БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра высшей математики

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**Учебно-методическое пособие
для студентов факультета прикладной
математики и информатики**

МИНСК
2008

УДК 517.521(072)
ББК 22.161р.я73
Ф94

А в т о р ы:
О. А. Кастрица, С. А. Мазаник,
А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович

Рекомендовано Ученым советом
факультета прикладной математики и информатики
23 сентября 2008 г., протокол № 1

Р е ц е н з е н т
кандидат физико-математических наук *С. Г. Красовский*

Функциональные ряды и последовательности: учеб.-метод.
Ф94 пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики / О. А. Кастрица, С. А. Мазаник, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Минск: БГУ, 2008. – 47 с.

Пособие содержит необходимые теоретические сведения и основные приемы исследования равномерной сходимости функциональных рядов и последовательностей, а также функциональных свойств суммы ряда и предельной функции последовательности. Изложение материала иллюстрируется подробно разобранными примерами. В пособие включены задания для лабораторных работ и упражнения для самостоятельного решения, снабженные указаниями и ответами.

Пособие предназначено для студентов факультета прикладной математики и информатики; оно также будет полезным для всех студентов, изучающих математический анализ в объеме университетского курса.

УДК 517.521(072)
ББК 22.161р.я73

1. Поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Функциональная последовательность

$$(f_n(x)), \quad f_n : E \longrightarrow \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ E \subset \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

называется *сходящейся в точке* $x_0 \in E$, если сходится числовая последовательность $(f_n(x_0))$. Множество $X \subset E$ всех точек, в которых последовательность (1.1) сходится, называется *множеством поточечной сходимости* (1.1) (коротко – *множество сходимости*).

В силу единственности предела для каждого значения x из X определено единственное значение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и тем самым на множестве X определена функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, которую будем называть *предельной функцией* или *пределом последовательности* (1.1). Таким образом, $D(f) = X$, т. е. множество задания предельной функции есть множество (поточечной) сходимости функциональной последовательности. Другими словами, сходимость функциональной последовательности (1.1) на множестве X означает, что

$$\forall x \in X\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \nu(x,\varepsilon)\ \ \forall n \geq \nu(x,\varepsilon) \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Будем также говорить, что функциональная последовательность $(f_n(x))$ сходится на X к $f(x)$ при $n \to \infty$, и записывать это в виде $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} f(x)$, или в виде $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Мы также будем использовать запись $f_n(x) \xrightarrow{X}$ для обозначения того факта, что последовательность (1.1) сходится на X, но предельная функция нам не известна (или не интересует нас).

Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad u_k : E \longrightarrow \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N},\ E \subset \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

называется *сходящимся в точке* $x_0 \in E$, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$. *Множеством поточечной сходимости* функционального ряда (1.2) называется множество всех точек $X \subset E$, в которых сходится ряд (1.2). *Сумма* $S(x)$ сходящегося функционального ряда есть предел функциональной последовательности его *частных сумм* $(S_n(x))$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Факт сходимости ряда (1.2) на множестве X будем записывать в виде $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow{X} S(x)$, или в виде $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow{X}$, если сумма ряда нам не известна (или не интересует нас). Если $S(x)$ является суммой ряда (1.2) на множестве X, то используют запись

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \ \ x \in X.$$

Поскольку при каждом фиксированном значении $x_0 \in E$ функциональный ряд (1.2) является обычным числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$, то для исследования его сходимости применимы все признаки сходимости числовых рядов.

Пример 1.1. Пусть $f_n(x) = x^n, \ n \in \mathbb{N}$. Найти предел последовательности $(f_n(x))$.
Решение. Здесь

$$E = \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in (-1; 1), \\ 1, \text{ если } x = 1, \end{cases}$$

при остальных же $x \in E$ функциональная последовательность расходится.

Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in (-1; 1), \\ 1, \text{ если } x = 1, \end{cases} \qquad X = (-1; 1].$$

Пример 1.2. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(x+2)^n}$.

Решение. Все члены ряда определены на $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. При фиксированном x применим признак Коши абсолютной сходимости ряда. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n|x+2|^n}} = \frac{1}{|x+2|},$$

то при $\dfrac{1}{|x+2|} < 1$, т. е. при $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, ряд сходится абсолютно. При $\dfrac{1}{|x+2|} > 1$ ряд расходится, т. к. $u_n(x) \not\to 0$. При $\dfrac{1}{|x+2|} = 1$, т. е. при $x = -3$ и

$x = -1$, получаем, соответственно, числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, сходящийся согласно признаку Лейбница, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ – расходящийся ряд. Итак, $X = (-\infty, -3] \cup (-1, +\infty)$.

2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Пусть f – предельная функция функциональной последовательности (1.1) на множестве G, т.е. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in G \subset E \subset \mathbb{R}$.

Функциональная последовательность $(f_n(x))$ называется *равномерно сходящейся* к предельной функции f на множестве X, $X \subset G$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu(\varepsilon)\ \forall n \geq \nu(\varepsilon)\ \forall x \in X \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Для обозначения факта равномерной сходимости функциональной последовательности на множестве X используют запись $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$, или даже запись $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$ (если, например, предельная функция неизвестна).

Из равномерной сходимости последовательности (1.1) на множестве X вытекает ее поточечная сходимость на X. Обратное утверждение не верно. Отметим, что:

1) если $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$, то $f_n(x) \overset{X_1}{\rightrightarrows},\ \forall X_1 \subset X$;

2) если $f_n(x) \overset{X_1}{\rightrightarrows}$ и $f_n(x) \overset{X_2}{\rightrightarrows}$, то $f_n(x) \overset{X_1 \cup X_2}{\rightrightarrows}$.

Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности:

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{где} \quad \rho_n = \sup_X |f_n(x) - f(x)|.$$

Следствие 2.1. *Если существует такая бесконечно малая последовательность* (α_n), *что*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| = |r_n(x)| \leq \alpha_n,$$

то функциональная последовательность (1.1) *сходится равномерно на* X.

Следствие 2.2. *Если* $\rho_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$, *то функциональная последовательность* (1.1) *сходится к* f *неравномерно на* X.

Следствие 2.3. (***Метод "плохой точки".***) *Если для каждого натурального* n *существует такое* $\tilde{x}_n \in X$, *что* $r_n(\tilde{x}_n) \not\to 0$, *где* $r_n(x) = f_n(x) - f(x)$, *то функциональная последовательность* (1.1) *сходится неравномерно на* X.

Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности на X. *Для равномерной сходимости последовательности* (1.1) *на* X *необходимо и достаточно выполнение равномерного условия Коши*:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \nu(\varepsilon) \;\forall\, n \geq \nu(\varepsilon) \;\forall\, p \geq 0 \;\forall\, x \in X \implies |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Следствие 2.4. *Если равномерное условие Коши не имеет места, т.е.*

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \;\forall\, \nu \;\exists\, n \geq \nu \;\exists\, p \geq 0 \;\exists\, x \in X \implies |f_{n+p}(x) - f_n(x)| > \varepsilon_0,$$

то последовательность (1.1) *не является равномерно сходящейся на множестве* X.

Заметим, что при использовании критерия Коши ничего не известно о функции $f(x)$ (может быть ее вообще нет!). Поэтому использовать здесь выражение "сходится неравномерно" неуместно.

Пример 2.1. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $(f_n(x))$, $f_n(x) = \dfrac{n^2}{2n^2+3x^2}$, на множестве $X = [-2; 1]$.

Решение. Находим предельную функцию: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n^2+3x^2} = \dfrac{1}{2} \quad \forall\, x \in X$. Рассмотрим $r_n(x) = f_n(x) - f(x)$:

$$|r_n(x)| = \left|\frac{n^2}{2n^2+3x^2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3x^2}{2(2n^2+3x^2)} \leq \frac{3\cdot|-2|^2}{4n^2} = \frac{3}{n^2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in X.$$

Поскольку $\dfrac{3}{n^2} \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$, то $\dfrac{n^2}{2n^2+3x^2} \overset{X}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ на основании следствия 2.1.

Пример 2.2. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $(f_n(x))$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+n^2x^3}$, на множестве $X = [0, +\infty)$.

Решение. Предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2}{1+n^2x^3} = 0 \quad \forall\, x \in X$. При фиксированном n имеем $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{[0,+\infty)} \dfrac{x^2}{1+n^2x^3}$.

Пусть $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{1+n^2x^3}$. Поскольку $\varphi'(x) = \dfrac{2x - n^2x^4}{(1+n^2x^3)^2}$, то $x_n = \sqrt[3]{\dfrac{2}{n^2}}$ – стационарная точка функции $\varphi(x)$. Так как $\varphi(x_n) = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{4}{n^4}}$, $\quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(+\infty) = 0$, то $\sup\limits_{[0,+\infty)} \dfrac{x^2}{1+n^2x^3} = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{4}{n^4}} \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$.

Согласно супремальному критерию $\dfrac{x^2}{1+n^3x^2} \overset{[0,+\infty)}{\Longrightarrow} 0$.

Пример 2.3. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $(f_n(x))$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sqrt{n^2x^2+1}$, на множестве ее сходимости.

Р е ш е н и е. Находим предельную функцию:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt{n^2x^2+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Так как при любом действительном x имеем

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}\sqrt{n^2x^2+1} - \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2}} \le \frac{1}{n}$$

и $1/n \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$, то $\dfrac{1}{n}\sqrt{n^2x^2+1} \overset{R}{\Longrightarrow} |x|$ согласно следствию 2.1.

Пример 2.4. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $(f_n(x))$, $f_n(x) = 3 + \dfrac{2x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$, на множестве $X = [2, +\infty)$.

Р е ш е н и е. Имеем $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \dfrac{2x}{n}\ln\dfrac{x}{n}\right) = 3$ при всех $x \in X$. Поэтому $r_n(x) = f_n(x) - f(x) = \dfrac{2x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$. Поскольку для каждого натурального n существует такое $\tilde{x}_n = 2n \in X$, что $r_n(\tilde{x}_n) = 4\ln 2 \not\longrightarrow 0$ то, согласно следствию 2.3, сходимость на множестве X неравномерная.

3. Равномерная сходимость функциональных рядов

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{3.1}$$

сходится (поточечно) на $G \subset \mathbb{R}$ и $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ – сумма ряда. Ряд называется *равномерно сходящимся* на множестве $X \subset G$, если последовательность его частных сумм $(S_n(x))$ сходится равномерно на X, $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon \quad \forall x \in X \quad \Longrightarrow \quad |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon.$$

При этом мы будем использовать обозначения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x) \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}.$$

Если $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x)$ – n-ый остаток ряда, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} \quad \Longleftrightarrow \quad r_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

Сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ можно трактовать как равномерно сходящийся на $\mathbb{R}$ ряд из постоянных на $\mathbb{R}$ функций c_k.

Критерий Коши равномерной сходимости. *Для равномерной сходимости на X функционального ряда* (3.1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равномерное условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu(\varepsilon) \quad \forall n \geq \nu(\varepsilon) \quad \forall p \geq 0 \quad \forall x \in X \Longrightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Следствие 3.1. (***Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.***) *Если ряд (3.1) сходится равномерно на множестве X, то на этом множестве равномерно сходится к нулю последовательность членов ряда:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} \quad \Longrightarrow \quad u_k(x) \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0.$$

Следствие 3.2. *Если*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \nu \quad \exists n \geq \nu \quad \exists p \geq 0 \quad \exists x \in X \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| > \varepsilon_0,$$

то ряд (3.1) *не является равномерно сходящимся на множестве* X.

Пример 3.1. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^{k-1}}{k} - \frac{x^k}{k+1} \right)$ на множестве $X = [-1; 1]$.

Р е ш е н и е. Найдем частные суммы ряда:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^{k-1}}{k}-\frac{x^k}{k+1}\right) = \left(1-\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right) = 1-\frac{x^n}{n+1}.$$

Тогда сумма ряда $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{x^n}{n+1}\right) = 1 \quad \forall x \in [-1;1]$. Исследуем последовательность $(S_n(x))$ на равномерную сходимость на промежутке $[-1;1]$. Поскольку

$$|S_n(x)-S(x)| = \left|\left(1-\frac{x^n}{n+1}\right)-1\right| = \frac{|x^n|}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то согласно следствию 2.1 $S_n(x) \overset{[-1;1]}{\rightrightarrows} S(x)$, что, в свою очередь, означает равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^{k-1}}{k}-\dfrac{x^k}{k+1}\right)$ на множестве $[-1;1]$.

Пример 3.2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

Р е ш е н и е. Последовательность $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Но для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $\tilde{x}_n = \sqrt[n]{n!}$ ("плохая точка") такое, что $|u_n(\tilde{x}_n)| = 1 \not\longrightarrow 0$. Значит, $u_n(x)$ сходится к 0 неравномерно. На основании следствия 3.2 равномерной сходимости ряда на $\mathbb{R}$ нет.

Пример 3.3. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ на равномерную сходимость на множестве $X = [0;1]$.

Р е ш е н и е. Используем следствие 3.2 критерия Коши. Рассмотрим $\sum\limits_{k=n}^{n+p}\dfrac{x}{1+k^2x^2}$ и положим здесь $p = n$ и $x = \dfrac{1}{n}$. Получим

$$\sum_{k=n}^{n+p}\frac{x}{1+k^2x^2}\Bigg|_{p=n,x=1/n} = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{k^2}{n^2}} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\dfrac{n^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\dfrac{(n+1)^2}{n^2}}+\ldots+\frac{1}{1+\dfrac{4n^2}{n^2}}\right) \ge \frac{1}{n}(n+1)\frac{1}{1+\dfrac{4n^2}{n^2}} = \frac{n+1}{5n} > \frac{1}{5}.$$

Таким образом, ряд не является равномерно сходящимся на $[0;1]$.

4. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Признак Вейерштрасса (мажорантный). *Если* $|u_k(x)| \le c_k$ *для всех* $x \in X$ *и всех* $k \in \mathbb{N}$, *и числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно (и абсолютно) на множестве* X.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ называется в этом случае *числовой мажорантой* для ряда (3.1) на X. Отсутствие сходящейся мажоранты еще не означает, что на X нет равномерной сходимости.

Если $|u_k(x)| \le v_k(x)$ для всех $x \in X$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Признак Абеля. *Если:*

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$,

2) *функциональная последовательность* $(a_n(x))$ *ограничена в совокупности, т. е. существует такое постоянное число* A, *что* $|a_k(x)| \le A$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$ *и всех* $x \in X$,

3) *последовательность* $(a_k(x))$ *монотонна при каждом фиксированном* $x \in X$,

то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Замечание. В роли ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ может выступать и сходящийся числовой ряд.

Признак Дирихле. *Если:*

1) *суммы* $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)$ *ограничены в совокупности, т. е. существует такое постоянное число* M, *что* $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \le M$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и всех* $x \in X$,

2) *последовательность* $(a_k(x))$ *монотонна при каждом фиксированном* $x \in X$,

3) $a_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$,

то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Как следствие признака Дирихле имеем

Признак Лейбница. *Если:*

1) $a_k(x) > 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$ *и всех* $x \in X$,

2) *последовательность* $(a_k(x))$ *монотонна при каждом фиксированном* $x \in X$,

3) $a_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$,

то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Пример 4.1. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{n^2 + x^2}$ на $\mathbb{R}$.

Р е ш е н и е. Так как

1) $\left|\dfrac{\operatorname{arctg} nx}{n^2 + x^2}\right| \le \dfrac{\pi}{2n^2}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{R}$,

2) числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2n^2}$ – сходится,

то исследуемый ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$ на основании признака Вейерштрасса.

Пример 4.2. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1 + n^4 x^2}$ на множестве $\mathbb{R}$.

Р е ш е н и е. Опять применим признак Вейерштрасса. Для оценки n-го члена ряда воспользуемся известным неравенством $\dfrac{2|a||b|}{a^2 + b^2} \le 1$. Получим

$$\left|\frac{x}{1 + n^4 x^2}\right| = \frac{2|x| \cdot n^2}{2n^2(1 + n^4 x^2)} \le \frac{1}{2n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2}$ является сходящейся числовой мажорантой для исходного ряда, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1 + n^4 x^2} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}$.

Пример 4.3. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^6 x^2} \sin nx$ на множестве $\mathbb{R}$.

Р е ш е н и е. Попробуем построить числовую мажоранту для этого ряда:

$$|u_n(x)| \le |e^{-n^6 x^2} \sin nx| \le \Big[|\sin\alpha| \le |\alpha|\Big] \le n|x| e^{-n^6 x^2}.$$

При фиксированном n рассмотрим функцию $\varphi(x) = n|x|e^{-n^6x^2}$ и найдем ее супремум на $\mathbb{R}$. Поскольку функция φ четная, то достаточно провести исследование для $x \geq 0$. Тогда

$$\varphi(x) = nxe^{-n^6x^2}, \quad \varphi'(x) = n(e^{-n^6x^2} - 2n^6x^2e^{-n^6x^2}) = ne^{-n^6x^2}(1 - 2n^6x^2).$$

Стационарная точка $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n^3}} \in [0; +\infty)$. Так как

$$\varphi(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2}n^2}e^{-\frac{1}{2}}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(+\infty) = 0,$$

то $\sup\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}n^2}e^{-\frac{1}{2}}$ и, значит, $|u_n(x)| \leq \dfrac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{n^2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Числовая мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{n^2}$ сходится, что гарантирует равномерную на $\mathbb{R}$ сходимость рассматриваемого функционального ряда.

Пример 4.4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k + \ln k}$ на отрезке $X = [\pi/3, 3\pi/2]$.

Решение. Воспользуемся признаком Дирихле, приняв

$$b_k(x) = \sin kx, \quad a_k(x) = \frac{1}{k + \ln k}.$$

Имеем:

1) суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ ограничены в совокупности на основании оценки

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 \quad \forall\, x \in [\pi/3, 3\pi/2] \quad \forall\, n \in \mathbb{N};$$

2) последовательность $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n + \ln n}\right)$ монотонна, поскольку

$$a_n = \frac{1}{n + \ln n} > \frac{1}{n + 1 + \ln(n+1)} = a_{n+1};$$

3) последовательность $\left(\dfrac{1}{n + \ln n}\right)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, а так как она не зависит от x, то $\dfrac{1}{n + \ln n} \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

Условия признака Дирихле выполнены, и поэтому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k + \ln k} \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Пример 4.5. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{n} + \sin 3x}$ на $\mathbb{R}$.

Решение. Применим признак Лейбница равномерной сходимости:

1) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}+\sin 3x} > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{R}$,

2) последовательность $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n}+\sin 3x}\right)$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ монотонна,

3) поскольку $\left|\dfrac{1}{2\sqrt{n}+\sin 3x}\right| \le \dfrac{1}{2\sqrt{n}-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $\dfrac{1}{2\sqrt{n}+\sin 3x} \overset{\mathbb{R}}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$.

Условия признака Лейбница выполнены, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{n}+\sin 3x} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}$.

Пример 4.6. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \operatorname{arctg} x^n$ на множестве $X = [1, +\infty)$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся признаком Абеля:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \overset{X}{\rightrightarrows}$ согласно признаку Лейбница, так как последовательность $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+x^2}}\right)$ монотонна при каждом фиксированном $x \in X$, и из неравенства $\dfrac{1}{\sqrt{n+x^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ следует, что $\dfrac{1}{\sqrt{n+x^2}} \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

2) последовательность $(\operatorname{arctg} x^n)$ ограничена в совокупности: $|\operatorname{arctg} x^n| \le \dfrac{\pi}{2}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in [1, +\infty)$;

3) числовая последовательность $(\operatorname{arctg} x^n)$ монотонна при каждом фиксированном $x \in [1, +\infty)$.

Заключаем, что по признаку Абеля $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \operatorname{arctg} x^n \overset{[1,+\infty)}{\rightrightarrows}$.

Пример 4.7. Рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n(x^2+n^2)}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n^3}$ на множестве $X = [1, +\infty)$.

При каждом фиксированном $x \in X$ имеем $\dfrac{x}{n(x^2+n^2)} \sim \dfrac{x}{n^3}$ при $n \to \infty$. При этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n(x^2+n^2)} \overset{X}{\rightrightarrows}$ согласно признаку Вейерштрасса, так как

$$\frac{x}{n(x^2+n^2)} = \frac{2xn}{2n^2(x^2+n^2)} \le \left[\frac{2ab}{a^2+b^2} \le 1\right] \le \frac{1}{2n^2},$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2}$ сходится. В то же время, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n^3}$ сходится на X неравномерно, так как для него не выполнено необходимое условие равномерной сходимости:

$$\frac{x}{n^3} = \left[x_n = n^3\right] = 1 \not\to 0,$$

откуда $\dfrac{x}{n^3} \overset{X}{\not\rightrightarrows} 0$.

Пример 4.7 показывает, что нельзя использовать замену функции на эквивалентную ей функцию при исследовании равномерной сходимости.

5. Функциональные свойства рядов и последовательностей

Теорема Стокса-Зейделя. *Если члены u_k функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ непрерывны на множестве X и ряд сходится равномерно на X, то сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ является функцией непрерывной на X.*

Теорема Стокса-Зейделя для функциональной последовательности. *Если члены функциональной последовательности $(f_n(x))$ непрерывны на множестве X и функциональная последовательность сходится равномерно на X, то предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ является функцией непрерывной на X.*

Теорема о почленном переходе к пределу под знаком суммы. *Пусть x_0 – предельная точка множества X. Если:*

1) *для любого натурального n существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = b_n \in \mathbb{R}$;*

2) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на X, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, то:*

1^0) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится;*

2^0) *существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) \in \mathbb{R}$;*

3^0) $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, *т. е. допустим почленный переход к пределу под знаком суммы:* $\lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to x_0} u_k(x)$.

Теорема о почленном переходе к пределу для функциональной последовательности. *Пусть x_0 – предельная точка множества X сходимости функциональной последовательности $(f_n(x))$. Если:*

1) *для любого натурального n существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) \in \mathbb{R}$;*

2) *функциональная последовательность сходится равномерно на* X, $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$,
то существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x),$$

т. е. допустима перестановка предельных переходов.

Теорема о почленном интегрировании ряда. *Если:*

1) *при всех натуральных* k *функции* u_k *интегрируемы по Риману на отрезке* $[a,b]$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$,
то

$$\int\limits_a^b \Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\Bigr)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_k(x)dx,$$

т. е. на отрезке $[a,b]$ *допустимо почленное интегрирование ряда.*

Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности. *Если*:

1) *при всех натуральных* n *функции* f_n *интегрируемы по Риману на отрезке* $[a,b]$;

2) $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$,
то

$$\int\limits_a^b \Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx,$$

т. е. допустим предельный переход под знаком интеграла.

Заметим, что почленное интегрирование ряда или переход к пределу под знаком интеграла в ряде случаев возможны и при отсутствии равномерной сходимости на $[a,b]$.

Теорема о почленном дифференцировании ряда. *Если*:

1) *при всех натуральных* k *функции* u_k *непрерывно дифференцируемы на* X, $u_k \in C^1(X)$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow{X}$,

то функция $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *дифференцируема на* X *и ее производную* $S'(x)$ *можно вычислить путем почленного дифференцирования функционального ряда, т. е.*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

Теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности. *Если*:

1) *для любого натурального* n *функции* $f_n \in C^1(X)$,

2) $f_n'(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$,

3) $f_n(x) \xrightarrow{X}$,

то предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *дифференцируема на* X *и*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Локальная равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Функциональная последовательность $(f_n(x))$ называется *локально равномерно сходящейся* на множестве X, если для любого $x_0 \in X$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $f_n(x) \overset{U(x_0)\cap X}{\rightrightarrows}$, или, что равносильно, $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$ для любого отрезка $[a, b] \subset X$.

Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *локально равномерно сходящимся* на множестве X, если для любого $x_0 \in X$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{U(x_0)\cap X}{\rightrightarrows}$, или, что равносильно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$ для любого отрезка $[a, b] \subset X$.

Замечание. Теоремы Стокса-Зейделя, теоремы о почленном дифференцировании остаются справедливыми, если в них условия равномерной сходимости заменить более слабым условием локальной равномерной сходимости.

Пример 5.1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность (f_n), $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, на множестве $X = [0;2]$.

Р е ш е н и е. Найдем предельную функцию:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in [0;1), \\ 0,5, \text{ если } x = 1, \\ 1, \text{ если } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Поскольку члены последовательности непрерывны на множестве X, а предельная функция разрывна, то сходимость на X неравномерная (следует из теоремы Стокса-Зейделя).

Пример 5.2. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ на множестве его сходимости.

Р е ш е н и е. При $x = 0$ ряд сходится, как ряд из нулей. При $x \neq 0$ имеем сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{1+x^2} < 1$. Поэтому $S(x) = = \dfrac{\frac{x}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \dfrac{1}{x}$. Итак, $S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0. \end{cases}$ Поскольку члены ряда непрерывны на $\mathbb{R}$, а его сумма разрывна, то ряд сходится на $\mathbb{R}$ неравномерно.

Пример 5.3. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^n$ на равномерную сходимость на множестве $X = (0,1)$.

Р е ш е н и е. Поточечная сходимость ряда на указанном множестве следует из признака Коши $\sqrt[n]{(x+\frac{1}{n})^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Точка $x = 1$ является предельной точкой множества $X = (0,1)$. Имеем $b_n = \lim\limits_{x\to 1-0} \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; так как $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \nrightarrow 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ расходится. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^n$ на множестве $(0;1)$ сходится неравномерно (см. теорему о почленном предельном переходе).

Пример 5.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n(2+\cos^2 nx)}{\sqrt{n^3+x^4}}$$

на множестве ее задания.

Р е ш е н и е. Поскольку

$$|u_n(x)| = \left| \frac{(x+2)^n(2+\cos^2 nx)}{\sqrt{n^3+x^4}} \right| \leq \frac{3|x+2|^n}{n^{3/2}},$$

то ряд заведомо сходится при $|x+2| \leq 1$, т. е. на отрезке $[-3;-1]$. При остальных x ряд расходится, так как $u_n(x) \nrightarrow 0$. Следовательно, $D(f) = [-3;-1]$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n^{3/2}}$

является сходящейся числовой мажорантой для заданного ряда и обеспечивает его равномерную сходимость на $[-3;-1]$. Так как члены функционального ряда непрерывны на $[-3;-1]$, то его сумма $f(x)$ непрерывна на $D(f)$ (см. теорему Стокса-Зейделя).

Пример 5.5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2 + (-1)^n n}{x^2 + n^2}$ на множестве ее задания.

Р е ш е н и е. Представим $f(x)$ в виде суммы рядов

$$f(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{x^2 + n^2},$$

каждый из которых очевидно сходится на $\mathbb{R}$. Для первого ряда $\dfrac{1}{x^2+n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$, что гарантирует равномерную сходимость этого ряда на $\mathbb{R}$, а также непрерывность функции $f_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}$ на $\mathbb{R}$ в силу теоремы Стокса-Зейделя. Второй ряд также сходится равномерно на $\mathbb{R}$ согласно признаку Лейбница, и его сумма $f_2(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Поэтому функция $f(x) = x^2 f_1(x) + f_2(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пример 5.6. На отрезке $[0;1]$ исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}).$$

Р е ш е н и е. Так как

$$S_n(x) = (xe^{-x} - 0) + (2x^2 e^{-2x} - xe^{-x}) + \ldots + (nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}) = nxe^{-nx},$$

то $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$ при $x \in [0;1]$. Следовательно, рассматриваемая сумма ряда является непрерывной функцией на отрезке $[0;1]$.

Вместе с тем ряд на $[0;1]$ сходится неравномерно. Действительно,

$$|S_n(x) - f(x)| = nxe^{-nx}\big|_{x=\tilde{x}_n} = \left[\tilde{x}_n = \frac{1}{n} \in [0;1]\right] = e^{-1} \nrightarrow 0$$

при $n \to \infty$. Согласно следствию 2.3 последовательность $(S_n(x))$, а, значит, и ряд, сходятся неравномерно на $[0;1]$.

Это пример показывает, что теорема Стокса-Зейделя дает лишь достаточные условия непрерывности суммы ряда.

Пример 5.7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3x^n + 1}{2^n\sqrt{1+nx^2}}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим ряд на множестве $X = [-1;1]$. Поскольку $\left|\dfrac{3x^n+1}{2^n\sqrt{1+nx^2}}\right| \le \dfrac{4}{2^n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in X$, то ряд сходится равномерно на $[-1;1]$ по признаку Вейерштрасса. На основании теоремы о почленном переходе к пределу имеем:

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3x^n+1}{2^n\sqrt{1+nx^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0}\frac{3x^n+1}{2^n\sqrt{1+nx^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

Пример 5.8. Исследовать дифференцируемость функции $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x}{n+x}$ при $x>0$.

Решение. Представим сумму ряда в виде $f(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ и исследуем функцию $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ сходится при каждом фиксированном $x\in(0,+\infty)$ согласно признаку Лейбница. Функции $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ и $u_n'(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+x)^2}$ непрерывны на $(0;\infty)$ при каждом $n\in\mathbb{N}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+x)^2}$ сходится равномерно на $(0;+\infty)$ согласно признаку Вейерштрасса, так как $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+x)^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится.

По теореме о почленном дифференцировании функция $g(x)$ дифференцируема на $(0;+\infty)$, а, значит, дифференцируема на $(0;+\infty)$ и функция $f(x)=xg(x)$.

Пример 5.9. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi}f(x)dx$, где $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx^2}{n(n+1)}$.

Решение. Члены ряда – непрерывные на $[0;2\pi]$ функции, ряд сходится на $[0;2\pi]$ равномерно (признак Вейерштрасса), поэтому допустимо почленное интегрирование ряда. Учитывая, что $\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 nxdx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 2nx)dx=\pi$, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi}f(x)dx=\int\limits_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n(n+1)}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin^2 nx}{n(n+1)}dx=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\pi.$$

Пример 5.10. Исследовать возможность перехода к пределу под знаком интеграла для $\int\limits_0^1\dfrac{nx}{n^2x^2+1}dx$.

Р е ш е н и е. Предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{n^2x^2+1} = 0$, $x \in [0;1]$. Непосредственной проверкой убеждаемся

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{nxdx}{n^2x^2+1} = \frac{1}{2n}\int\limits_0^1 \frac{d(n^2x^2+1)}{n^2x^2+1} = \frac{1}{2n}\ln(n^2x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{\ln(n^2+1)}{2n},$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^2+1)}{2n} = 0$.

С другой стороны, $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int\limits_0^1 0dx = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$, т. е. переход к пределу под знаком интеграла возможен.

Заметим, однако, что последовательность $(f_n(x))$ сходится на $[0;1]$ к $f(x)$ неравномерно, так как

$$\Big|f_n(x) - f(x)\Big| = \frac{nx}{n^2x^2+1}\Big|_{x=\tilde{x}_n} = \left[\tilde{x}_n = \frac{1}{n} \in [0;1]\right] = \frac{1}{2} \nrightarrow 0.$$

Пример 5.11. Исследовать на равномерную и локальную равномерную сходимость последовательность (f_n), $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, на множестве $X = (0;1)$.

Р е ш е н и е. Находим предельную функцию $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = 0$. Поскольку

$$\sup_{x\in(0;1)} \frac{x^n}{1+x^n} = \sup_{x\in(0;1)} \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0,$$

то последовательность не является равномерно сходящейся на X.

Исследуем ее теперь на локальную равномерную сходимость. Пусть $[\alpha;\beta]$ – произвольный отрезок, $[\alpha;\beta] \subset (0;1)$. Тогда

$$\sup_{x\in[\alpha;\beta]} \frac{x^n}{1+x^n} = \sup_{x\in[\alpha;\beta]} \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) = 1 - \frac{1}{1+\beta^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, $f_n(x) \overset{[\alpha;\beta]}{\rightrightarrows}$, что и означает локальную равномерную сходимость последовательности $(f_n(x))$ на $(0;1)$.

Пример 5.12. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \sin\dfrac{1}{3^k x}$ на множестве ее задания.

Р е ш е н и е. При $x = 0$ члены ряда не определены. Если же $x \neq 0$, то $2^k \sin\dfrac{1}{3^k x} \sim \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \cdot \dfrac{1}{x}$ при $k \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \dfrac{1}{x}$ – сходится, поэтому f определена на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Исследуем f на непрерывность. Для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ справедлива оценка

$$\left|2^k \sin \frac{1}{3^k x}\right| \le 2^k \frac{1}{3^k x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{\alpha} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{\alpha}$ сходится, поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{1}{3^k x}$ сходится на $[\alpha, \beta]$ равномерно, что означает его локальную равномерную сходимость на $(0, +\infty)$. Так как члены ряда непрерывны на $(0, +\infty)$, то f непрерывна на $(0, +\infty)$ (см. замечание на с. 16).

Функция f является нечетной, а поэтому она непрерывна и на интервале $(-\infty, 0)$. Таким образом, функция f непрерывна на множестве задания, т. е. на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Заметим, однако, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{1}{3^k x}$ сходится неравномерно на $(0, +\infty)$, так как

$$|u_n(x)|\Big|_{x=\tilde{x}_n} = \left[\tilde{x}_n = \frac{1}{3^n}\right] = 2^n \sin 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

т. е. $u_n(x) \overset{(0,+\infty)}{\not\rightrightarrows} 0$. Поэтому применить теорему Стокса-Зейделя в основной формулировке (см. с. 14) на $(0, +\infty)$ невозможно.

Пример 5.13. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n \ln n + x^2}$ дифференцируема на множестве ее задания.

Р е ш е н и е. При каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ ряд сходится согласно признаку Лейбница, следовательно, функция определена на $\mathbb{R}$.

При каждом фиксированном $n > 1$ функции

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n \ln n + x^2} \quad \text{и} \quad u_n'(x) = \frac{(-1)^{n-1} 2nx}{(n \ln n + x^2)^2}$$

непрерывны на $\mathbb{R}$.

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2nx}{(n \ln n + x^2)^2}$ сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ согласно признаку Вейерштрасса, так как

$$\left|\frac{(-1)^{n-1} 2nx}{n \ln n + x^2)^2}\right| \le \frac{2n \max\{|\alpha|, |\beta|\}}{n^2 \ln^2 n} = \frac{2 \max\{|\alpha|, |\beta|\}}{n \ln^2 n},$$

а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ сходится согласно интегральному признаку. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n'(x)$ сходится локально равномерно на $\mathbb{R}$. Таким образом, функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$ и ее производная может быть вычислена путем почленного дифференцирования исходного ряда, т. е. $f'(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2nx}{(n \ln n + x^2)^2}$.

6. Некоторые рекомендации при исследовании функционального ряда на равномерную сходимость

1^0. Удостовериться, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ действительно сходится на X.

2^0. Попытаться использовать признак Вейерштрасса:

а) если нетрудно установить оценку $|u_k(x)| \le b_k \; \forall\, x \in \mathbb{N} \; \forall\, x \in X$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$;

б) вычислить $\sup\limits_{x\in X} |u_k(x)| = a_k$ (можно использовать методы поиска глобального максимума (супремума) методами дифференциального исчисления). Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. Если же окажется, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то придется продолжить исследование другими методами.

3^0. Возможно, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $\tilde{x}_n \in X$, что $u_n(\tilde{x}_n) \not\to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $u_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} 0$, что, в свою очередь, влечет неравномерную на X сходимость ряда. Если же $u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$, то исследование ряда на равномерную сходимость следует продолжить.

4^0. Если частные суммы $S_n(x)$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ легко преобразуются, и возможно найти сумму ряда $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, то можно исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $(S_n(x))$ методами раздела 2.

Если $S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, то ряд сходится на X равномерно, если же $S_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows}$, то и ряд сходится на X неравномерно.

5^0. Если удается оценить остатки ряда $r_n(x) : |r_n(x)| \le \alpha_n \; \forall\, n \in \mathbb{N}$ $\forall\, x \in X$, α_n не зависит от x и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то ряд сходится равномерно на X.

6^0. Если исследуемый ряд имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k(x)$, где $v_k(x) > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in X$, то можно попытаться воспользоваться признаком Лейбница.

7^0. Представить ряд в виде $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ и попытаться проверить выполнение условий признака Абеля либо признака Дирихле.

8^0. Если функции $u_n(x)$ непрерывны на X, а сумма ряда – функция разрывная на X, то ряд сходится неравномерно на X.

9^0. Если x_0 – предельная точка множества X и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = b_n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится неравномерно на $\mathbb{R}$.

10^0. Использовать критерий Коши равномерной сходимости. Если на X выполнено равномерное условие Коши, то ряд сходится равномерно на X, если же имеет место его отрицание, то сходимость неравномерная на X.

7. Вариант контрольной работы

Основные задачи

1. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность (f_n), $f_n(x) = \sqrt{n}\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$, на множестве $E = (0;+\infty)$.

Решение. Предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = 0$. Рассмотрим $|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{n}\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt{n}\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = 1$, то $\sup\limits_{x\in(0;+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq 1$ и, следовательно, $\sup\limits_{x\in(0;+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$. Поэтому сходимость на множестве $(0;+\infty)$ неравномерная.

2. Исследовать на равномерную сходимость последовательность (f_n), $f_n(x) = \dfrac{4+3nx}{1+3x+4n}$, на множестве $E = [0;1]$.

Решение. Предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4+3nx}{1+3x+4n} = \dfrac{3}{4}x$. Имеем

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{4+3nx}{1+3x+4n} - \frac{3}{4}x\right| = \frac{16-3x-9x^2}{4(1+3x+4n)} \leq \frac{16}{4(1+4n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

На основании следствия 2.1 последовательность (f_n) сходится равномерно к f на отрезке $[0;1]$.

3. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^2}{1+n^3(x+1)^2}$ на множестве $E = [-2;+\infty)$.

Решение. $|u_n(x)| = \dfrac{(x+1)^2}{1+n^3(x+1)^2} \leq \dfrac{(x+1)^2}{n^3(x+1)^2} = \dfrac{1}{n^3}$ для всех $x \neq -1$ и всех $n \in \mathbb{N}$. При $x = -1$ справедливость такой оценки проверяется непосредственно: $0 \leq \dfrac{1}{n^3}$. Следовательно, $|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^3}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in E$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2n^3} \overset{[-2;+\infty)}{\Longrightarrow}$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x+1}{3x+2n^2} \sin \dfrac{n^2}{4x+1}$ на равномерную сходимость на множестве $E = [1; +\infty)$.

Р е ш е н и е. Ряд сходится на множестве $[1; +\infty)$ по теореме сравнения: $|u_n(x)| = \left| \dfrac{2x+1}{3x+2n^2} \sin \dfrac{n^2}{4x+1} \right| \le \dfrac{2x+1}{2n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x+1}{2n^2}$ сходится при любом фиксированном x. Поскольку

$$|u_n(x)|\Big|_{x=\tilde{x}_n} = \left[\tilde{x}_n = n^2\right] = \frac{2n^2+1}{3n^2+2n^2} \sin \frac{n^2}{4n^2+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{5} \sin \frac{1}{4} \neq 0,$$

то на основании следствия 2.3 $u_n(x) \overset{[1;+\infty)}{\underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows}} 0$. Не выполнено необходимое условие равномерной сходимости ряда, следовательно, ряд сходится неравномерно на $[1; +\infty)$.

5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2 \cos 2x}{1+n^4x^6}$ на множестве ее задания.

Р е ш е н и е. Легко видеть, что ряд сходится при любом фиксированном значении $x \in \mathbb{R}$. Поэтому $D(f) = \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{1+n^4x^6}$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \frac{2x - 4n^4x^7}{(1+n^4x^6)^2}, \quad \varphi'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_n = \frac{\pm 1}{\sqrt[6]{2n^4}}.$$

Поскольку $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pm\infty) = 0$, то

$$|u_n(x)| = \left| \frac{x^2 \cos 2x}{1+n^4x^6} \right| \le \varphi\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2n^4}} \right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot \frac{1}{n^{4/3}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{4/3}}$ сходится, то заданный ряд по признаку Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$. Поскольку члены ряда непрерывны на $\mathbb{R}$, то $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ в силу теоремы Стокса-Зейделя.

6. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2x}$ на множестве ее задания.

Р е ш е н и е. Для исследования сходимости ряда применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} e^{-2nx} = \begin{cases} 0, \text{ если } x > 0, \\ 1, \text{ если } x = 0, \\ \infty \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, при $x > 0$ ряд сходится, при $x \le 0$ — расходится. Таким образом, множество задания функции f — это интервал $(0; +\infty)$. На любом отрезке $[\alpha; \beta] \subset (0; +\infty)$ имеем $|u_n'(x)| = 2n^2 e^{-2n^2x} \le 2n^2 e^{-2\alpha n^2}$ при всех $x \in [\alpha, \beta]$

и всех $n \in \mathbb{N}$. Числовой ряд $\sum 2n^2 e^{-2\alpha n^2}$ сходится по признаку Коши, поэтому, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x) \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows}$, т. е. сходится локально равномерно на $(0;+\infty)$. Следовательно, функция f дифференцируема на $(0;+\infty)$.

Дополнительные задачи

1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность (f_n), $f_n(x) = x \operatorname{arctg} n^3 x$, на множестве $E = [0;+\infty)$.

Решение. Предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x \operatorname{arctg} n^3 x = \dfrac{\pi x}{2}$. Имеем

$$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\pi}{2}x - x \operatorname{arctg} n^3 x\right| = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n^3 x\right) =$$

$$= \left[\text{воспользуемся равенством } \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x},\ x > 0\right] =$$

$$= x \operatorname{arctg}\frac{1}{n^3 x} \le [\operatorname{arctg} x \le x] \le \frac{1}{n^3}.$$

Для $x = 0$ справедливость этой оценки проверяется непосредственно. Таким образом, $r_n(x) \le \dfrac{1}{n^3}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in [0;+\infty)$. Поскольку $\dfrac{1}{n^3} \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$, то по следствию 2.1 сходимость рассматриваемой последовательности равномерная, т. е. $x \operatorname{arctg} n^3 x \overset{[0,+\infty)}{\rightrightarrows} \dfrac{\pi x}{2}$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n + x - \ln(n^2 + x^2)}$ на равномерную сходимость на множестве $E = [0;+\infty)$.

Решение. Воспользуемся признаком Дирихле, положив

$$a_n(x) = \frac{1}{n + x - \ln(n^2 + x^2)}, \quad b_n(x) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\right| \le 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0;+\infty).$$

Последовательность $(a_n(x))$ монотонна при каждом фиксированном $x \ge 0$. Кроме того для всех $x \ge 0$ и всех натуральных n

$$a'_n(x) = \frac{2x - n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)(n + x - \ln(n^2 + x^3))^2} = -\frac{(x-1)^2 + n^2 - 1}{(n^2 + x^2)(n + x - \ln(n^2 + x^2))^2} \le 0.$$

Значит, при каждом фиксированном $n \ge 1$ функция $a_n(x)$ убывает на промежутке $[0, +\infty)$, и поэтому

$$\sup_{x\in[0;+\infty)} a_n(x) = a_n(0) = \frac{1}{n - \ln n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что в силу следствия 2.1 означает равномерную сходимость последовательности $(a_n(x))$ к нулю, $a_n(x)\overset{E}{\rightrightarrows}0$. На основании признака Дирихле ряд сходится равномерно на множестве E.

3. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2e^{-x}}{1+nx^3}\right)^3$ на множестве $E=[0;+\infty)$.

Р е ш е н и е. Попробуем применить признак Вейерштрасса. Имеем

$$\left|\frac{x^2e^{-x}}{1+nx^3}\right| \le \left[\frac{2ab}{a^2+b^2}\le 1,\ \frac{x^2}{1+nx^3}=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{2\sqrt{nx^3}}{1+nx^3}\le\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{n}}\right]\le\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{2\sqrt{n}}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\sqrt{x}e^{-x}$:

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}-\sqrt{x}e^{-x}=0 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{1}{2}.$$

Так как $\varphi(0)=0$, $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, $\varphi(+\infty)=0$, то $\varphi(x)\le\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$ для всех $x\in E$. Поэтому $\dfrac{x^2e^{-x}}{1+nx^3}\le\dfrac{1}{2\sqrt{2ne}}$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и всех $x\in E$, и, следовательно,

$$|u_n(x)|\le\left(\frac{1}{2\sqrt{2ne}}\right)^3=\left(\frac{1}{2\sqrt{2e}}\right)^3\cdot\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на E.

4. Найти все значения α, при которых последовательность (f_n), $f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx^2}$, сходится равномерно на множестве $E=[0;+\infty)$.

Р е ш е н и е. Предельная функция

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}n^\alpha xe^{-nx^2}=0\quad\forall\,\alpha\in\mathbb{R},\ \forall\,x\in E.$$

Рассмотрим функцию $\varphi_n(x)=|f_n(x)-f(x)|=n^\alpha xe^{-nx^2}$. Найдем супремум этой функции на $E:\varphi_n'(x)=n^\alpha e^{-nx^2}(1-2nx^2)$, поэтому $x=\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ — стационарная точка. Так как $\varphi_n(0)=0$, $\varphi_n(+\infty)=0$, $\varphi_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)=n^\alpha\dfrac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2e}n^{1/2-\alpha}}$ $\forall\,\alpha$, то $\sup\limits_{x\in E}\varphi_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}n^{1/2-\alpha}}$. Поэтому, если $\dfrac{1}{2}-\alpha>0$, т. е. $\alpha<\dfrac{1}{2}$, то $\sup\limits_{x\in E}\varphi_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ и $f_n(x)\overset{E}{\rightrightarrows}f(x)$ в силу супремального критерия.

Если же $\dfrac{1}{2}-\alpha\le 0$, т. е. $\alpha\ge\dfrac{1}{2}$, то $\sup\limits_{x\in E}\varphi_n(x)\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}0$ и, следовательно, $f_n(x)\overset{E}{\not\rightrightarrows}f(x)$.

5. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+2x^2)(1+4x^2)\dots(1+2nx^2)}$$

на множестве ее задания.

Решение. Если $x\neq 0$, то

$$u_n(x)=\frac{n}{(1+2x^2)(1+4x^2)(\dots(1+2nx^2)}\leq\frac{n}{(1+2x^2)^n},$$

и так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{(1+2x^2)^n}}=\dfrac{1}{1+2x^2}<1$, то на основании признака Коши и признака сравнения ряд сходится. Поскольку $u_n(0)=n\underset{n\to\infty}{\not\to}0$, то при $x=0$ ряд расходится. Таким образом, функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Исследуем непрерывность функции на интервале $(0;+\infty)$. На этом множестве члены ряда $u_n(x)$ непрерывны.

Для любого отрезка $[\alpha;\beta]\subset(0;+\infty)$ справедлива оценка

$$|u_n(x)|\leq\frac{n}{(1+2x^2)^n}\leq\frac{n}{(1+2\alpha^2)^n}\quad\forall\, x\in[\alpha,\beta],\ \ \forall\, n\in\mathbb{N},$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1+2\alpha^2)^n}$ сходится (по признаку Коши). Значит ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится на $(0;+\infty)$ локально равномерно и, следовательно, $f(x)$ непрерывна на $(0;+\infty)$ в силу замечания на с. 16. Поскольку функция f четная, то f непрерывна и на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, т. е. на всем множестве своего задания.

6. На интервале $(0;1)$ исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-\ln(n+x)}$$

Решение. Имеем $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{2n-\ln(n+x)}$.

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится при каждом x из интервала $(0;1)$ по признаку Лейбница;

2) функции $u_n(x)$ и $u_n'(x)=\dfrac{(-1)^n}{(2n-\ln(n+x))^2(n+x)}$ непрерывны на $(0;1)$;

3) $|u_n'(x)|=\dfrac{1}{(2n-\ln(n+x))^2(n+x)}\leq\dfrac{1}{(2n-\ln(n+1))^2n}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(2n-\ln(n+1))^2}$ сходится, так как $\dfrac{1}{n(2n-\ln(n+1))^2}\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{4n^3}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^3}$ сходится. Поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\overset{(0;1)}{\rightrightarrows}$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы о почленном дифференцировании ряда, и, следовательно, функция f дифференцируема на интервале $(0;1)$.

8. Упражнения

I. Найти предельные функции последовательностей $(f_n(x))$.

1. $f_n(x) = x^{2n} - 2x^n$.

2. $f_n(x) = (x-1)\operatorname{arctg} x^n$.

3. $f_n(x) = \dfrac{\ln(2^n + x^n)}{n}$, $x \geq 0$.

4. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}$.

5. $f_n(x) = (1+x)^n - 1$.

6. $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$.

7. $f_n(x) = \dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{4^n + x^{2n}}}$, $x \geq 0$.

8. $f_n(x) = \dfrac{x + e^{nx}}{1 + xe^{nx}}$.

9. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$.

II. Найти множества, на которых определены функции, являющиеся суммами рядов.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n-1}\left(\dfrac{1-2x}{x+2}\right)^n$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{3^n}(x^2 - 4x + 6)^n$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n + x^2}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{3^{nx} + 2}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n(n + e^x)}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+3}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 1)^{2x+1}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{xn^x}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{(3x^2 + 4x + 2)^n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+x}{n}\right)^n$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^n \cdot e^{-\frac{n}{x^2}}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{e^{n \sin x}}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^n(x+2)}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2x^3)^n \sin \dfrac{x}{n}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2x)^n \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{n+1}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n(x + \frac{1}{n})}{\sqrt{x - e}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n} \operatorname{tg}^{2n} x$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3x)^n \operatorname{tg} \dfrac{x}{3n}$.

III. Исследовать последовательности $(f_n(x))$ на равномерную сходимость на указанных множествах E.

1. $f_n(x) = \dfrac{n}{nx+4}$, $E = [1; 5]$.
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n}$, $E = \mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}+nx}{2+n^2x^2}$, $E = (0; +\infty)$.
4. $f_n(x) = \dfrac{2x^2-n^2}{x^2+nx+n^2}$, $E = [0; +\infty)$.
5. $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$, $E = [0; 1]$.
6. $f_n(x) = \sqrt{16x^2+\frac{1}{\ln n}}$, $E = \mathbb{R}$.
7. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}\left(1+\ln\dfrac{x}{n}\right)$, $E = [1; +\infty)$.
8. $f_n(x) = \dfrac{4nx}{1+4n^2x^2}$, $E = [2; +\infty)$.
9. $f_n(x) = \sqrt{e^{-x}+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}$, $E = [0; +\infty)$.
10. $f_n(x) = x^{n+2}-x^n$, $E = [0; 1]$.
11. $f_n(x) = x^n - x^{3n}$, $E = [0; 1]$.
12. $f_n(x) = \dfrac{4nx}{1+4x+n}$, $E = [0; 0,25]$.
13. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{n+n^2x+2}$, $E = (0; 1)$.
14. $f_n(x) = \dfrac{7nx}{1+n^3x^3}$, $E = [0; 31]$.
15. $f_n(x) = \dfrac{nx^2+1}{n+2x}$, $E = [0; 100]$.
16. $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}+4}{n^2+2nx+1}$, $E = [0; +\infty)$.
17. $f_n(x) = \dfrac{4nx}{1+n^2x^2}$, $E = (0; 4]$.
18. $f_n(x) = 1-x^{2n}$, $E = (-1; 1)$.
19. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{4n^3+x^2}$, $E = (1; +\infty)$.
20. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{4n^2+x^2}$, $E = [0; 1]$.
21. $f_n(x) = \sqrt{\sin^2 x + n^{-4}}$, $E = \mathbb{R}$.
22. $f_n(x) = \dfrac{\sin^2 nx}{2n+x+1}$, $E = [0; +\infty)$.
23. $f_n(x) = \dfrac{nx+n^2+x^2}{x^2+n^2}$, $E = [0; 1]$.
24. $f_n(x) = \dfrac{2nx+1}{2n+x+1}$, $E = [0; 4]$.
25. $f_n(x) = \dfrac{4nx}{4+n^2x^2}$, $E = [0; 2]$.
26. $f_n(x) = \dfrac{4nx}{2n+x}$, $E = [0; 0,25)$.
27. $f_n(x) = (1+x)^n - 1$, $E = (-1; 0)$.
28. $f_n(x) = \dfrac{(x+3)^n}{2n^2-1}$, $E = (-4; -2)$.
29. $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{x+n}{n}$, $E = \mathbb{R}$.
30. $f_n(x) = \dfrac{\cos(n+2)x}{\sqrt{n+1}}$, $E = \mathbb{R}$.
31. $f_n(x) = \cos\dfrac{2x}{n}$, $E = \mathbb{R}$.
32. $f_n(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x + e^{-n}}$, $E = [0; +\infty)$.
33. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx^2}{\ln n}$, $E = \mathbb{R}$.
34. $f_n(x) = \dfrac{3\operatorname{arctg}\frac{x}{n}+4}{2+\frac{x}{n}}$, $E = [0; +\infty)$.
35. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(n^2+x^2)}{n+\sin^2 x}$, $E = \mathbb{R}$.
36. $f_n(x) = 1-e^{-(2x+n)^2}$, $E = \mathbb{R}$.
37. $f_n(x) = \dfrac{2^n\cos^n x}{n^2}$, $E = (\pi/3; 2\pi/3)$.
38. $f_n(x) = \sqrt{4x^2+\dfrac{3}{n^2}}$, $E = \mathbb{R}$.
39. $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2+x)+\cos(n+x^2)}{n^2+x+n+x^2}$, $E = \mathbb{R}$.

IV. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость рядов на множествах E.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sin nx+1+n^2},\ E=\mathbb{R}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{e^{-nx^2}+e^n},\ E=\mathbb{R}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+n+1}{n^6+nx+x^2},\ E=[0;+\infty).$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{\operatorname{arctg}(nx+x^2)+4^n},\ E=\mathbb{R}.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2x+nx+4}{n^6x^3+n^3x+4},\ E=[1;8].$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\frac{n}{x}+\frac{1}{x^3}}{n^3x+nx^3},\ E=[1;+\infty).$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n^2x+x^3)}{\sqrt{n^3+x^4}},\ E=\mathbb{R}.$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx+\cos nx}{n\sqrt[3]{n}+x^2},\ E=\mathbb{R}.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^3(n+x)+\cos(n-x)}{\sqrt[5]{n^6+x^6}},\ E{=}\mathbb{R}.$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin xn^2\cos nx^2}{\sqrt{n^4+n^2x^2+x^4}},\ E=\mathbb{R}.$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x^3},\ E=[0;+\infty).$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^4x^4},\ E=\mathbb{R}.$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^8x^3},\ E=[0;+\infty).$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3x^3}{4+n^6x^4},\ E=\mathbb{R}.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^3x^4},\ E=\mathbb{R}.$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2x^2}{1+n^7x^3},\ E=[0;+\infty).$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^3},\ E=[0;+\infty).$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^3x^5},\ E=[0;+\infty).$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^7}{2+n^2x^{10}},\ E=\mathbb{R}.$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^4x^6},\ E=\mathbb{R}.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x^3+nx}{1+n^3}\right),\ E=[0;e].$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{nx}{1+n^4x^2+n^3},\ E=[0;14].$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x+3}{x^2n^2+4}\right),\ E=[2;10].$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{2}{n^2+x^2},\ E=\mathbb{R}.$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{2x}{x^2+n^3}\right),\ E=\mathbb{R}.$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{2x}{x^4+n^3},\ E=\mathbb{R}.$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}(x^6ne^{-nx^2}),\ E=\mathbb{R}.$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(x^{10}n^3e^{-nx^2}),\ E=\mathbb{R}.$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+x^8n^2e^{-nx^2}),\ E=\mathbb{R}.$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}(x^7n^2e^{-nx^2}),\ E=\mathbb{R}.$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}e^{-nx},\ E=[0;+\infty).$

V. Пользуясь признаками Абеля и Дирихле, доказать равномерную сходимость рядов на множествах E.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n\ln n},\ E=[0;+\infty).$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+3)}{n\sqrt{n}+8}e^{-nx},\ E=[0;+\infty).$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{n^2+4}e^{-nx},\ E=[0;+\infty).$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+30}e^{-nx},\ E=[0;+\infty).$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{\sqrt{n}+1},\ E=[0;+\infty).$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{n^2+3n+2}e^{-nx},\ E=[0;+\infty).$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+4}e^{-nx},\ E=[0;+\infty).$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2+3}{n^3+2}e^{-nx},\ E=[0;+\infty).$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot(-1)^n}{\sqrt{n+2}}e^{-nx^2},\ E=[0;+\infty).$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2n+4},\ E=[\pi/12;5\pi/3].$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{3n+\sqrt{n}},\ E=[\pi/94;37\pi/19].$
12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n\ln n},\ E=[\pi/8;7\pi/4].$
13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\sqrt{\ln n}},\ E=[\pi/81;5\pi/6].$
14. $\sum\limits_{n=10}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln\ln n},\ E=[\pi/36;11\pi/6].$
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos nx}{n^2+n+1},\ E=[\pi/10;9\pi/5].$
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)\sin nx}{n\sqrt{n}+4},\ E=[\pi/42;39\pi/40].$
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos nx}{n\sqrt[100]{n}+2},\ E=[\pi/13;13\pi/7].$
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)\sin nx}{n^2+1},\ E=[\pi/16;9\pi/16].$
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos nx}{n^2+3n+5},\ E=[\pi/7;7\pi/4].$

VI. Пользуясь определением, доказать равномерную сходимость рядов на множествах E.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{n^2x^2+4}-\dfrac{x}{(n+1)^2x^2+4}\right),\ E=(0;+\infty).$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{n}x^3+2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{n+1}x^3+2}\right),\ E=(0;+\infty).$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^3}{nx^4+3}-\dfrac{x^3}{(n+1)x^4+3}\right),\ E=(0;+\infty).$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{n^3x^3+3}-\dfrac{x}{(n+1)^3x^3+3}\right),\ E=(0;+\infty).$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{n^2x^3+1}-\dfrac{x^2}{(n+1)^2x^3+1}\right),\ E=(0;+\infty).$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{n^2x^3+5}-\dfrac{x}{(n+1)^2x^3+5}\right),\ E=(0;+\infty).$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{nx^3+1}-\dfrac{x^2}{(n+1)x^3+1}\right)$, $E=(0;+\infty)$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^3}{n^2x^4+2}-\dfrac{x^3}{(n+1)^2x^4+2}\right)$, $E=(0;+\infty)$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{n^3x^3+2}-\dfrac{x^2}{(n+1)^3x^3+2}\right)$, $E=(0;+\infty)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{n^3x^2+1}-\dfrac{x}{(n+1)^3x^2+1}\right)$, $E=(0;+\infty)$.

VII. Исследовать ряды на равномерную сходимость на указанных множествах E.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n\sqrt{n}+x^2}$, $E=\mathbb{R}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}e^{-nx^2}$, $E=[0;+\infty)$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x}{n+\ln x}e^{-nx^2}$, $E=[1;10]$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$, $E=(0;1]$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+2)}{n\ln n+x}$, $E=(0;+\infty)$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+4)}{n^2+13x}$, $E=(0;+\infty)$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}$, $E=(0;1)$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{x^3+2n}$, $E=(0;+\infty)$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}}{1+n}$, $E=(0;1)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+2)}{n\sqrt{n}+x^4}$, $E=\mathbb{R}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+x}$, $E=(0;+\infty)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+\ln(n+1)}$, $E=(0;+\infty)$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x(n+1)}{n^3+2}$, $E=(0;+\infty)$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n\sqrt[4]{n}+\sin x}$, $E=[0;2\pi]$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{1+n^2x^2}\sin\sqrt{\dfrac{x}{n}}$, $E=[0;1]$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin x}{(x+2)^n}$, $E=(-1/4;1/4)$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{2\pi nx}{3}}{\sqrt{x^2+n^3}}$, $E=\mathbb{R}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{arctg} nx}{n^2+x^2}$, $E=\mathbb{R}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x+\cos n^2x^2}{(n+x^2)\ln^2(n+1)}$, $E=\mathbb{R}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$, $E=(0;+\infty)$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{2nx}{5}}{\sqrt[100]{n(x+n^{100})}}$, $E=[0;+\infty)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}\cos nx}{n}$, $E=(0;\pi/2)$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{3+2nx+x^3n^2}$, $E=[2;3]$.

24. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(1+x)}{n\sqrt{n}+x}$, $E=(-5;5)$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x} e^{-\frac{n}{x}}$, $E = (0; +\infty)$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^2 + x}$, $E = (0; +\infty)$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{1 + n + n^2x^2 + n^3}$, $E = \mathbb{R}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos 2nx}{(x+5)^n}$, $E = (-2; 2)$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx + n^2 + x^2}{x^2 + nx + n^5}$, $E = [0; 1]$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n + n^2x^2}$, $E = (0; 1)$.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2 + n^2} + x^2}$, $E = \mathbb{R}$.

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx^2}$, $E = [0; +\infty)$.

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx + 2\cos nx}{n + \sqrt{n+x}}$, $E = [2; 4]$.

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n+x} + 2}$, $E = (\pi/2; 3\pi/2)$.

35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \cos x}$, $E = (0; +\infty)$.

36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{arctg} \frac{n}{x}}{n + e^{nx}}$, $E = (0; 1)$.

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{12}}{\sqrt{1+x} + n}$, $E = (-1/2; +\infty)$.

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n + x}$, $E = [1; +\infty)$.

39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{x + n^2}}$, $E = [0; 6]$.

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + 2}{n^2 x + 4n^3}$, $E = [0; 2]$.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{arctg} nx}{\sqrt{n^3 + x} + 2}$, $E = [0; \pi/4]$.

VIII. Исследовать на непрерывность функции $f(x)$ на их множествах задания.

1. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)^n}$.

2. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx+3)}{2^n + x^2}$.

3. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^{3/2} + \ln^2 x}$.

4. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}$.

5. $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln^2 n + \sin^2 nx}$.

6. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{arctg} n + \mathrm{arctg} x}{n^5 + \mathrm{ch}\, nx}$.

7. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

8. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin x}{(2+x^2)^n}$.

9. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{n^2 + n \sin^2 x + n^2 \,\mathrm{sh}^2\, x}$.

10. $f(x) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{n+1} - x^n)$.

11. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

12. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n \pi x}{3^n}$.

13. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \mathrm{arctg} nx}{\sqrt{n!}}$.

14. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n}$.

15. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx+\cos nx}{\sin^2 x+n\sqrt[3]{n+1}}$.

16. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\ln^2 x+e^x}$.

17. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x+\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} nx+n\operatorname{ch} n}$.

18. $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+3}{\sin x+n^4}$.

19. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[5]{n^6+x^6}}$.

20. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

21. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n-1}\cdot\dfrac{x}{n+x^2}$.

22. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n^3}{3^n+1}\cdot\dfrac{1}{x^2+\sqrt{n}}$.

23. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\operatorname{arctg}\dfrac{2}{n+x^2}$.

24. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n(n+e^x)}$.

25. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+2n^2}}$.

IX. Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\cdot\dfrac{x^n+2}{x^n+4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin nx}{1+n+n^3}$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+3^n x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2x^2+2}{(nx+n^2x^2+4)2^n}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2+nx+3}{5^n+2x+4x^3n}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x+3^n}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}\cdot\dfrac{(x-1)^n}{(x-1)^n+1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n+x^{-n}}{10^n}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{(x+3)^n}$.

10. $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{nx+n^2x^2+n^3x^4}\cdot\dfrac{1}{3^n}$.

11. $\lim\limits_{x\to \pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x\sin\frac{2n+1}{2}x}{2^n}$.

12. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^3}{1+3^n x^3}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+x}{(x+n)(x+n+1)}$.

X. Доказать законность почленного дифференцирования рядов на указанных множествах E.

1. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n\sqrt{n+x}}$, $E=(0;+\infty)$.

2. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos nx}{n^2\sqrt[9]{n}+2}$, $E=[\pi/2;3\pi/2]$.

3. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n^2}\sin\dfrac{\pi}{n}$, $E=[0;+\infty)$.

4. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n ne^{-nx}}{n^3+2n+1}$, $E=[0;+\infty)$.

5. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n+x}$, $E=[0;20]$.

6. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx+\cos nx}{n^2\sqrt{n}+2}$, $E=\mathbb{R}$.

7. $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2\ln n}$, $E=[\pi/6;11\pi/6]$.

8. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+4)}{n^2+13x}$, $E=[0;+\infty)$.

9. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\ln x}$, $E=(1;+\infty)$.

10. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2\mathrm{arctg}nx}{\sqrt{n!}}$, $E=\mathbb{R}$.

11. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\sqrt{n}x}{n^2+\cos\sqrt{n}x}$, $E=(0;\pi)$.

12. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n^2x}{2^n+n^2+x^2}$, $E=(0;+\infty)$.

XI. Доказать законность почленного интегрирования рядов на указанных множествах E.

1. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin(n+x)}{1+n^2+nx}$, $E=[0;13]$.

2. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x^3}$, $E=[0;14]$.

3. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{\mathrm{arctg}(n+2x)+5^n}$, $E=[-4;8]$.

4. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2+nx+3n}{2^{nx}+1}$, $E=[1;5]$.

5. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx+\cos(n+x)}{xn\sqrt{n}+x^2}$, $E=[14;28]$.

6. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(x-n^2)\cos(x+n^2)}{nx+n^2x+xn^2}$, $E=[3;21]$.

7. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+x)}{(\ln^2 n+\ln^2 x)n^2}$, $E=[5;18]$.

8. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}+1}{n^2+x^2}$, $E=[0;145]$.

9. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{sh}\,nx+\mathrm{ch}\,nx}{e^{2n}}$, $E=[0;1]$.

10. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{arctg}(2^n+x)}{x2^n+1}$, $E=[1;10]$.

11. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2+nx+n^2}{x^4+n^2x^2+n^4},\ E=[-8;10].$

12. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n\ln^n x}{n!},\ E=(0;1].$

XII. Выяснить, можно ли вычислять предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx$, $[a,b]=E$, переходя к пределу под знаком интеграла.

1. $f_n(x)=\dfrac{\mathrm{arctg}nx}{1+n^2x^2},\ E=[0;1].$

2. $f_n(x)=\dfrac{2nx+1}{n+x+1},\ E=[0;4].$

3. $f_n(x)=\dfrac{x}{n}\left(1+3\ln\dfrac{x}{n}\right),\ E=[1;e].$

4. $f_n(x)=nxe^{-nx^2},\ E=[0;1].$

5. $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^4},\ E=[0;1].$

6. $f_n(x)=\dfrac{3nx}{1+8n^2x^2},\ E=[0;1].$

7. $f_n(x)=x\sin\dfrac{x^2}{n},\ E=[0;\pi].$

8. $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx},\ E=[0;1].$

9. $f_n(x)=\dfrac{x\cos nx^2}{\sqrt{n}},\ E=[0;\pi].$

10. $f_n(x)=n^2\sin x\cos^{2n}x,\ E=[0;\pi/2].$

11. $f_n(x)=\dfrac{xn\sqrt{n}}{n^3x^2+1},\ E=[0;1].$

12. $f_n(x)=\dfrac{x^2}{1+n^3x^6},\ E=[0;1].$

13. $f_n(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{n+1}}(e^{-nx}+1),\ E=[0;1].$

14. $f_n(x)=nx(1-x^2)^n,\ E=[0;1].$

15. $f_n(x)=x^2-2x^n,\ E=[0;1].$

9. Задания для лабораторных работ

Лабораторная 1.

Пусть $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Найти множество D сходимости последовательности (f_n) и ее предельную функцию f.
2. Пусть $\alpha = 0$. Будет ли сходимость последовательности (f_n) к функции f равномерной на D?
3. Найти все значения $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых последовательность (f_n) сходится к предельной функции f равномерно на множестве D.
4. Для значений α, при которых сходимость последовательности (f_n) к функции f не является равномерной на D, указать какое-либо подмножество $D_1 \subset D$, для которого $f_n(x) \overset{D_1}{\rightrightarrows} f(x)$.
5. Пусть $\alpha = 0$. Найти множество сходимости и сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
6. Используя теорему Стокса-Зейделя, исследовать при $\alpha = 0$ равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ на его множестве сходимости.

Лабораторная 2.

Пусть $u_n(x) = \sqrt{n} x e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Найти множество D сходимости последовательности (u_n) и ее предельную функцию.
2. Будет ли сходимость последовательности (u_n) равномерной на D?
3. Найти множество D_1 сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
4. Показать, что сумма s этого ряда разрывна в точке $x = 0$.
5. Является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходящимся на $[0, +\infty)$?
6. Исследовать на непрерывность функцию s на $(0, +\infty)$.

Лабораторная 3.

Пусть $f_n(x) = \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$, $x \in [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Указать множество $D \subset [0, +\infty)$, на котором последовательность (f_n) сходится, и найти ее предел f.

2. Будет ли сходимость последоваетльности (f_n) к функции f равномерной на D?

3. Найти множество D_1 сходимости последовательности производных (f_n') и ее предел.

4. Показать, что сходимость последовательности (f_n') не будет равномерной на D_1.

5. Указать какое-либо подмножество $D_2 \subset D_1$, на котором последовательность (f_n') сходится равномерно.

6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 (1+x^2) f_n'(x)dx$.

Лабораторная 4.

Пусть $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Найти множество D сходимости последовательности (f_n) и ее предельную функцию f.

2. Показать, что последовательность (f_n) сходится к функции f равномерно на $[-l, l]$, при любом $l \in (0, +\infty)$.

3. Будет ли сходимость последовательности (f_n) к функции f равномерной на $\mathbb{R}$?

4. Доказать теорему: если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на X, то $u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

5. Сходится ли равномерно на $\mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$?

6. Указать какое-либо множество, на котором ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ будет равномерно сходящимся.

7. Доказать непрерывность суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на $\mathbb{R}$.

Лабораторная 5.

Пусть $u_n(x) = \dfrac{x^\alpha e^{-nx}}{n}$, $\alpha > 0,\ n \in \mathbb{N}$.

1. Найти множество D сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

2. Найти $\sup\limits_{[0,+\infty)} u_n(x)$ и доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на промежутке $[0, +\infty)$.

3. Показать, что сумма ряда $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$.

4. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{-\alpha} u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на интервале $(0, +\infty)$.

5. Доказать, что функция $m(x) = x^{-\alpha} s(x)$ непрерывна на $(0, +\infty)$. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} m(x)$.

6. Показать, что функция $m(x)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0, +\infty)$.

7. Вычислить производную $m'(x)$, а затем найти функции $m(x)$ и $s(x)$.

Лабораторная 6.

Пусть $u_n(x) = n^p e^{-n^2 x}$, $p \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

1. Показать, что при $p = -2$ последовательность (u_n) сходится равномерно на $[0, +\infty)$.

2. Найти все значения p, при которых последовательность (u_n) сходится равномерно на $[0, +\infty)$.

3. Показать, что функция $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ непрерывна на $(0, +\infty)$ при любом $p \in \mathbb{R}$.

4. Найти все p, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p e^{-n^2 x}$ имеет сходящуюся числовую мажоранту на $[0, +\infty)$.

5. Показать, что функция $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p e^{-n^2 x}$ непрерывна на $(0, +\infty)$ при любом $p \in \mathbb{R}$.

6. Для каких p функция s непрерывна на $[0, +\infty)$?

7. Показать, что функция s имеет на $(0, +\infty)$ производные любого порядка.

Лабораторная 7.

Пусть $f_n(x) = \dfrac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2),\ n\in\mathbb{N}$.

1. Найти множество D сходимости последовательности (f_n) и ее предельную функцию f.

2. Будет ли сходимость последовательности (f_n) к функции f равномерной на D?

3. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = 0$ для любого отрезка $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

4. Найти множество D_1 сходимости последовательности (f_n') и ее предельную функцию.

5. Будет ли сходимость последовательности (f_n') равномерной на D_1?

6. Можно ли к последовательности (f_n) на D_1 применить теорему о почленном дифференцировании ?

7. Справедливо ли равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'$?(Сравнить с заданиями 5 и 6.)

Лабораторная 8.

Пусть $f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x^n),\ n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{R}$.

1. Для каждого значения α найти множество сходимости D_α последовательности (f_n) и предельную функцию f.

2. Показать, что при $\alpha = 0$ сходимость последовательности (f_n) к функции f не будет равномерной на D_0.

3. Изучить равномерную сходимость последовательности (f_n) к функции f на D_α при каждом $\alpha\in\mathbb{R}$.

4. Для значений α, для которых сходимость последовательности (f_n) к предельной функции f не является равномерной на D_α, найти какое-либо подмножество $D'_\alpha\subset D_\alpha$ такое, что $f_n(x)\overset{D'_\alpha}{\rightrightarrows} f(x)$.

5. Пусть $\alpha = 0$ и $u_n(x) = x^n(1-x^n)$. Найти множество сходимости D ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и его сумму.

6. Используя теорему Стокса-Зейделя, изучить равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на D.

Лабораторная 9.

Пусть $u_n(x) = nxe^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Найти множество сходимости D и предел u последовательности (u_n).
2. Будет ли сходимость последовательности (u_n) к функции u равномерной на D?
3. Найти множество сходимости D_1 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
4. Доказать теорему: если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на X, то $u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.
5. Показать, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не является равномерной на множестве D_1.
6. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.
7. Показать, что функция $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеет производную на $(0, +\infty)$.

Лабораторная 10.

Пусть $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Найти множество D сходимости последовательности (f_n) и ее предельную функцию f.
2. Будет ли сходимость последовательности (f_n) к функции f равномерной на D?
3. Показать, что все функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, дифференцируемы на D. Найти предел последовательности (f_n').
4. Изучить дифференцируемость f на D. Используя теорему о почленном дифференцировании последовательности, изучить равномерную сходимость на D последовательности (f_n').
5. Пусть $u_n(x) = f_n(x) - |x|$, $n \in \mathbb{N}$. Изучить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
6. Используя теорему о почленном переходе к пределу в рядах, изучить равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на D.
7. Найти какое-либо подмножество $D_1 \subset D$, на котором ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.

Лабораторная 11.

Пусть $f_n(x) = n^p \sin x \cos^n x,\ x \in [0, \pi/2],\ n \in \mathbb{N}$.

1. При каждом $p \in \mathbb{R}$ найти $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in [0, \pi/2]$.

2. Вычислить интегралы $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} f_n(x)dx$ и найти $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

3. Сравнить $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ и $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)dx$. Отсюда найти те значения параметра p, при которых сходимость (f_n) на $[0, \pi/2]$ заведомо неравномерная.

4. Показать, что для $p < 0$ сходимость последовательности (f_n) к функции f равномерная на $[0, \pi/2]$.

5. Выяснить, для каких p сходимость последовательности (f_n) к функции f равномерная на $[0, \pi/2]$.

6. Указать какое-либо множество $D \subset [0, \pi/2]$, на котором сходимость последовательности (f_n) к функции f будет равномерной при любом действительном p.

7. Показать, что при $p < -0,5$ сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ является непрерывной на промежутке $[0, \pi/2]$ функцией.

10. Ответы и указания

I. 1. $f(x) = \begin{cases} 0, \ |x| < 1, \\ -1, \ x = 1. \end{cases}$ 2. $f(x) = \begin{cases} 0, \ -1 < x \le 1, \\ \pi(x-1)/2, \ x > 1. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \ln 2, \ 0 < x \le 2, \\ \ln x, \ x > 2. \end{cases}$ 4. $f(x) = \begin{cases} 1, \ x \le -1, \\ e^{x+1}, \ x > -1. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} -1, \ -2 < x < 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$ 6. $f(x) = \pi|x|/2.$

7. $f(x) = \begin{cases} 0, \ 0 \le x < 2, \\ x^2, \ x > 2, \\ 2\sqrt{2}, \ x = 2. \end{cases}$ 8. $f(x) = \begin{cases} x, \ x < 0, \\ \dfrac{1}{x}, \ x > 0, \\ 1, \ x = 0. \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 1, \ -1 < x > 1, \\ x, \ 1 \le x \le 2, \\ \dfrac{x^2}{2}, \ x > 2, \ x < -2. \end{cases}$

II. 1. $[-1/3; 3]$. 2. $(1; 3]$. 3. $\{0\}$. 4. $[0; +\infty[$. 5. $\mathbb{R}$. 6. $(-\infty; 0)$. 7. $(1/4; +\infty)$. 8. $(2; +\infty)$. 9. $(-\infty; -1) \cup (-1/3; +\infty)$. 10. $\varnothing$. 11. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. 12. $(2k\pi; (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. 13. $(-2; -2+e^{-1}) \cup (-2+e; +\infty)$. 14. $[-1/\sqrt[3]{2}; 1/\sqrt[3]{2})$. 15. $[-1/2; 1/2)$. 16. $\varnothing$. 17. $(-\pi/6 + \pi k; \pi/6 + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. 18. $[-1/3; 1/3)$.

III. Здесь $r_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$, A – некоторое число, $A \ne 0$.

1. Равномерно, $r_n(x) \le \dfrac{4}{n+4}$. 2. Равномерно, $r_n(x) \le \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

3. Неравномерно, $r_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \nrightarrow 0$. 4. Неравномерно, $r_n(n) \nrightarrow 0$.

5. Неравномерно, $r_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \nrightarrow 0$. 6. Равномерно, $r_n(x) \le \dfrac{1}{\sqrt{\ln n}}$.

7. Неравномерно, $r_n(n) \nrightarrow 0$. 8. Равномерно, $r_n(x) \le r_n(2) \to 0$.

9. Равномерно, $r_n(x) \le \dfrac{1}{n^{3/4}}$. 10. Равномерно, $\sup\limits_E r_n(x) \to 0$.

11. Неравномерно, $r_n\left(\sqrt[2n]{\dfrac{1}{3}}\right) \nrightarrow 0$. 12. Равномерно, $r_n(x) \le \dfrac{A}{n}$.

13. Равномерно, $r_n(x) \le \pi/2n$. 14. Неравномерно, $r_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \nrightarrow 0$.

15. Равномерно, $r_n(x) \le \dfrac{A}{n}$. 16. Равномерно, $r_n(x) \le \dfrac{5}{n^2}$.

17. Неравномерно, $r_n\left(\frac{1}{n}\right) \nrightarrow 0$.

18. Неравномерно, $\sup r_n(x) \nrightarrow 0$.

19. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

20. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{1}{2n}$.

21. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{1}{n^2}$.

22. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{1}{2n}$.

23. Равномерно, $r_n \le \frac{1}{n}$.

24. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{A}{n}$.

25. Неравномерно, $r_n\left(\frac{1}{n}\right) \nrightarrow 0$.

26. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{A}{n}$.

27. Неравномерно, $\sup\limits_E r_n(x) \nrightarrow 0$.

28. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{1}{2n^2 - 1}$.

29. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{1}{n}$.

30. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

31. Неравномерно, $r_n(n) \nrightarrow 0$.

32. Равномерно, $r_n(x) \le e^{-n/2}$.

33. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{1}{\ln n}$.

34. Неравномерно, $r_n(n) \nrightarrow 0$.

35. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{A}{n}$.

36. Неравномерно, $r_n\left(-\frac{n}{2}\right) \nrightarrow 0$.

37. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{1}{n^2}$.

38. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{A}{n}$.

39. Равномерно, $r_n(x) \le \frac{2}{n^2 + n - \frac{1}{4}}$.

IV. В заданиях 11, 13 – 20, 26, 31 найти $\sup\limits_E |u_n(x)| = c_n$ и рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.

27. $\operatorname{arctg}(x^6 n e^{-nx^2}) \le x^6 n e^{-nx^2} = v_n(x)$. Найти $\sup\limits_E v_n(x) = c_n$.

28. $\sin(x^{10} n^3 e^{-nx^2}) \le x^{10} n^3 e^{-nx^2} = v_n(x)$. Найти $\sup\limits_E v_n(x) = c_n$.

29. $\ln(1 + x^8 n^2 e^{-nx}) \le x^8 n^2 e^{-nx^2} = v_n(x)$. Найти $\sup\limits_E v_n(x) = c_n$.

30. $\operatorname{arctg}(x^7 n e^{-nx^2}) \le x^7 n e^{-nx^2} = v_n(x)$. Найти $\sup\limits_E v_n(x) = c_n$.

VII. 1 – 3, 5, 6, 8, 10 – 12, 14, 31, 32, 35 — сходятся равномерно по признаку Лейбница. 4. Неравномерно; $u_n(x)$ не сходится равномерно к 0 на E, $u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. 7. Неравномерно; $\sup\limits_E u_n(x) = 1 \nrightarrow 0$. 9. Неравномерно; $\lim\limits_{x\to 0} u_n(x) = \frac{1}{1+n}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$ расходится (см. теорему о почленном предельном переходе с. 14). 13. Неравномерно; $\sup\limits_E u_n(x) = +\infty$. 15. Неравномерно; $\sup\limits_E u_n(x) \ge u_n\left(\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}$. 16 – 19, 21, 23, 24, 27 – 29, 40, 41 – сходятся равномерно по признаку Вейерштрасса.

20. Неравномерно; $\sup\limits_E u_n(x) = 1 \nrightarrow 0$. 22. Неравномерно; $\lim\limits_{x\to 0} u_n(x) = \dfrac{1}{n}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. 25. Неравномерно; $\sup\limits_E u_n(x) \geq u_n(n) = e^{-1} \nrightarrow 0$. 26. Неравномерно; $\sup\limits_E |u_n(x)| = +\infty$. 30. Неравномерно; $\lim\limits_{x\to+0} u_n(x) = \dfrac{1}{n}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. 33, 34, 37 − 39 — сходятся равномерно по признаку Дирихле. 36. Неравномерно; $\lim\limits_{x\to+0} u_n(x) = \dfrac{\pi}{2n}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2n}$ расходится.

VIII. 1. Непрерывна на $\mathbb{R}$, $f(x) = x(1+x^2)$. 2, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 15, 17 − 19, 21 − 25 — непрерывны на $\mathbb{R}$; использовать теорему Стокса-Зейделя. 3. Непрерывна на $(0, +\infty)$. 4. $D(f) = [0, +\infty)$, точка разрыва $x_0 = 0$. 7. $D(f) = \mathbb{R}$, точка разрыва $x_0 = 0$. 10. $D(f) = (-1, 1]$, точка разрыва $x_0 = 1$. 11. Непрерывна на $D(f) = (0, +\infty)$; использовать локальную равномерную сходимость. 14. Непрерывна на $D(f) = [e^{-1}, e)$; использовать локальную равномерную сходимость. 16. Непрерывна на $D(f) = (0, +\infty) \setminus \{1\}$; использовать локальную равномерную сходимость. 20. Непрерывна на $D(f) = (-1, 1)$, использовать локальную равномерную сходимость.

IX. Использовать теорему о почленном предельном переходе в рядах. 1. 1/5. 2. 0. 3. 1/2. 4. 1. 5. 3/4. 6. 1/2. 7. −1/8. 8. 20/9. 9. 1/2. 10. 1/2. 11. $2\pi/3$. 12. 1/2. 13. 3.

XII. 1, 6, 11, 12, 15 — можно; проверяется непосредственно. 2, 3, 7, 9, 13 — можно; использовать теорему о почленном интегрировании последовательности. 4, 8 — можно, хотя равномерной сходимости на множестве E нет. 10, 14 − нельзя; проверяется непосредственно.

Содержание

Учебное издание

Кастрица Олег Адамович
Мазаник Сергей Алексеевич
Наумович Адольф Федорович
Наумович Нил Федорович

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Учебно-методическое пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *О. А. Кастрица*

Подписано в печать 06.10.2008. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 1,91. Тираж 50 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
ЛИ №02330/0056804 от 02.03.2004.
220030, Минск, проспект Независимости, 4.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
220030, Минск, проспект Независимости, 4.