ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НЕАВТОНОМНЫЙ СЛУЧАЙ

Н. В. Бедюк

ВВЕДЕНИЕ

При переходе от обычных дифференциальных уравнений к нелинейным уравнениям с обобщенными коэффициентами возникают принципиально неразрешимые трудности, связанные с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций. Многими авторами предложены различные способы трактовки решений некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений. К сожалению, различные трактовки одного и того же нелинейного уравнения приводят к различным решениям, и предпочесть ту или иную интерпретацию можно только с помощью каких-либо соображений, используемых при моделировании решаемой практической задачи данным уравнением. В данной статье ограничимся изучением следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))\dot{L}(t) \tag{1}$$

где $\dot{L}(t)$ – обобщенная производная функции ограниченной вариации. Рассмотрим некоторые подходы к решению данного уравнения. Первый подход связан с попытками формализации такой задачи в рамках теории обобщенных функций и упирается в проблему умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении $f(t, x(t))\dot{L}(t)$. В [1, гл.1, §8 с. 41] вводится определение умножения, которое для гладких функций совпадает с классической формулой для производной сложной функции. В [2] в рамках секвенциального подхода теории обобщенных функций вводится определение произведения разрывной функции на обобщенную, а затем ищется решение дифференциального уравнения. Решения, понимаемые в смысле работ [2], отличаются от решений, рассматриваемых в [1]. Второй подход предполагает формальный переход к интегральному уравнению:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, x(\xi))dL(\xi)$$

в котором интеграл понимается в смысле Лебега-Стилтьеса, Перрона-Стилтьеса и т.д. [3],[4]. Однако при таком толковании скачки решения будут зависеть от определения интегрируемой функции в точках разрыва функции $L(t)$, что является недостатком данного подхода. Третий подход восходит к работе [5] и опирается на идею аппроксимации искомого решения уравнения (1) классическими, порожденными гладкими приближениями функции $L(t)$. Отметим, что решения, полученные в [1] с помощью первого и последнего подхода совпадают.

В настоящее время активно разрабатывается подход, связанный с рассмотрением уравнения (1) в алгебре новых обобщенных функций. Отметим в этом направлении работы [6],[7].

В данной работе уравнение (1) рассматривается как уравнение в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций и показывается, что при некоторых условиях полученная в качестве решения новая обобщенная функция ассоциирует обычной, которую естественно назвать решением (1). Также показывается, что решение (1) в смысле всех описанных выше подходов может быть получено из уравнения в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть функция $f: T \times R \to R$, где $T = [a,b]$, липшицева по обоим переменным:

$$\left|f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)\right| < C_1\left|t_1 - t_2\right| + C_2\left|x_1 - x_2\right|, \tag{2}$$

и имеет ограниченный рост, то есть для $\forall t \in T$

$$\left|f(t,x)\right| < C_3(1 + |x|) \tag{3}$$

где C_1, C_2, C_3 – константы не зависящие от t и x.

Пусть функция $L: T \to R$ – непрерывна справа и имеет ограниченную вариацию.

Уравнению (1) в алгебре новых обобщенных функций соответствует уравнение в дифференциалах, которое на уровне представителей имеет вид:

$$\begin{cases} x_n(t + h_n) - x_n(t) = f_n(t, x_n(t))(L(t + h_n) - L(t)) \\ x_n(t)\big|_{[a,a+h_n]} = x_n^0(t) \end{cases} \tag{4}$$

где $h_n > 0$, $L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int\limits_0^{1/n} L(t+s)\rho_n(s)ds$, ρ_n – «шапочка», то есть

$\rho_n \in C^\infty(R), \rho_n \geq 0, \operatorname{supp} \rho_n \subseteq [0, \frac{1}{n}], \int\limits_0^{1/n} \rho_n(s)ds = 1,$ $\quad f_n(t) = (f * \tilde{\rho}_n)(t) =$

$= \int\limits_{[0,1/n]^2} f(t+u, x+v)\tilde{\rho}_n(u,v)d\sigma$, а $\tilde{\rho}_n \in C^\infty(R^2), \tilde{\rho}_n \geq 0, \operatorname{supp} \tilde{\rho}_n \subseteq [0,1/n]^2$,

$\int\limits_{[0,1/n]^2} \tilde{\rho}_n(u,v)d\sigma = 1$.

Для любого t справедливо следующее представление: $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [a, a+h_n], m_t \in N$. Тогда решение (4) может быть записано в явном виде:

$$x_n(t) = x_n(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(t_k, x_n(t_k))(L(t_{k+1}) - L(t_k)) \tag{5}$$

В данной работе исследуется предельное поведение решения x_n задачи (4).

Чтобы описать предел последовательности x_n, рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = x^0 + \int\limits_a^t f(s, x(s))dL^c(s) + \sum_{a<s\leq t} (\varphi(\Delta L(s) f(s,\cdot), x(s-), 1) - x(s-)) \tag{6}$$

где L^c – непрерывная часть L, $\Delta L(s) = L(s+) - L(s-)$ – величина скачка в точке s, а φ – решение следующего интегрального уравнения:

$$\varphi(z, x, u) = x + \int\limits_{[0,u)} z(\varphi(z, x, v))\mu(dv) \tag{7}$$

где $\mu(dv)$ – вероятностная мера, определенная на борелевских подмножествах отрезка [0,1], а интеграл понимается в смысле Лебега-Стилтьеса.

В дальнейшем будем рассматривать меры, порожденные функциями $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ такими, что найдется множество попарно непересекающихся интервалов $(a_i, b_i] \subset [0,1], i \in I$, что

$$\sigma(u) = \begin{cases} b_i, u \in (a_i, b_i] \\ u, u \notin \bigcup\limits_{i \in I} (a_i, b_i] \end{cases}.$$

Обозначим через G множество всех функций такого вида.

Введем в рассмотрение функцию $F_n : R \to [0,1], F_n(x) = \int\limits_x^{1/n} \rho_n(s)ds$ и обратную к ней $F_n^{-1}(u) = \sup\{x : F_n(x) = u\}$.

Теорема Пусть функции f и L удовлетворяют условиям (2) и (3), $\int\limits_{t \in T} \left| x_n^0(\tau_t) - x^0 \right| dt \to 0$, $F_n(F_n^{-1}(u) - \delta h_n) \to \sigma(u)$ при $n \to \infty, h_n \to 0$, $\forall \delta \in (0,1)$ и $\forall u \in [0,1]$ – точки непрерывности функции σ.

Тогда $\sigma \in G$ и

$$\int\limits_{t \in T} \left| x_n(t) - x(t) \right| dt \to 0$$

при $n \to \infty, h_n \to 0$, где x_n – решение (4), а x – решение (5) с мерой μ порожденной σ.

Замечание Таким образом, выбирая различные «шапочки» ρ_n, мы получаем различные меры μ, в зависимости от которых получаются различные решения (1). В частности, при соответствующем выборе «шапочки» ρ_n могут быть получены решения (1) в смысле всех описанных во введении подходов.

Литература

1. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы. модели и приложения. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
2. *Antosik P., Liegza J.* Products of measure and functions of finite variations // Generalized functions and operational calculus: Proc. Conf. – Varna, 1979. – P. 20–26.
3. *Das P.C., Sharma R.R.* Existence and stability of measure differential equations // Czech. Math. J.–1972–V.22.–№1–P.145–158.
4. *Pandit S.G., Deo S.G.* Differential systems involving impulses // Lect. Notes. Math..– 1982. V.954.
5. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations // Czech. Math. J. –1958.–V.8.–№1.–P.360–388
6. *Yablonski A.* Differential equetions with generalized coefficients // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
7. *Ковальчук А.Н., Новохрост В.Г., Яблонский О.Л.*. Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением. // Известия ВУЗов. Математика. – 2005. – № 3. – С. 23–31.