БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе БГУ

______________ А.Л.Толстик
(подпись)

30.06.2017
____
(дата утверждения)

Регистрационный № УД-4707/уч.

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направления специальности

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность)

2017 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования ОСВО 1-31 03 01-2013 и учебных планов G31-140/уч., G31з-183/уч. от 30.05.2013.

СОСТАВИТЕЛЬ:

К.Г. Кузьмин, доцент кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра информатики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»;

В.М. Демиденко, профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», доктор физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № 9 от 05.05.2017);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 5 от 27.06.2017).

К. Г. Кузьмин

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Основные понятия теории множеств (как, например, мощность множества, изоморфизм множеств, трансфинитная индукция) входят в число вещей, которые хорошо бы знать любому грамотному математику, чем бы он ни занимался в своей профессиональной деятельности. Однако про них лишь коротко пишут на первых в первых главах учебников анализа, алгебры или лаконично упоминают при чтении этих курсов, спеша перейти к основной теме. А жаль – предмет достаточно интересен, важен и прост, чтобы рассказать о нем не торопясь. Данный курс в первую очередь преследует именно эту цель. С другой стороны, многие вчерашние школьники с большим трудом воспринимают современную математическую нотацию и доказательства теорем, в силу того, что по ряду печальных причин ничего из этого не рассказывается в большинстве школ. В связи с этим в рамках дисциплины «Введение в математику» просто жизненно необходимо на многочисленных примерах познакомить начинающего математика с первичными математическими понятиями и основными методами, которые используются при доказательстве математических утверждений.

Материал дисциплины базируется на знаниях, полученных студентами в средней школе, и связан со следующими дисциплинами: «Элементарная математика», «Дискретная математика», «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Математическая логика».

Основной целью учебной дисциплины «Введение в математику» является, во-первых, построение «моста», соединяющего школьное математическое образование и классическое университетское, и, во-вторых, с самого начала внести в преподавание математики постановку глубоких и естественных проблем, определяющих место основных математических структур и понятий в общей системе человеческого знания.

Развивающей целью учебной дисциплины является дальнейшее формирование у студентов навыков аналитического и математического мышления и умения применять его в конкретных задачах.

Воспитательной целью учебной дисциплины является формирование у студентов стремления к дальнейшему получению знаний в области современной математики и их использованию при решении актуальных прикладных проблем современного общества.

Основными задачами, решаемыми в рамках изучения дисциплины «Введение в математику», являются знакомство начинающего математика с первичными математическими понятиями, как, например, множество и функция, изучение основной математической терминологии и нотации, основных утверждений и методов их доказательства, а также освоение приемов решения типовых задач.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать: определения основных понятий и основные утверждения относящиеся к теории множеств, в том числе определение равномощности множеств, счетного множества, функции (в узком смысле), инъекции, сюръекции, бинарного отношения, эквивалентности, нестрогого порядка, вполне упорядоченного множества, изоморфизма множеств; формулировку теоремы (Кантора) о неравномощности множества семейству его подмножеств, теоремы Кантора – Бернштейна, теоремы о трех эквивалентных определениях фундированных множеств, теоремы Цермело, леммы Цорна.

уметь: формулировать аксиомы натуральных чисел и аксиомы теории множеств; применять метод математической и трансфинитной индукции; строить композиции функции; распознавать инъекции, сюръекции и биекции; распознавать эквивалентности и изоморфизмы; применять лемму Цорна и базис Гамеля.

владеть: методами решения задач теории множеств, методами математической и трансфинитной индукции.

Учебная дисциплина строится таким образом, чтобы студент приобрел следующие компетенции специалиста:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).

ПК-3. Применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности.

ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.

Учебная программа предназначена для студентов 1 курса очной и заочной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится:

– 1 курс (очная форма получения образования) всего 64 учебных часа, из которых 36 аудиторных, в том числе лекций - 24 часа, лабораторных занятий - 8 часов, УСР – 4 часа, текущая аттестация – зачет;

– 1 курс (заочная форма получения образования) всего 64 часа, из которых 8 аудиторных часов, в том числе лекций - 8 часов, текущая аттестация – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Натуральные числа

Тема 1.1. Аксиоматика Пеано. Метод математической индукции
Аксиомы Пеано множества натуральных чисел. Примеры множеств натуральных чисел. Метод математической индукции. Его различные формулировки и доказательство их эквивалентности.

Тема 1.2. Множество натуральных чисел. Введение нуля
Аксиоматика Пеано натуральных чисел. Метод математической индукции. Его эквивалентные формулировки. Операции сложения и умножения на множестве натуральных чисел, свойства этих операций. Операция сравнения на множестве натуральных чисел, ее свойства. Введение нуля. Свойства нуля.

Раздел 2. Множества и мощности

Тема 2.1. Определение множеств. Аксиоматика Цермело – Френкеля
Множества. Способы задания множеств. Основные операции над множествами. Канторово определение множества. Парадокс брадобрея. Аксиомы Цермело – Френкеля.

Тема 2.2. Число элементов и равномощность
Мощность конечного множества. Равномощность конечных множеств. Бесконечные множества. Равномощность бесконечных множеств. Счетные множества. Теорема о свойствах счетных множеств.

Тема 2.3. Равномощность бесконечных множеств
Теорема о равномощности отрезка множеству бесконечных последовательностей нулей и единиц. Теорема о равномощности квадрата и отрезка. Теорема Кантора – Бернштейна.

Тема 2.4. Теоремы Кантора
Теорема Кантора о несчетности множества бесконечных последовательностей нулей и единиц. Теорема о неравномощности множеств натуральных и действительных чисел. Теорема о неравномощности множества семейству его подмножеств.

Тема 2.5. Функции
Декартово произведение множеств. Отображения и функции (в узком и широком смысле). Инъекции, сюръекции и биекции.

Раздел 3. Упорядоченные множества

Тема 3.1. Эквивалентность и порядок
Бинарные отношения. Теорема о классах эквивалентности. Отношения строгого и нестрого порядка на множествах.

Тема 3.2. Изоморфизмы
Изоморфизмы и автоморфизмы. Теорема об изоморфизме конечных множеств. Теорема об изоморфизме счетных плотных линейно упорядоченных без наибольшего и наименьшего элементов.

Тема 3.3. Фундированные и вполне упорядоченные множества
Фундированные множества и их свойства. Теорема о трех эквивалентных определениях фундированного множества. Вполне упорядоченные множества и их свойства. Начальные отрезки вполне упорядоченных множеств.

Тема 3.4. Трансфинитная индукция
Трансфинитная индукция. Трансфинитные рекурсивные определения. Начальные отрезки. Теорема Цермело.

Тема 3.5. Парадоксы аксиомы выбора
Базис Гамеля. Лемма Цорна. Парадокс неизмеримого множества на окружности и парадокс Банаха – Тарского.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА (ОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Натуральные числа**	**4**			**2**			
1.1	Аксиоматика Пеано. Метод математической индукции	2			2			
1.2	Множество натуральных чисел. Введение нуля	2						Устный опрос
2	**Множества и мощности**	**10**			**2**		**2**	
2.1	Определение множеств. Аксиоматика Цермело – Френкеля	2						
2.2	Число элементов и равномощность	2						Экспресс-опрос
2.3	Равномощность бесконечных множеств	2			2			Устный опрос
2.4	Теоремы Кантора	2						Устный опрос
2.5	Функции	2					2	Самостоя-тельная работа
3	**Упорядоченные множества**	**10**			**4**		**2**	
3.1	Эквивалентность и порядок	2			2			Устный опрос
3.2	Изоморфизмы	2			2			Экспресс-опрос
3.3	Фундированные и вполне упорядоченные множества	2					2	Контрольная работа
3.4	Трансфинитная индукция	2						Экспресс-опрос
3.5	Парадоксы аксиомы выбора	2						Устный опрос
	ИТОГО	**24**			**8**		**4**	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА (ЗАОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ)

Номер раздела, темы	**Название раздела, темы**	**Количество аудиторных часов**					**Количество часов УСР**	**Форма контроля знаний**
		Лекции	**Практические занятия**	**Семинарские занятия**	**Лабораторные занятия**	**Иное**		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Натуральные числа**	**2**						
1.1	Аксиоматика Пеано. Метод математической индукции.	1						
1.2	Множество натуральных чисел. Введение нуля.	1						Экспресс-опрос
2	**Множества и мощности**	**4**						
2.1	Определение множеств. Аксиоматика Цермело – Френкеля.	1						
2.2	Число элементов и равномощность	1						Устный опрос
2.3	Теоремы Кантора	1						
2.4	Функции	1						Экспресс-опрос
3	**Упорядоченные множества**	**2**						
3.1	Эквивалентность и порядок	1						Экспресс-опрос
3.3	Изоморфизмы	1						
	ИТОГО	**8**						

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Литература

Основная

1. Верещагин, Н.К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств / Н.К. Верещагин, А.Х. Шень – М.: МЦНМО, 2012. – 112 с.
2. Кононов, С.Г. Введение в математику. Часть 1. Множества и функции / С.Г., Кононов, Р.И. Тышкевич, В.И. Янчевский. – Мн.: БГУ, 2003. – 170 с.
3. Кононов, С.Г. Введение в математику. Часть 2. Числа и координаты / С.Г., Кононов, Р.И. Тышкевич, В.И. Янчевский. – Мн.: БГУ, 2003. – 126 с.
4. Кононов, С.Г. Введение в математику. Часть 3. Мощности и порядки / С.Г., Кононов, Р.И. Тышкевич, В.И. Янчевский. – Мн.: БГУ, 2003. – 74 с.
5. Шень, А. Математическая индукция / А. Шень. – М.: МЦНМО, 2007. – 32 с.

Дополнительная

6. Арнольд, И.В. Теоретическая арифметика / И.В. Арнольд. – М.: Учпедгиз, 1938. – 480 с.
7. Виленкин, Н.Я. Рассказы о множествах / Н.Я. Виленкин – М.: МЦНМО, 2005. – 150 с.
8. Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Часть 1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление / Э.И. Зверович. – Мн.: БГУ, 2003. – 297 с.

Организация самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа реализуется:

1) непосредственно в процессе аудиторных занятий на лекциях и лабораторных занятиях;

2) в контакте с преподавателем на консультациях по учебным вопросам, при выполнении индивидуальных заданий, при ликвидации задолженностей;

3) при выполнении студентом учебных заданий.

При чтении лекционного курса усвоение материала основной массой студентов контролируется путем проведения экспресс-опросов по конкретным темам.

На лабораторных занятиях значительная часть времени отводится на разбор типовых задач, самостоятельное решение задач, а также анализ типовых ошибок при решении.

Результативность самостоятельной работы студентов проверяется при помощи следующих методов ее контроля:

1) текущий контроль, то есть регулярное отслеживание уровня усвоения материала на лекциях и лабораторных занятиях;

2) промежуточный контроль в виде самостоятельных и контрольных работ;

3) итоговый контроль по дисциплине в виде зачета.

Рекомендуемые темы для контрольных и самостоятельных работ (УСР)

1. Метод математической индукции; равномощность множеств; отображения и функции; инъекции, сюръекции и биекции; классификация бинарных отношений; отношения строгого и нестрого порядка; максимальные минимальные, наибольшие и наименьшие элементы.
2. Изоморфизмы и автоморфизмы; предельные и соседние элементы; фундированные множества; начальные отрезки; метод трансфинитной индукции.

Примерный перечень заданий для УСР

1. Докажите, что множества $[0,1]$ и $[0,1)$ равномощны.

2. Верно ли, что множество всех целых положительных делителей числа 42 с отношением «быть делителем» изоморфно множеству всех подмножеств множества $\{1,\{1\},\{\{1\}\}\}$, упорядоченному по включению.

3. Верно ли, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой не более чем счетно?

4. Докажите, что любые две окружности на плоскости $\mathbf{R}^2$ равномощны.

5. Верно ли, что в частично упорядоченном множестве $A \times A$, где $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ нет бесконечного подмножества, любые два элемента которого были бы несравнимы?

6. Пусть $\boldsymbol{\rho}$ рефлексивное и транзитивное бинарное отношение (но не обязательно антисимметричное). Определим отношение $\sim$ следующим правилом: $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $a\,\boldsymbol{\rho}\,b$ и $b\,\boldsymbol{\rho}\,a$. Докажите, что $\sim$ есть отношение эквивалентности.

7. Действительное число называется алгебраическим, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что множество алгебраических чисел счетно.

8. Докажите, что любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана угловая клетка, можно разрезать на уголки из трех клеток.

9. Докажите, что число точек строгого локального максимума у всякой функции действительного аргумента не более чем счетно.

10. Докажите равенство $1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \ldots + (n-1) \cdot 1 = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

11. Докажите, что при любом $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{2n-1}{n}$.

12. Верно ли, что если $A \setminus B$ бесконечно, а B счетно, то $A \setminus B$ равномощно A?

13. Докажите, что число 111…111, состоящее из 3^n единиц, нацело делится на 3^n при любом $n \in \mathbf{N}$.

14. Верно ли что число всевозможных слов в счетном алфавите счетно?

15. Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

16. Пусть $X \ne \varnothing$. Существует ли инъективная функция $f(x): 2^X \to X$?

17. Докажите, что сумма кубов n первых натуральных чисел является полным квадратом.

18. Пусть $X \ne \varnothing$. Существует ли сюръективная функция $f(x): X \to 2^X$?

19. Верно ли, что интервал (0, 1) и луч (0, +∞) равномощны.

20. На доске написано слово из n букв a и b. За один ход можно изменить одну букву (заменить a на b или наоборот). Докажите, что за несколько ходов можно получить на доске (одно за другим) все 2^n слов, причем никакое слово не встретится дважды.

21. Докажите, что $5 \times 7 = 35$, если известно, что $5 \times 6 = 30$ и $30 + 4 = 34$.

22. Определите, какие из приведенных ниже отношений на **Z** являются рефлексивными, симметричными, транзитивными?
a) «$x - y$ – четное число»;

b) «$x + xy$ – четное число».

23. Покажите, что в алфавите из n символов можно так упорядочить все слова длины m, что любые два соседних слова будут отличаться ровно одной буквой.

24. Докажите, что число 1 можно представить в виде суммы 2017 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

25. Известно, что число $x + 1/x$ является целым. Докажите, что при любом $n \in \mathbf{N}$ число $x^n + 1/x^n$ также является целым.

26. Является ли бинарное отношение $*$, заданное на $\mathbf{R}^2$ по правилу $x * y \Leftrightarrow \max\{|x_1|,|x_2|\} = \max\{|y_1|,|y_2|\}$ рефлексивным, симметричным, транзитивным? Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

27. Докажите, что при любом $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \ldots + \sqrt{4}}}} < 3$ (четверок в левой части n штук).

28. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbf{Q} \cap [0,1)$ и $\mathbf{Q} \cap (0,1]$?

29. Докажите, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ может быть сделана больше любого наперед заданного числа $m \in \mathbf{N}$, если $n \in \mathbf{N}$ выбрать достаточно большим.

30. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbf{Q} \times [0,2]$ и $\mathbf{Q} \times [1,2]$?

31. Докажите, что множество (0, 1) равномощно множеству $\mathbf{R}$.

32. Является ли бинарное отношение $*$, заданное на $\mathbf{R}^2$ по правилу $x * y \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ рефлексивным, симметричным, транзитивным? Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

33. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомобилей. Известно, что если весь бензин, находящийся в автомобилях, слить в один из них, то этот автомобиль сможет проехать по всей кольцевой дороге и вернуться обратно. Докажите, что хотя бы один из автомобилей сможет проехать по кольцевой дороге, забирая по дороге бензин у других автомобилей, и вернуться обратно.

34. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbf{Q}\times\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}\times\mathbf{Q}$?

35. Из чисел от 1 до $2n$ – 1 выбрано n + 1 число. Докажите, что одно из выбранных чисел равно сумме двух других.

36. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbf{Q}+\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}+\mathbf{Q}$?

37. Отношение $\sim$ на $\mathbf{R}$ задано условием: $x\sim y$, если и только если $x+y$ – целое число. Докажите, что $\sim$ – отношение эквивалентности и опишите классы эквивалентности, содержащие e^2 и π.

38. Верно ли, что если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку?

39. Пусть $A=\{x\in\mathbf{R}: x\neq 0\}$, функция $f:A\to B$ и задается формулой $f(x)=\dfrac{3x+2}{x}$. Каким должно быть множество B, чтобы функция f была биективна?

40. Верно ли, что любое непустое замкнутое множество $X\subset\mathbf{R}$ без изолированных точек имеет мощность континуума?

Перечень используемых средств диагностики результатов учебной деятельности

С целью текущего контроля предусматривается проведение контрольных и самостоятельных работ, устных опросов и экспресс-опросов. По итогам семестра студенты сдают зачет.

Методика формирования итоговой оценки

Итоговая оценка формируется на основе трех документов:

1. Правил проведения аттестации (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012)
2. Положения о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 382-ОД от 18.08.2015 г.)
3. Критериев оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Дискретная математика	Кафедра математической кибернетики	Нет	Оставить содержание учебной дисциплины без изменения. Протокол заседания кафедры МК № 9 от 05.05.2017
Математическая логика	Кафедра математической кибернетики	Нет	Оставить содержание учебной дисциплины без изменения. Протокол заседания кафедры МК № 9 от 05.05.2017
Математический анализ	Кафедра теории функций	Нет	Оставить содержание учебной дисциплины без изменения. Протокол заседания кафедры МК № 9 от 05.05.2017
Элементарная математика	Кафедра теории функций	Нет	Оставить содержание учебной дисциплины без изменения. Протокол заседания кафедры МК № 9 от 05.05.2017
Функциональный анализ	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	Нет	Оставить содержание учебной дисциплины без изменения. Протокол заседания кафедры МК № 9 от 05.05.2017

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математической кибернетики (протокол № ___ от ________ 201_ г.)

Заведующий кафедрой,
доктор физ.-мат. наук, профессор _________________ А.Л. Гладков

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент _________________ Д.Г. Медведев