УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

А. И. Сливка-Тилищак (Киев, Украина)
aslyvka@tn.uz.ua

Введение. При решении задач математической физики часто приходится учитывать влияние случайных факторов. Эти факторы могут иметь различную природу: случайные краевые и начальные условия, случайные силы, воздействующие на систему, случайные коэффициенты, определяющие дифференциальные операторы и т. д. В связи с этим возникает необходимость в анализе, отражающем вероятностную специфику рассматриваемой задачи. Как всегда, ключевыми являются вопросы о существовании и единственности решения задачи; возможности конструктивной аппроксимации решения и характере сходимости аппроксимирующих функций к решению; поведения различных функционалов от решения задачи и т. д. В зависимости от вида задач, специфики случайных факторов и вопросов, подлежащих изучению, применяются различные методы исследования. Краевая задача гиперболического типа в многомерном случае со случайными начальными условиями с пространства $Sub_{\varphi}(\Omega)$ рассматривалась в [4], с пространства Орлича – в [5]. В монографии [3] можно найти ссылки на другие роботы, появившиеся в последние годы и посвященные решению задач в данном направлении. Ниже обосновывается метод Фурье для задачи со случайными начальными условиями для гиперболического уравнения.

Случайные процессы с пространства Орлича.

Определение 1. Четная непрерывная выпуклая функция $U(x)$ называется C-функцией, если $U(0) = 0$ и $U(x)$ – возрастающая функция при $x > 0$.

Определение 2. Будем говорить, что C-функция U удовлетворяет g-условию, если существуют такие постоянные $z_0 > 0$, $k > 0$, $A > 0$, что для всех $x > z_0$, $y > z_0$ выполняется неравенство $U(x)U(y) \leqslant AU(kxy)$.

Определение 3. Пусть (T, ρ) – непустое метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $N_{\rho}(t, \varepsilon)$ наименьшее возможное количество точек ε-сети множества T относительно метрики ρ. Функцию

$(N_\rho\,(t,\varepsilon),\varepsilon > 0)$ будем называть *массивностью множества* относительно метрики ρ.

Определение 4. *Пространством Орлича* $L_U\,(\Omega)$ случайных величин, порожденным -функцией $U\,(x)$, называется такое пространство случайных величин $\xi\,(\omega) = \xi$, $\omega \in \Omega$, для каждой из которых существует такая константа r_ξ, что $EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) \leqslant \infty$.

Определение 5. Скажем, что процесс $X = (X\,(t)\,, t \in T)$ принадлежит пространству Орлича $L_U\,(\Omega)$, если для всех $t \in T$ случайная величина $X\,(t)$ принадлежит $L_U\,(\Omega)$.

Определение 6. Семейство случайных величин ξ из пространства Орлича, для которых $E\xi = 0$, называется *строго орличевым*, если существует постоянная C_Δ, такая что для каждого конечного количества $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ и для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$ выполняется неравенство

$$\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right\|_{L_u} \leqslant C_\Delta\left(E\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

Определение 7. Случайный процесс $X = (X\,(t)\,,\ \ t \in T)$, $(X \in$ $\in L_U\,(\Omega))$ называется *строго орличевим*, если семейство случайных величин $X = (X\,(t)\,,\ \ t \in T)$ есть строго орличевым. Случайные процессы $X\,(t)$ и $Y\,(t)$ называются *совместно строго орличевыми*, если семейство случайных величин $(X\,(t)\,, Y\,(t)\,,\ \ t \in T)$ есть строго орличевым.

Теорема 1. *[2] Пусть* $X_i = (X_i\,(t)\,, t \in T, i \in I)$ *– семейство совместно строго орличевых процессов, причем существует интеграл в среднем квадратичном смысле:* $\xi = \int\limits_T \varphi_k\,(t)\,x_i\,(t)\,d\mu\,(t)$ *. Тогда семейство случайных величин* $\Delta_\xi = (\xi, i \in I, k = \overline{1,\infty})$ *является строго орличевым.*

Теорема 2. *[2] Пусть* Δ *– семейство строго орличевых случайных величин. Тогда линейное замыкание* $\bar{\Delta}$ *в среднем квадратичном смысле семейства* Δ *в пространстве* $L_2\,(\Omega)$ *есть строго орличевым.*

Теорема 3. *[5] Пусть* $\mathbb{R}^k$ *–* k*-мерное евклидово пространство,* $d(t,s) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}|t_i - s_i|\,,$ $T = (0 \leqslant t_i \leqslant T_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, k)$*,* $X_n = (X_n(t),$ $t \in T)$*,* $n = 1, 2, \ldots$ *– последовательность случайных процессов, которые принадлежат пространству Орлича случайных величин, причем для функции* U *выполняется* g*-условие. Если выполняются условия:*

1) процессы $X_n(t)$ – сепарабельны;

2) $X_n(t) \to X(t)$ при $n \to \infty$, $t \in T$ по вероятности;

3) $\sup\limits_{d(t,s)\leqslant h} \sup\limits_{n=\overline{1,\infty}} \|X_n(t) - X_n(s)\| \leqslant \sigma(h)$, где $\sigma = (\sigma(h), h > 0)$ – непрерывная монотонно возрастающая функция и $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$;

4) для некоторого $\epsilon > 0$ $\int\limits_0^\epsilon U^{(-1)}\left(\prod\limits_{i=1}^k \left(\frac{T_i}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du < \infty$, где $\sigma^{(-1)}(u)$ – функция обратная к $\sigma(u)$,

тогда последовательность случайных процессов $X_n(t)$ сходится по вероятности в пространстве $C(T)$.

Обоснование применения метода Фурье к задаче о колебании прямоугольного параллелепипеда. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c],\ t \in [0,\tau], \quad (1)$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \xi(x,y,z),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \eta(x,y,z), \quad (2)$$

и краевым условиям

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=a} = u\big|_{y=0} = u\Big|_{y=b} = u\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=c} = 0. \quad (3)$$

Предположим, что начальные условия $(\xi(x,y,z),\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],$ $z \in [0,c])$ и $(\eta(x,y,z)\ \ x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c])$ – строго орличевые с пространства $L_U(\Omega)$ случайные поля, и такие, что почти наверное

$$\xi(0,y,z) = \xi(a,y,z) = \xi(x,0,z) = \xi(x,b,z) = \xi(x,y,0) = \xi(x,y,c) = 0,$$

$$\eta(0,y,z) = \eta(a,y,z) = \eta(x,0,z) = \eta(x,b,z) = \eta(x,y,0) = \eta(x,y,c) = 0.$$

При использовании метода Фурье, вне зависимости от того, являются ли начальные условия детерминированными или случайными, решение задачи ищется в виде функционального ряда (см. [6])

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x,y,z)\left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t\right), \quad (4)$$

где

$$a_i = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \int\limits_0^c \xi(x,y,z) V_i(x,y,z) dx\, dy\, dz,$$

$$b_i = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \int\limits_0^c \eta(x,y,z) V_i(x,y,z) dx\, dy\, dz,$$

$\lambda_i, i \geqslant 1$ – собственные значения, а $V_i(x,y,z)$, $i \geqslant 1$ – собственные функции $V_i(x,y,z)$ задачи Штурма-Лиувилля, которые являются решением уравнения

$$\Delta V_i + \lambda_i^2 V_i = 0, \quad V\big|_{x=0} = V\big|_{x=a} = V\Big|_{y=0} = V\Big|_{y=b} = V\Bigg|_{z=0} = V\Bigg|_{z=c} = 0.$$

Из [6] следует, что $V_i(x,y,z)$ и λ_i можно представить в виде:

$$V_i(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i}{b} \sin\frac{\pi m_i z}{c},\ \lambda_i^2 = \pi^2 \left(\frac{k_i^2}{a^2} + \frac{l_i^2}{b^2} + \frac{m_i^2}{c^2} \right).$$

Обозначим через $D = [0,a] \times [0,b] \times [0,c] \times [0,\tau]$, а $C(D)$ – пространство непрерывных на D функций.

Теорема 4. *Для того чтобы с вероятностью единица в области D существовало дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи (1)–(3), представимое в виде равномерно сходящего по вероятности ряда (4), достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) *существуют непрерывные с вероятностью единица производные*

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z},\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z},\ \frac{\partial \eta}{\partial x},\ \frac{\partial \eta}{\partial y},\ \frac{\partial \eta}{\partial z};$$

2) *ряд (4) и ряды*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i V_i(x,y,z) \left(a_i \sin\lambda_i t - b_i \cos\lambda_i t \right), \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi k_i}{a} \sqrt{\frac{8}{abc}} \cos\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i}{b} \sin\frac{\pi m_i z}{c} \left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t \right), \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi l_i}{b} \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\frac{\pi k_i x}{a} \cos\frac{\pi l_i}{b} \sin\frac{\pi m_i z}{c} \left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t \right), \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi m_i}{c} \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i}{b} \cos \frac{\pi m_i z}{c} \left(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t\right), \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 V_i(x,y,z) \left(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t\right), \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\pi k_i}{a}\right)^2 V_i(x,y,z) \left(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t\right), \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\pi l_i}{b}\right)^2 V_i(x,y,z) \left(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t\right), \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\pi m_i}{c}\right)^2 V_i(x,y,z) \left(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t\right), \quad (12)$$

сходятся равномерно относительно $(x,y,z,t) \in D$ *по вероятности.*

Доказательство. Поскольку существуют подпоследовательности частичных сумм рядов (4) и (5)–(12), сходящихся равномерно относительно $(x,y,z,t) \in D$ с вероятностью единица, то теорема доказывается аналогично детерминированному случаю (см. [6]).

Лемма 1. *Пусть случайные поля* $(\xi(x,y,z),\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c])$, $(\eta(x,y,z),\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c])$ *— строго орличевые из пространства* $L_U(\Omega)$ *и выполняются условия теоремы 4. Тогда случайные ряды (4) и (5)–(12) будут также строго орличевыми случайными полями.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что семейство случайных величин a_i и b_i – строго орличевые. Тогда, согласно 2случайные ряды (4) и (5)–(12) будут также строго орличевыми случайными полями

Обозначим для $n \geqslant 1$

$$S_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} V_i(x,y,z) \left(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t\right),$$

$$S_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i(x,y,z) \left(a_i \sin \lambda_i t - b_i \cos \lambda_i t\right),$$

$$S_n^{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi k_i}{a} \sqrt{\frac{8}{abc}} \cos \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c} \left(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t\right),$$

$$S_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi l_i}{b} \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi k_i x}{a} \cos \frac{\pi l_i}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c} \left(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t\right),$$

$$S_n^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi m_i}{c} \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i}{b} \cos\frac{\pi m_i z}{c} \left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t\right),$$

$$S_n^{(5)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 V_i(x,y,z) \left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t\right),$$

$$S_n^{(6)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\pi k_i}{a}\right)^2 V_i(x,y,z) \left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t\right),$$

$$S_n^{(7)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\pi l_i}{b}\right)^2 V_i(x,y,z) \left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t\right),$$

$$S_n^{(8)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\pi m_i}{c}\right)^2 V_i(x,y,z) \left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t\right).$$

Теорема 5. *Пусть случайные поля* $(\xi(x,y,z), x \in [0,a], y \in [0,b], z \in [0,c])$, $(\eta(x,y,\ z),\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c])$ *– строго орличевые из пространства* $L_U(\Omega)$. *Для того чтобы с вероятностью единица в области* D *существовало дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи (1)–(3), представимое в виде равномерно сходящегося по вероятности ряда (4), достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) *существуют непрерывные с вероятностью единица частные производные*

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z},\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial z},\ \frac{\partial\eta}{\partial x},\ \frac{\partial\eta}{\partial y},\ \frac{\partial\eta}{\partial z};$$

2) *для всех* $(x,y,z,t) \in D$ *сходятся ряды*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} V_i(x,y,z)V_j(x,y,z) \left(Ea_ia_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t\right.$$
$$\left. + Eb_ib_j \sin\lambda_i t \sin\lambda_j t + 2Ea_ib_j \cos\lambda_i t \sin\lambda_j t\right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i\lambda_j V_i(x,y,z)V_j(x,y,z) \left(Ea_ia_j \sin\lambda_i t \sin\lambda_j t\right.$$
$$\left. + Eb_ib_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t - 2Ea_ib_j \sin\lambda_i t \cos\lambda_j t\right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\pi k_i}{a}\frac{\pi k_j}{a} \cos\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i}{b} \sin\frac{\pi m_i z}{c} \cos\frac{\pi k_j x}{a} \sin\frac{\pi l_j}{b} \sin\frac{\pi m_j z}{c}$$
$$\times \left(Ea_ia_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t + Eb_ib_j \sin\lambda_i t \sin\lambda_j t + 2Ea_ib_j \cos\lambda_i t \sin\lambda_j t\right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\pi l_i}{b}\frac{\pi l_j}{b} \sin\frac{\pi k_i x}{a} \cos\frac{\pi l_i}{b} \sin\frac{\pi m_i z}{c} \sin\frac{\pi k_j x}{a} \cos\frac{\pi l_j}{b} \sin\frac{\pi m_j z}{c}$$

$$\times \left(Ea_i a_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t + Eb_i b_j \sin\lambda_i t \sin\lambda_j t + 2Ea_i b_j \cos\lambda_i t \sin\lambda_j t \right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\pi m_i}{c}\frac{\pi m_j}{c} \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i}{b} \cos\frac{\pi m_i z}{c} \sin\frac{\pi k_j x}{a} \sin\frac{\pi l_j}{b} \cos\frac{\pi m_j z}{c}$$

$$\times \left(Ea_i a_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t + Eb_i b_j \sin\lambda_i t \sin\lambda_j t + 2Ea_i b_j \cos\lambda_i t \sin\lambda_j t \right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i^2 \lambda_j^2 V_i(x,y,z) V_j(x,y,z) \left(Ea_i a_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t \right.$$

$$\left. + Eb_i b_j \sin\lambda_i t \sin\lambda_j t + 2Ea_i b_j \cos\lambda_i t \sin\lambda_j t \right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\pi k_i}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi k_j}{a}\right)^2 V_i(x,y,z) V_j(x,y,z) \left(Ea_i a_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t \right.$$

$$\left. + Eb_i b_j \sin\lambda_i t \sin\lambda_j t + 2Ea_i b_j \cos\lambda_i t \sin\lambda_j t \right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\pi l_i}{b}\right)^2 \left(\frac{\pi l_j}{b}\right)^2 V_i(x,y,z) V_j(x,y,z) \left(Ea_i a_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t \right.$$

$$\left. + Eb_i b_j \sin\lambda_i t \sin\lambda_j t + 2Ea_i b_j \cos\lambda_i t \sin\lambda_j t \right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\pi m_i}{c}\right)^2 \left(\frac{\pi m_j}{c}\right)^2 V_i(x,y,z) V_j(x,y,z) \left(Ea_i a_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t \right.$$

$$\left. + Eb_i b_j \sin\lambda_i t \sin\lambda_j t + 2Ea_i b_j \cos\lambda_i t \sin\lambda_j t \right).$$

3) для $n \geqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots 8$

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leqslant h\\ |y-y_1|\leqslant h\\ |z-z_1|\leqslant h\\ |t-t_1|\leqslant h}} \left(E\left| S_n^{(k)}(X,t) - S_n^{(k)}(X,s) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sigma_k(h),$$

где $\sigma_k(h)$ *— непрерывные монотонно возрастающие функции, такие что* $\sigma_k(h) \to 0$ *при* $h \to 0$ *и выполняется условие*

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)} \left(\left(\frac{a}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{b}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{c}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\tau}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du < \infty, \tag{13}$$

где функции $\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)$ *– обратные к функциям* $\sigma_k(\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие 2) обеспечивает сходимость в среднем квадратичном смысле рядам (4) и (5)–(12). Из условия 3) и теоремы 3 следует, что ряды (4), (5)–(12) сходятся по вероятности в $C(D)$. Значит данная теорема следует из теоремы 4.

Пример 1. Пусть случайные поля $(\xi(x,y,z),\ x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ z\in[0,c])$, $(\eta(x,y,z),\ x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ z\in[0,c])$ – строго орличевые из пространства $L_U(\Omega)$, где $U(x)=|x|^p, p>4$. Пусть в интеграле (13) $\sigma_k(h)=C_k|h|^\delta$, $0<\delta<1$. Тогда, для сходимости интеграла (13), достаточно, чтобы для некоторого $\varepsilon>0$ существовал и был конечным интеграл:

$$\int\limits_{0+}^{\varepsilon}\left(\left(\frac{aC_k^{1/\delta}}{2u^{1/\delta}}+1\right)\left(\frac{bC_k^{1/\delta}}{2u^{1/\delta}}+1\right)\left(\frac{cC_k^{1/\delta}}{2u^{1/\delta}}+1\right)\left(\frac{\tau C_k^{1/\delta}}{2u^{1/\delta}}+1\right)\right)^{1/p}du.$$

Для достаточно малого $\varepsilon>0$ это условие будет иметь вид:

$$\int\limits_{0+}^{\varepsilon}\left(\frac{aC_k^{1/\delta}}{2u^{1/\delta}}\cdot\frac{bC_k^{1\delta}}{2u^{1/\delta}}\cdot\frac{cC_k^{1/\delta}}{2u^{1/\delta}}\cdot\frac{\tau C_k^{1/\delta}}{2u^{1/\delta}}\right)^{1/p}du\leqslant D\int\limits_{0+}^{\varepsilon}\left(\frac{1}{u^{\frac{4}{p\delta}}}\right)du,$$

где $D=\left(\frac{abc\tau C_k^{4/\delta}}{16}\right)^{1/p}$. Последний интеграл сходится для $\delta>\frac{4}{p}$.

Теорема 6. *Пусть случайные поля* $(\xi(x,y,z),\ x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ z\in[0,c])$, $(\eta(x,y,z),\ x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ z\in[0,c])$ *– строго орличевые из пространства* $L_U(\Omega)$ *и* $U(x)$ *– такая функция, что* $U(x)=$ $=|x|^p$, *при* $|x|>1,\ p>4$, *причем*

$$B_\xi\left(x,y,z,x_1,y_1,z_1\right)=E\xi(x,y,z)\xi(x_1,y_1,z_1),$$

$$B_\eta\left(x,y,z,x_1,y_1,z_1\right)=E\eta(x,y,z)\eta(x_1,y_1,z_1).$$

Для того, чтобы с вероятностью единица в области D *существовало дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи (1)–(3) представимое в виде равномерно относительно* $(x,y,z,t)\in D$ *сходящегося по вероятности ряда (4), достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) существуют непрерывные частные производные

$$B_{\xi11}=\frac{\partial^4B_\xi}{\partial x^2\partial x_1^2};\ B_{\xi22}=\frac{\partial^4B_\xi}{\partial y^2\partial y_1^2};B_{\xi33}=\frac{\partial^4B_\xi}{\partial z^2\partial z_1^2};$$

$$B_{\xi 12}=\frac{\partial^4 B_{xi}}{\partial x\partial x_1\partial\partial y_1};\ B_{\xi 13}=\frac{\partial^4 B_{\xi}}{\partial x\partial x_1\partial z\partial z_1};\ B_{\xi 23}=\frac{\partial^4 B_{\xi}}{\partial\partial y_1\partial z\partial z_1};$$

$$B_{\eta 11}=\frac{\partial^2 B_{\eta}}{\partial x\partial x_1};\ B_{\eta_{22}}=\frac{\partial^2 B_{\eta}}{\partial\partial y_1}; B_{\eta_{33}}=\frac{\partial^2 B_{\eta}}{\partial z\partial z_1},$$

и для достаточно малых h выполняются неравенства

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leqslant h\\ |y-y_1|\leqslant h\\ |z-z_1|\leqslant h}}\left(B_{\xi s}+B_{\xi s}-2B_{\xi s}\right)^{1/2}\leqslant C_s|h|^{\delta},$$

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leqslant h\\ |y-y_1|\leqslant h\\ |z-z_1|\leqslant h}}\left(B_{\eta s_1}+B_{\eta s_1}-2B_{\eta s_1}\right)^{1/2}\leqslant C_{s_1}|h|^{\delta},$$

где $\delta>1-\frac{1}{p}$, $s=(i,k,),i=1,2,3,k=1,2,3,\ s_1=(i,i),i==1,2,3$*;*

2) ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_i^2\lambda_j^2\left[|Ea_ia_j|+|Eb_ib_j-2\,|Eaib_j||\right];$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}k_i^2k_j^2\left[|Ea_ia_j|+|Eb_ib_j+2\,|Ea_ib_j||\right];$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}l_i^2l_j^2\left[|Ea_ia_j|+|Eb_ib_j+2\,|Ea_ib_j||\right];$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}m_i^2m_j^2\left[|Ea_ia_j|+|Eb_ib_j+2\,|Ea_ib_j||\right]$$

являются сходящимися;

3) для некоторых $\delta>\frac{4}{p}$ и $|h|<1$ выполняются условия:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2\Lambda_i<\infty,\ \sum_{i=1}^{\infty}k_i^2\Lambda_i<\infty,\ \sum_{i=1}^{\infty}m_i^2\Lambda_i<\infty,\ \sum_{i=1}^{\infty}l_i^2\Lambda_i<\infty,$$

где $\Lambda_i=\left[\left(Ea_i^2\right)^{1/2}+\left(Eb_i^2\right)^{1/2}\right]\left(k_i^{\delta}+l_i^{\delta}+m_i^{\delta}\right).$

Доказательство. Условия 1) и 2) данной теоремы обеспечивают выполнения соответственно условий 1) и 2) теоремы 5 Докажем, что из выполнения условия 3) данной теоремы следует выполнение условия 3) 5.

Рассмотрим

$$\left(E\left|S_n^{(0)}(x,y,z,t)-S_n^{(0)}(x_1,y_1,z_1,t_1)\right|^2\right)^{1/2}=$$

$$=\left(E\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i}{b}\sin\frac{\pi m_i z}{c}\left(a_i\cos\lambda_i t+b_i\sin\lambda_i t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\frac{\pi m_i z_1}{c}\left(a_i\cos\lambda_i t_1+b_i\sin\lambda_i t_1\right)\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{8}{abc}}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac12}\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i}{b}\sin\frac{\pi m_i z}{c}\cos\lambda_i t\right.\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\frac{\pi m_i z_1}{c}\cos\lambda_i t_1\right|$$

$$+\left(Eb_i^2\right)^{\frac12}\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i}{b}\sin\frac{\pi m_i z}{c}\sin\lambda_i t-\right.$$

$$\left.\left.-\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\frac{\pi m_i z_1}{c}\sin\lambda_i t_1\right|\right].$$

Используя неравенство $|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|^\delta$ для $0<\delta<1$, получим

$$\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i}{b}\sin\frac{\pi m_i z}{c}\cos\lambda_i t-\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\frac{\pi m_i z_1}{c}\cos\lambda_i t_1\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left[\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}-\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\right|+\left|\sin\frac{\pi l_i}{b}-\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\sin\frac{\pi m_i y}{c}-\sin\frac{\pi m_i z_1}{c}\right|+\left|\cos\lambda_i t-\cos\lambda_i t_1\right|\right]\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\left|\sin\frac{\pi k_i(x-x_1)}{2a}\right|+\left|\sin\frac{\pi l_i(y-y_1)}{2b}\right|+\left|\sin\frac{\pi m_i(z-z_1)}{2c}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\sin\frac{\lambda_i(t-t_1)}{2}\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\left|\frac{\pi k_i(x-x_1)}{2a}\right|^\delta+\left|\frac{\pi l_i(y-y_1)}{2b}\right|^\delta+\left|\frac{\pi m_i(z-z_1)}{2c}\right|^\delta+\left|\frac{\lambda_i(t-t_1)}{2}\right|^\delta\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\delta}\pi^\delta|h|^\delta\left(\left(\frac{k_i}{a}\right)^\delta+\left(\frac{l_i}{b}\right)^\delta+\left(\frac{m_i}{c}\right)^\delta+\left(\sqrt{\frac{k_i^2}{a^2}+\frac{l_i^2}{b^2}+\frac{m_i^2}{c^2}}\right)^\delta\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{2-\delta}\pi^{\delta}|h|^{\delta}\left(k_i^{\delta}+l_i^{\delta}+m_i^{\delta}\right).$$

Следовательно,

$$\left(E\left|S_n^{(0)}(x,y,z,t)-S_n^{(0)}(x_1,y_1,z_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_0\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_0=\frac{2^{\frac{7}{2}-\delta}\pi^{\delta}}{\sqrt{abc}}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(k_i^{\delta}+l_i^{\delta}+m_i^{\delta}\right).$$

Поступая аналогично, получим оценки

$$\left(E\left|S_n^{(j)}(x,y,z,t)-S_n^{(j)}(x_1,y_1,z_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_j\left|h\right|^{\delta},\quad j=\overline{1,8},$$

$$C_1=\frac{2^{\frac{7}{2}-\delta}\pi^{\delta}}{\sqrt{abc}}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\Lambda_i,\ C_2=\frac{2^{\frac{7}{2}-\delta}\pi^{\delta+1}}{\sqrt{a^3bc}}\sum_{i=1}^{\infty}k_i\Lambda_i,\ C_3=\frac{2^{\frac{7}{2}-\delta}\pi^{\delta+1}}{\sqrt{ab^3c}}\sum_{i=1}^{\infty}l_i\Lambda_i,$$

$$C_4=\frac{2^{\frac{7}{2}-\delta}\pi^{\delta+1}}{\sqrt{abc^3}}\sum_{i=1}^{\infty}m_i\Lambda_i,\ C_5=\frac{2^{\frac{7}{2}-\delta}\pi^{\delta}}{\sqrt{abc}}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2\Lambda_i,\ C_6=\frac{2^{\frac{7}{2}-\delta}\pi^{2+\delta}}{\sqrt{a^5bc}}\sum_{i=1}^{\infty}k_i^2\Lambda_i,$$

$$C_7=\frac{2^{\frac{7}{2}-\delta}\pi^{2+\delta}}{\sqrt{ab^5c}}\sum_{i=1}^{\infty}l_i^2\Lambda_i,\ C_8=\frac{2^{\frac{7}{2}-\delta}\pi^{2+\delta}}{\sqrt{abc^5}}\sum_{i=1}^{\infty}m_i^2\Lambda_i;$$

где $\Lambda_i=\left[(Ea_i^2)^{\frac{1}{2}}+(Eb_i^2)^{\frac{1}{2}}\right]\left(k_i^{\delta}+l_i^{\delta}+m_i^{\delta}\right)$.

Следовательно, выполнение условия 3) данной теоремы обеспечивает выполнения условия 3) теоремы 5.

Выводы. Результаты данной работы могут быть использованы для нахождения распределения супремума решения данной задачи, для обоснования применения метода Фурье в терминах корреляционных функций, для изучения скорости сходимости функциональных рядов, представляющих решение данной задачи, для построения модели решения и т. д.

Список литературы

[1] Barrasa de la Krus E., Kozachenko Yu.V. *Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly Orlicz Random initial conditions* // Random Oper. And Stoch. Eq. 1995. № 3. P. 201–220.

[2] Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. Metric *Characterization of Random Variables and Random processes.* American Mathematical Society. Providence. Rhode, 2000. 257 p.

[3] Довгай Б.В., Козаченко Ю.В., Сливка-Тилищак А.И. *Краевые задачи математической физики с случайными факторами. Монография.* – Видавничо-полиграфичный центр «Киевский университет», 2008. 175 с. (На украинском).

[4] Kozachenko Yu.V., Slyvka G.I. *Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions.* // Theory Probab. Mathem. Statist. 2004. №69. P. 67–83.

[5] Сливка-Тилищак А.И., Вереш К.Й. *Обоснование метода Фурье для гиперболического уравнения с случайными начальными условиями с пространства Орлича* // Наук. вестник Ужгородського университету. Серия математика и информатика. 2008. Вип. 16. С. 174–183. (На украинском).

[6] Соболев С.Л. *Уравнения математической физики.* М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1954.