $\mathcal{F}$, называется **мерой**, если она обладает следующими свойствами: $\mu(A) \geqslant 0 \ \ \forall A \in \mathcal{F}$; $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, где $A_i \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. Мера называется **конечной**, если $\mu(T) < \infty$.

Система множеств $\mathcal{F}^{\mu}$ называется **пополнением σ-алгебры $\mathcal{F}$** по мере μ, если $\mathcal{F}^{\mu}$ принадлежат все те множества $A \in \Omega$, для которых найдутся такие множества $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, что $A_1 \subset A \subset A_2$ и $\mu(A_2 \backslash A_1) = 0$. Система множеств $\mathcal{F}^{\mu}$ является σ-алгеброй, и мера μ однозначно естественным образом продолжается с $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^{\mu}$. Измеримое пространство $(T, \mathcal{F}, \mu)$ называется полным, если $\mathcal{F}^{\mu}$ совпадает с $\mathcal{F}$. Далее предполагается, что все рассматриваемые измеримые пространства $(T, \mathcal{F}, \mu)$ являются полными.

Из свойств измеримых по Лебегу множеств и меры Лебега вытекает, что тройка $([a, b], \mathcal{F}, \mu)$, где $\mathcal{F}$— множество всех измеримых по Лебегу подмножеств из $[a, b]$, μ— мера Лебега, является полным измеримым пространством с конечной мерой.

Введем теперь интеграл Лебега для измеримой функции, заданной на произвольном измеримом пространстве. Пусть $(T, \mathcal{F}, \mu)$— измеримое пространство с конечной мерой, $f : T \to R_+$— неотрицательная измеримая функция. Существует последовательность (f_n)— простых неотрицательных измеримых функций таких, что $f_n(x) \uparrow f(x)$, $n \to \infty$, для каждого $x \in T$. Под интегралом от простой функции $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k 1_{A_k}(x)$ понимают

$$\int\limits_T f(x) d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mu(A_k).$$

Величина
$$\int\limits_T f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_T f_n(x)d\mu$$
называется интегралом Лебега от f по мере μ. Пусть $f(x)$— произвольная измеримая функция и $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$, и по крайней мере один интеграл $\int_T f^+(x)d\mu$, $\int_T f^-(x)d\mu$, конечен. Тогда по определению полагают
$$\int\limits_T f(x)d\mu = \int\limits_T f^+(x)d\mu - \int\limits_T f^-(x)d\mu.$$
Функцию f называют **интегрируемой по Лебегу**, если $\int_T |f(x)|d\mu < \infty$.

Если $A \in \mathfrak{F}$, то под интегралом $\int_A f(x)d\mu$ понимают $\int_T f(x)1_A(x)d\mu$.

Введенный интеграл обладает всеми свойствами интеграла Лебега по мере Лебега.

7. Произведение мер

Пусть $(T_1, \mathfrak{F}_1, \mu_1)$, $(T_2, \mathfrak{F}_2, \mu_2)$ — два измеримых пространства с конечными мерами. Тогда σ-алгебра подмножеств из $T_1 \times T_2$, порожденная множествами $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, называется **произведением σ-алгебр** $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, обозначается $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$. Мера μ на $(T_1 \times T_2, \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2)$ такая, что $\mu(A \times B) = \mu(A) \times \mu(B)$, $A \in \mathfrak{F}_1, B \in \mathfrak{F}_2$, называется **произведением мер** μ_1 и μ_2, обозначается $\mu_1 \times \mu_2$. В частности, если μ мера Лебега на отрезке $[a, b]$, то произведение $\mu \times \mu$ является мерой Лебега на прямоугольнике $[a, b] \times [a, b]$. Пусть функция $f(t_1, t_2)$ является $(\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2, \beta(R))$-измеримой и
$$\int\limits_{T_1 \times T_2} |f(t_1, t_2)| d(\mu_1 \times \mu_2) < \infty.$$
Тогда интегралы $\int_{T_1} f(t_1, t_2)d\mu_1$ и $\int_{T_2} f(t_1, t_2)d\mu_2$ являются соответственно μ_2-измеримой, μ_1-измеримой функциями и справедливо равенство (теорема Фубини)
$$\int\limits_{T_1 \times T_2} f(t_1, t_2)d(\mu_1 \times \mu_2) = \int\limits_{T_1} d\mu_1 \int\limits_{T_2} f(t_1, t_2)d\mu_2 = \int\limits_{T_2} d\mu_2 \int\limits_{T_1} f(t_1, t_2)d\mu_1.$$

8. Случайные величины. Условное математическое ожидание

Первоначальным объектом теории вероятности является **вероятностное пространство** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, состоящее из множества Ω и системы $\mathcal{F}$ его подмножеств, образующих σ-алгебру, а P — вероятностная мера (вероятность), определенная на множествах из $\mathcal{F}$, т. е. мера на $\mathcal{F}$ такая, что $P(\Omega) = 1$. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Функция $\xi : \Omega \to R$ называется **случайной величиной**, если она $(\mathcal{F}, \beta(R))$-измерима.

Математическим ожиданием случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ называется интеграл Лебега $\int_\Omega \xi(\omega) dP$ (обозначают $E(\xi)$).

Случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ называется **интегрируемой**, если $\int_\Omega \|\xi\| dP < \infty$.

Пусть $\xi(\omega)$ — интегрируемая случайная величина и $\mathcal{J}$ — под-σ-алгебра $\mathcal{F}$. **Условным математическим ожиданием** ξ относительно $\mathcal{J}$ (обозначается $E(\xi|\mathcal{J})$) по определению считаем любую $\mathcal{J}$-измеримую случайной величиной Y такую, что $\int_B Y(\omega)P(d\omega) = \int_B \xi(\omega)P(d\omega)$ для всех $B \in \mathcal{J}$.

Свойства условных математических ожиданий случайных величин.

I) $E(aX + bY|\mathcal{J}) = aE(X|\mathcal{J}) + bE(Y|\mathcal{J})$.

II) Если $X \geqslant 0$ п. н., то $E(X|\mathcal{J}) \geqslant 0$ п. н. (почти наверное).

III) $E(1|\mathcal{J}) = 1$ п. н.

IV) Если X — $\mathcal{J}$-измерима, то $E(X|\mathcal{J}) = X$ п. н. В общем случае, если XY интегрируема и X — $\mathcal{J}$-измерима, то $E(XY|\mathcal{J}) = XE(Y|\mathcal{J})$ п. н.

V) Если $\mathcal{H}$ — под-σ-алгебра σ-алгебры $\mathcal{J}$, то $E(E(X|\mathcal{J})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$ п. н.

VI) Если $X_n \to X$ в $L_1(\Omega, R)$, то $E(X_n|\mathcal{J}) \to E(X|\mathcal{J})$ в $L_1(\Omega, R)$.

Последовательности случайных величин.

Пусть (ξ_n) — последовательность случайных величин, заданная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Последовательность называется сходящейся **по вероятности** к случайной величине ξ (обозначается $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$), если $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{\omega \mid |\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Последовательность называется сходящейся **с вероятностью 1** (**почти наверное**) к случайной величине ξ (обозначается $\xi_n \overset{\text{п. н.}}{\to} \xi$), если

$$P\{\omega \mid \xi_n \to \xi\} = 1.$$

Последовательность случайных величин называется **сходящейся в среднем порядка** p, $0 < p < \infty$, к случайной величине ξ (обозначается $\xi_n \overset{L^p}{\to} \xi$), если

$$E(|\xi_n - \xi|^p) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Справедливы следующие утверждения:

$$\xi_n \overset{\text{п. н.}}{\to} \xi \Rightarrow \xi_n \overset{P}{\to} \xi;$$

$$\xi_n \overset{L^p}{\to} \xi \Rightarrow \xi_n \overset{P}{\to} \xi, \quad p > 0.$$

Обратные импликации, вообще говоря, несправедливы, но отметим, что если $\xi_n \overset{P}{\to} \xi$, то из последовательности ξ_n можно выбрать подпоследовательность ξ_{n_k}, сходящуюся с вероятностью 1.

Если $\xi : \Omega \to R$ — случайная величина, то равенство $P^\xi(B) = P(\xi(\omega) \in B)$, $B \in \beta(R)$ определяет вероятность на $(R, \beta(R))$. Мера P^ξ называется **законом распределения** случайной величины ξ.

Если $f : R^d \to R$ — измеримая по Борелю функция, $\xi : \Omega \to R^d$ — случайная величина, $E(f(\xi(\omega))) < \infty$, то

$$E(f(\xi(\omega))) = \int_\Omega f(\xi(\omega))dP = \int_{R^d} f(x)dP^\xi.$$

Случайные величины $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega')$, заданные на вероятностных пространствах $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ соответственно называют **эквивалентными по распределению** (обозначают $P^X = P^Y$), если они имеют одинаковые законы распределения.

Лемма Фату. a) Если для последовательности ξ_n существует интегрируемая случайная величина ξ такая, что $\xi_n \leqslant \xi$, то имеет место неравенство

$$E(\limsup_{n\to\infty} \xi_n | \mathcal{J}) \geqslant \limsup_{n\to\infty} E(\xi_n | \mathcal{J}) \text{ п. н.} \tag{0.4}$$

b) Если $\xi_n \geqslant \xi$ для всех $n \geqslant 1$ и $E(\xi) > -\infty$, то

$$E(\liminf_{n\to\infty} \xi_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(\xi_n).$$

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Пусть $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п. н.}}{\to}} \xi$ и существует такая интегрируемая случайная величина η, что $|\xi_n| \leqslant \eta$. Тогда

$$E(|\xi_n - \xi| \mid \mathcal{J}) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п. н.}}{\to}} 0.$$

Сформулированное утверждение остается справедливым, если сходимость $\xi_n \overset{\text{п. н.}}{\to} \xi$ заменить на сходимость по вероятности $\xi_n \overset{\text{P}}{\to} \xi$.

Основные неравенства для математических ожиданий действительных случайных величин.

Неравенство Коши — Буняковского. Пусть ξ, η таковы, что $E(\xi^2) < \infty$, $E(\eta^2) < \infty$. Тогда $E(\xi\eta) < \infty$ и $E(|\xi\eta|) \leqslant \sqrt{E(\xi^2)E(\eta^2)}$.

Неравенство Чебышева. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина. Если $E(\xi) < \infty$, то для всякого $a > 0$ выполняется неравенство

$$P\{\xi > a\} \leqslant \frac{E(\xi)}{a}.$$

Для произвольной случайной величины ξ, $E(\xi^2) < \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leqslant \frac{E(\xi^2)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Гёльдера. Если $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $E(|\xi|^p) < \infty$, $E(|\eta|^q) < \infty$, то

$$E(|\xi\eta|) \leqslant (E(|\xi|^p))^{1/p}(E(|\eta|^q))^{1/q}.$$

Неравенство Минковского. Если $1 \leqslant p < \infty$, $E(|\xi|)^p < \infty$, $E(|\eta|)^p < \infty$, то

$$E(|\xi + \eta|^p)^{1/p} \leqslant (E(|\xi|^p))^{1/p} + (E(|\eta|^p))^{1/p}.$$

9. Случайные процессы

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $T = R_+$ или $T = [0, a]$, $a > 0$. Семейство $X_t, t \in T$, случайных величин $X_t(\omega)$ называется **случайным процессом**. При фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $t \to X_t(\omega)$ называется **траекторией** процесса. С каждым случайным процессом X_t связывают σ-алгебру $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s | s \leqslant t\}$, являющуюся наименьшей σ-алгеброй, относительно которой измеримы случайные величины $X_s, s \leqslant t$.

Случайный процесс X_t называется **измеримым**, если для любых борелевских множеств $B \in \beta(R)$ множество $\{(\omega, t) \mid X_t(\omega) \in B\}$ принадлежит $\mathcal{F} \times \beta(T)$.

Пусть X_t — измеримый случайный процесс. Тогда:

1) почти все траектории являются измеримыми по Борелю функциями;

2) функция $m(t) = E(X_t)$ является измеримой, если для каждого t случайная величина $|X_t|$ интегрируема;

3) если S — измеримое множество из T и $\int_S E(|X_t|)dt < \infty$, то

$$\int\limits_S E(X_t)dt = E\biggl(\int\limits_S X_t dt\biggr).$$

Пусть $(\mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — возрастающее семейство под-σ-алгебр из $\mathcal{F}$, т. е. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$, если $0 \leqslant t \leqslant s$. Семейство $(\mathcal{F}_t)$ называется непрерывным справа, если $\mathcal{F}_{t+0} \equiv \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} = \mathcal{F}_t$ для каждого $t \in R_+$. В дальнейшем предполагается, что $(\mathcal{F}_t)$ непрерывно справа. Такое семейство $(\mathcal{F}_t)$ называется **потоком**.

Процесс X_t, $t \geqslant 0$, называется $(\mathcal{F}_t)$-**согласованным**, если случайная величина $X_t(\omega)$ $(\mathcal{F}_t)$-измерима при каждом t. Процесс X_t, $t \geqslant 0$, называется **прогрессивно измеримым**, если для каждого $t \in T$

$$\{(\omega, s \leqslant t) \mid X_s(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_t \times \beta([0, t]),$$

где B — борелевское множество на R, а $\beta([0, t])$ — σ-алгебра борелевских множеств на $[0, t]$.

Прогрессивно измеримый случайный процесс является измеримым и $(\mathcal{F}_t)$-согласованным. Случайные процессы X_t, Y_t, $t \in T$, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называются **стохастически эквивалентными**, если $P(X_t \neq Y_t) = 1$ для всех $t \in T$. Процесс $Y(t)$, стохастически эквивалентный $X(t)$, называют модификацией процесса $X(t)$. Если X_t — измеримый $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс, то у него существует прогрессивно измеримая модификация.

Непрерывным процессом X_t, заданным на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называется процесс, почти все траектории которого непрерывны, т. е. существует такое множество $B \in \mathcal{F}$ с $P(B) = 0$, что для всех $\omega \not\subseteq N$ траектории $X_t(\omega)$ непрерывные функции.

Моменты остановки.

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и поток под-σ-алгебр $\mathcal{F}_t$. Отображение $\sigma : \Omega \to [0, +\infty]$ называется **моментом остановки**, если для каждого $t \geqslant 0$ множество $\{\omega | \sigma(\omega) \leqslant t\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t$. Если X_t — действительный непрерывный процесс, $\mathcal{F}_t$ — поток под-σ-алгебр, C — открытое множество, то момент первого достижения множества C

$$\sigma_C = \inf\{t \geqslant 0 \mid X_t \in C\}$$

является моментом остановки. Если C является замкнутым множеством, то σ_C является моментом остановки относительно $\mathcal{F}_t^X$.

Свойства моментов остановки.

1. Если τ_1, τ_2 — моменты остановки, то $\tau_1 \wedge \tau_2 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$, $\tau_1 \vee \vee \tau_2 = \max\{\tau_1, \tau_2\}$, $\tau_1 + \tau_2$ тоже являются моментами остановки.

2. Пусть τ_n — последовательность моментов остановки, тогда $\sup \tau_n$, $\inf \tau_n$, $\limsup\limits_n \tau_n$, $\liminf\limits_n \tau_n$ также являются моментами остановки.

10. Мартингалы

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $\mathcal{F}_t$ — поток под-σ-алгебр. Действительный случайный процесс X_t, $t \in \mathbf{T}$, где $\mathbf{T} = [0, a]$ или $\mathbf{T} = R_+$ называется **мартингалом (супермартингалом, субмартингалом)** относительно $\mathcal{F}_t$, если:

I) случайная величина X_t интегрируема для каждого $t \in \mathbf{T}$;

II) процесс X_t — $(\mathcal{F}_t)$-согласован;

III) $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ (соответственно $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leqslant X_s$, $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geqslant X_s$) п. н. для любых $t, s \in \mathbf{T}$ и $s < t$.

Свойства мартингалов.

1. Если X_t — субмартингал, то с вероятностью 1 для каждого t существует предел $\hat{X}_t = \lim\limits_{s \downarrow t} X_s$ и процесс $\hat{X}_t$ является субмартингалом

таким, что отображение $t \to \hat{X}_t$ непрерывно справа и имеет предел слева п. н.; $X_t \leqslant \hat{X}_t$ п. н. для всякого t.

2. Если X_t — непрерывный справа мартингал с $E(|X_t|^p) < \infty$, то для каждого $t_1 > 0$

$$P[\sup_{t\in[0,t_1]} |X_t| > \lambda] \leqslant \frac{E(|X_{t_1}|^p)}{\lambda^p} \quad (p \geqslant 1),$$

$$E(\sup_{t\in[0,t_1]} |X_t|^p) \leqslant (\frac{p}{p-1})^p E(|X_{t_1}|^p) \quad (p > 1).$$

3. Пусть X_t — субмартингал с непрерывными справа траекториями такой, что $\sup\limits_{t\geqslant 0} E(X_t^+) < \infty$, где $X_t^+ = \max\{X_t, 0\}$. Тогда с вероятностью 1 существует $\lim\limits_{t\to\infty} X_t = X_\infty$ и $E(X_\infty^+) < \infty$.

Действительный случайный процесс X_t, $t \in R_+$, на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется **локальным** $(\mathcal{F}_t)$-**мартингалом**, если он согласован с $\mathcal{F}_t$ и существует последовательность $(\mathcal{F}_t)$-моментов остановки σ_n с $\sigma_n < < \infty$, $\sigma_n \uparrow \infty$ и $X_n = X_n(t)$ — $(\mathcal{F}_t)$-мартингал для каждого $n \geqslant 1$, где $X_n(t) = X(t \wedge \ \sigma_n)$.

Если X_t — непрерывный локальный мартингал и $E(\sup\limits_{t\geqslant 0} |X_t|) < < \infty$, то X_t является мартингалом.

11. Процесс броуновского движения. Винеровский процесс

Непрерывный случайный процесс $W(t), 0 \leqslant t < \infty$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P$ называется **процессом броуновского движения**, если

a) $W(0) = 0$ п.н.;

b) W является процессов со стационарными независимыми приращениями;

c) приращения $W(t) - W(s)$ имеют нормальное распределение с $E(W(t) - W(s)) = 0$, $E((W(t) - W(s))^2) = \sigma^2 |t - s|$.

В случае $\sigma^2 = 1$ процесс называют стандартным процессом броуновского движения.

Свойства броуновского движения.

1. $E(W(t)) = 0$, $E(W(t)W(s)) = \min(s, t)$, $E(|W(t)|) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$.

2. $P\{\omega|W(t) \leqslant x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{y^2}{t^2})dy$.

3. Пусть $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W(s), s \leqslant t)$. Процесс броуновского движения является мартингалом относительно $\mathcal{F}_t^W$: $E(W(t)| \ \mathcal{F}_s^W) = W(s)$ п.н. $t \geqslant s$; $E(((W(t) - W(s))^2|\mathcal{F}_s^W) = t - s$ п. н. $t \geqslant s$.

4. С вероятностью 1 траектории броуновского движения недифференцируемы для всех $t \geqslant 0$, имеют на любом сколь угодно малом интервале бесконечную вариацию, удовлетворяют условию Гельдера с любым показателем $\alpha < \frac{1}{2}$ и не удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha = \frac{1}{2}$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с потоком $\mathcal{F}_t$. Непрерывный случайный процесс $W(t)$, $t \geqslant 0$, называется $(\mathcal{F}_t)$-**винеровским** процессом, если $(W(t), \mathcal{F}_t)$ является квадратично интегрируемым ($E(W^2(t)) < \infty, t \geqslant 0$) мартингалом с $W(0) = 0$ п. н. и $E(((W(t) - W(s))^2|\mathcal{F}_s) = t - s$.

Всякий $(\mathcal{F}_t)$-винеровский процесс является процессом броуновского движения (теорема Леви). Процесс броуновского движения $W(t)$ является винеровским относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t^W$.

12. Интеграл Ито

Пусть $\mathcal{L}_2$— пространство всех действительных измеримых $(\mathcal{F}_t)$-согласованных процессов $\Phi(t, \omega)$, $t \in [0, a]$, заданных на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$ и удовлетворяющих условию

$$E(\int\limits_0^a \Phi^2(s, \omega)ds) < \infty$$

и пусть $W(t)$— $(\mathcal{F}_t)$-винеровский процесс. Процесс $e(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, называется **простым**, если существует конечное разбиение $0 = t_0 < < t_1 < \ldots, < t_n = a$ отрезка $[0, a]$ и существуют случайные величины $\alpha, \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, где α— $(\mathcal{F}_0)$-измерима, α_i — $(\mathcal{F}_{t_i})$-измеримы, $i = 0, \ldots, n-1$, такие, что

$$e(t, \omega) = \alpha 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

и процесс $e(t,\omega)$ принадлежит пространству $\mathfrak{L}_2$. Для простых процессов интеграл Ито вводится следующим образом:

$$I_t(e) = \alpha W(0) + \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\ t_{m+1}<t}} \alpha_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \alpha_{m+1}(W(t) - W(t_{m+1})).$$

Для интеграла Ито будем использовать следующую запись $\int\limits_0^t e(s,\omega)dW(s)$. Пусть теперь $\Phi(t,\omega)$— произвольная функция из пространства $\mathfrak{L}_2$. Найдется последовательность простых процессов $(\Phi_n(t,\omega))$ таких, что

$$E(\int\limits_0^a (\Phi(t,\omega) - \Phi_n(t,\omega))^2 dt) \to 0, n \to \infty.$$

Последовательность случайных величин $I_a(\Phi_n)$ фундаментальна в смысле сходимости в среднем квадратическом, т. е.

$$\lim_{n\to\infty, m\to\infty} E(\int\limits_0^a (\Phi_n(t,\omega) - \Phi_m(t,\omega))dW(t)))^2 = 0$$

и, значит, сходится к некоторому пределу который называется **интегралом Ито** от процесса Φ по винеровскому процессу $W(t)$. Данное определение корректно, т. к. значение предела не зависит от выбора последовательности Φ_n.

Определим семейство стохастических интегралов $I_{t,s}(\Phi)$ при $t \geqslant s \geqslant 0$, полагая $I_{t,s}(\Phi) = I(1_{[s,t]}\Phi)$. Для $I_{t,s}(\Phi)$ используется запись $\int_s^t \Phi(\tau,\omega)dW(\tau)$.

Свойства интеграла Ито.

1. Процесс $(I_t(\Phi), \mathcal{F}_t)$ является непрерывным квадратично интегрируемым мартингалом (точнее некоторая модификация является непрерывной).

2. Для любых $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant a$

$$E(I(\Phi)(t) - I(\Phi)(s) \mid \mathcal{F}_s) = 0 \text{ п. н.}$$

$$E((I(\Phi)(t) - I(\Phi)(s))^2 \mid \mathcal{F}_s) = E\left(\int\limits_s^t \Phi^2(s,\omega)ds \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) \text{ п. н.}$$

3. Для $0 \leqslant u \leqslant t \leqslant a$

$$\int\limits_0^t \Phi(s,\omega)dW(s) = \int\limits_0^u \Phi(s,\omega)dW(s) + \int\limits_u^t \Phi(s,\omega)dW(s).$$

4. Пусть $W_1(t),\dots,W_r(t)$ — независимые $(\mathcal{F}_t)$-винеровские процессы. Тогда процесс $W(t)=(W_1(t),\dots,W_r(t))$ называется r-мерным $(\mathcal{F}_t)$-винеровским процессом.

Пусть $W(t)$ — r-мерный $(\mathcal{F}_t)$-винеровский процесс и пусть $\Phi_1(t,\omega),\dots,\Phi_r(t,\omega)\in\mathcal{L}_2$, тогда определены интегралы $\int_0^t \Phi_i(s)dW_i(s)$ и для $0\leqslant s\leqslant t\leqslant a$

$$E\left(\int\limits_s^t \Phi_i(\tau)dW_i(\tau)\int\limits_s^t \Phi_j(\tau)dW_j(\tau)\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right) =$$

$$= \delta_{ij}E\left(\int\limits_s^t \Phi_i(\tau)\Phi_j(\tau)d\tau\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right), \quad i,j=1,\dots,r,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

6. Пусть: $(\Omega,\mathcal{F},P)$ — вероятностное пространство с потоком $\mathcal{F}_t$; σ — $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки; $f(t)$, $f_n(t)\in\mathcal{L}_2$, $n=1,2,\dots$; $W(t)$ — $(\mathcal{F}_t)$-винеровский процесс. Если

$$E\left(\int\limits_0^{t\wedge\sigma}(f(s)-f_n(s))^2ds\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

то

$$E\left(\sup_{s\leqslant t\wedge\sigma}\left|\int\limits_0^s f_n(\tau)dW(\tau)-\int\limits_0^s f(\tau)dW(\tau)\right|\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Интеграл Ито был определен для элементов $\mathcal{L}_2$. Расширение его на более общий класс подынтегральных функций производится следующим образом. Пусть $\mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}}=\{\Phi(t)\mid\Phi$ — $(\mathcal{F}_t)$-согласованный действительный измеримый процесс такой, что $\int_0^a\Phi^2(t,\omega)dt<\infty$ п. н.$\}$. Для $\Phi\in\mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}}$ определим последовательность моментов остановки $\sigma_n(\omega) = \inf\{t\in[0,a]\mid\int_0^t\Phi^2(s,\omega)ds\geqslant n\}\wedge n$, $n=1,2,\dots$. Положим $\Phi_n(s,\omega) = 1_{(\sigma_n(\omega)\leqslant s)}\Phi(s,\omega)$.

Определим $I_t(\Phi)$ посредством равенства $I_t(\Phi) = I(\Phi_n)(t)$ для $t \leqslant \sigma_n$. Процесс $I_t(\Phi)$ называется стохастическим интегралом или интегралом Ито от $\Phi \in \mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}}$ по винеровскому процессу $W(t)$ и обозначается $\int_0^t \Phi(s)dB(s)$.

7. Пусть $W(t)$ — r-мерный $(\mathcal{F}_t)$-винеровский процесс; процессы $g : [0,a]\times\Omega \to R^d$, $b : [0,a]\times\Omega \to R^{d\times r}$ принадлежат соответственно пространствам $\mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}}$, $\mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}$, где $\mathcal{L}_i^{\mathrm{loc}}$ — множество всех измеримых $(\mathcal{F}_t)$-согласованных процессов Ψ таких, что $\int_0^a \|\Psi(s,\omega)\|^i ds < \infty$ п. н.; $X(0,\omega)$ — $(\mathcal{F}_0)$-измеримая случайная величина, а $X(t,\omega)$ — d-мерный случайный процесс вида

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t g(s,\omega)ds + \int_0^t b(s,\omega)dW(s).$$

Формула Ито. Если функция $f : R_+ \times R^d \to R$ непрерывна вместе с производными $f'_t, f'_{x_i}, f''_{x_i x_j}$, $i,j = 1,\ldots,d$, а $X(t,\omega)$ — процесс, определенный выше, то с вероятностью 1

$$f(t,X(t,\omega)) = f(0,X(0,\omega)) + \int\limits_0^t \Big(f'_t(\tau,X(\tau,\omega)) + f'_x(\tau,X(\tau,\omega))g(\tau,\omega) +$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(f''_{x^2}(\tau,X(\tau,\omega))b(\tau,\omega)b^\top(\tau,\omega)\big)\Big)d\tau + \int\limits_0^t f'_x(\tau,X(\tau,\omega))b(\tau,\omega)dW(\tau).$$

8. Для любого процесса $\Phi \in \mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}}$ существуют постоянные c, C такие, что $\forall 0 < t \leqslant a$ выполняются неравенства

$$cE\bigg(\max_{0\leqslant s\leqslant t}\bigg|\int\limits_0^s \Phi(\tau)dW(\tau)\bigg|^2\bigg) \leqslant$$

$$\leqslant E\bigg(\int\limits_0^t \Phi^2(\tau)d\tau\bigg) \leqslant CE\bigg(\max_{0\leqslant s\leqslant t}\bigg|\int\limits_0^s \Phi(\tau)dW(\tau)\bigg|^2\bigg).$$

9. Пусть $f \in \mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}}$. Тогда для любых $c_1 > 0, c_2 > 0$ выполняется неравенство

$$P\bigg\{\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\bigg|\int\limits_0^t f(s)dW(s)\bigg| > c_1\bigg\} \leqslant \frac{c_2}{c_1^2} + P\bigg\{\int\limits_0^a f^2(s)ds > c_2\bigg\}.$$

Непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $x(t)$ называется **возрастающим**, если для почти всех ω $x(\cdot,\omega)$ — возрастающая функция по t. Говорят, что процесс $x(t)$ является процессом **ограниченной вариации**, если его можно записать как разность двух возрастающих процессов. Процесс $x(t)$ называется **семимартингалом**, если его можно записать как сумму локального мартингала и процесса ограниченной вариации.

Пусть $\Delta = \{0 = t_0 < \cdots < t_l = a\}$ — разбиение отрезка $[0, a]$, $|\Delta| = \max\limits_k (t_k - t_{k-1})$. Если $f(t)$ — непрерывный семимартингал, то существует предел

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{2}(f(t \wedge t_{k+1}) + f(t \wedge t_k))(B(t \wedge t_{k+1} - B(t \wedge t_k)))$$

в смысле сходимости по вероятности. Его называют **интегралом Стратоновича** и обозначают $\int_0^t f(s) \circ dB(s)$.

Литература

1. *Ватанабэ С.*, Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. — М.: Наука. 1986. — 445 с.

2. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука. 1968. – 496 с.

3. *Леваков А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения / А. А. Леваков. — Минск: БГУ. 2009. — 231 с.

4. *Липцер Р.Ш.* Статистика случайных процессов / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. — М.: Наука. 1974. — 696 с.

5. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения / Б. Оксендаль. — М.: Мир. 2003. — 406 с.

6. *Ширяев А.Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. — М.: Наука. 1989.— 640 с.

Содержание

Учебное издание

Леваков Анатолий Афанасьевич

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА И ИТО

Пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *А. А. Леваков*

Подписано в печать 14.05.2010. Формат $60 \times 84/16$. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл.печ.л. 1,4. Уч.-изд.л. 0,93.
Тираж 50 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.