

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям


« 05 » 2018 г. О.И. Чуприс

Регистрационный № УД- 5318 /уч.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности**

1-31 80 03 Математика

2018 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 80 03-2012, утвержденного 24.08.2012 № 108 и учебных планов, утвержденных 26.05.2017, регистрационные № G31-257/уч., № G31-258/уч по специальности 1-31 80 03 Математика.

СОСТАВИТЕЛИ:

Вениамин Григорьевич Кротов – заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор,

Пекарский Александр Антонович – профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор,

Мардвилко Татьяна Сергеевна – доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой теории функций

(протокол № 9 от 29.04.2018)

Научно-методическим Советом Белорусского государственного университета

(протокол № 5 от 04.05.2018)



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Понятие ортогонального базиса в конечномерном евклидовом пространстве имеет естественное распространение на ортогональные системы элементов в гильбертовом пространстве. Однако для переноса этих понятий на более общие пространства, не связанные со скалярным произведением требовали новых идей. Такие идеи были предложены Ю.Шаудером и С.Банахом в 30-х годах прошлого века.

Концепция базиса и безусловного базиса нашла многочисленные применения как в современном анализе, так и во многих прикладных задачах. В последние несколько десятилетий появились новые объекты – вейвлеты (в русскоязычной литературе часто используется термин «всплески») и фреймы. Они оказались очень полезными в задачах сжатия и восстановления информации, теории сигналов и т.п.

В данной дисциплине дается строгое изложение теории базисов, а также рассматриваются понятия вейвлетов (кратномасштабного анализа) и фреймов.

Цель дисциплины «Дополнительные главы анализа»: повышение уровня профессиональной компетентности студентов, формирование понятия о возможностях одного из разделов современного анализа в задачах естествознания.

Образовательная цель: изложение основ теории базисов.

Развивающая цель: формирование у магистрантов умений использования современных методов теории базисов в задачах естествознания.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Дополнительные главы анализа»:

- теория ортогональных систем в гильбертовом пространстве;
- изучение понятий базиса и безусловного базиса в банаховом пространстве и их свойств;
- построение классических базисов в пространствах непрерывных и суммируемых функций (системы Фабера-Шаудера и Хаара);
- ознакомиться с современными методами гармонического анализа и их приложениями (кратномасштабный анализ и теория фреймов).

Дисциплина «Дополнительные главы анализа» относится к циклу дисциплин специальной подготовки (компонент учреждения высшего образования).

Дисциплина «Дополнительные главы анализа» является продолжением цикла математических дисциплин «Действительный и комплексный анализ», «Функциональный анализ», «Уравнения с частными производными». Она посвящена основным направлениям развития гармонического анализа в XX веке и начале XXI века.

В результате изучения дисциплины «Дополнительные главы анализа» магистрант должен обладать следующими компетенциями:

профессиональные:

ПК-7. Квалифицированно проводить научные исследования в области фундаментальной и прикладной математики.

В результате изучения дисциплины обучаемый должен:

знать:

- свойства ортогональных систем в гильбертовых пространствах;

– определения и свойства базисов и безусловных базисов в банаховых пространствах;

– свойства классических базисов Фабера-Шаудера и Хаара;

– определения кратномасштабных разложений и фреймов;

уметь:

– доказывать основные теоремы об ортогональных системах и базисах;

– доказывать свойства базисности и безусловной базисности систем Фабера-Шаудера и Хаара;

владеть:

– основными понятиями и результатами теории базисов;

– методами использования базисов в математических задачах;

Структура учебной дисциплины

Учебная программа предназначена для магистрантов 2 курса (3 семестр очной и заочной форм получения образования (2 и 2, 5 года обучения). В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины всего отводится 160 часов, в том числе для очной формы обучения 58 часов аудиторных занятий; из них 30 часов – лекции, 20 часов – лабораторные занятия; 8 часов – УСР; для заочной формы обучения – 16 часов аудиторных занятий (лекции).

Трудоемкость учебной дисциплины составляет – 4 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

ТЕМА 1. Сведения из функционального анализа

Теорема Хана-Банаха, теорема Банаха-Штейнгауза, теорема Банаха об обратном операторе. Рефлексивность.

ТЕМА 2. Ортогональные системы в гильбертовом пространстве

Вспомогательные сведения из функционального анализа (теорема о проекции, теорема Пифагора, критерий ближайшего элемента). Ортогональные системы, тождество Бесселя, равенство Парсеваля-Стеклова, сходимость рядов Фурье.

ТЕМА 3. Базисы в банаховых пространствах

Замкнутые и минимальные системы, сопряженная система функционалов. Операторы частичных сумм, ряды Фурье. Определение базиса и теорема Банаха о базисе. Базисные системы, свойства системы, сопряженной к базису. Устойчивость базисов. Базисы в некоторых конкретных пространствах.

ТЕМА 4. Безусловные базисы

Безусловная сходимость рядов в банаховых пространствах. Безусловные базисы и их свойства. Примеры безусловных базисов.

ТЕМА 5. Конкретные базисы в пространствах функций

Двоично-рациональные точки и промежутки, Задача кусочно линейной интерполяции. Система функций Фабера-Шаудера и ее свойства. Система функций Хаара и ее свойства. Двоичная максимальная функция. Безусловная базисность системы Хаара.

ТЕМА 6. Кратномасштабный анализ и фреймы

Базисы Рисса. Кратномасштабный анализ и масштабирующая функция. Системы Хаара, Баттла-Лемарье, Стрёмберга и Мейера. Фреймы и их свойства.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ (очная форма обучения)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		лекции	занятия практические	занятия семинарские	занятия лабораторные	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Сведения из функционального анализа	2						
2	Ортогональные системы в гильбертовом пространстве	4					2	Оценка упражнений
3	Базисы в банаховых пространствах	4			8		2	Оценка упражнений
4	Безусловные базисы	4					2	Оценка упражнений
5	Конкретные базисы в пространствах функций	8			6		2	Оценка упражнений
6	Кратномасштабный анализ и фреймы	8			6		2	Оценка упражнений
	Всего по дисциплине	30			20		8	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ (заочная форма обучения)

1 Номер раздела, темы	2 Название раздела, темы	3 Количество аудиторных часов					4 Количество часов УСР	5 Формы контроля знаний
		6 лекции	7 занятия практические	8 занятия семинарские	9 занятия лабораторные	10 Иное		
1	Сведения из функционального анализа	3	4	5	6	7	8	9
2	Ортогональные системы в гильбертовом пространстве	1						
3	Базисы в банаховых пространствах	1						Оценка упражнений
4	Безусловные базисы	4						Оценка упражнений
5	Конкретные базисы в пространствах функций	2						Оценка упражнений
6	Кратномасштабный анализ и фреймы	4						Оценка упражнений
	Всего по дисциплине	16						

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

- 1 Б.С.Кашин, А.А.Саакян, Ортогональные ряды, М.:Изд-во АФЦ. 1999.
- 2 И.Я.Новиков, В.Ю.Протасов, М.А.Скопина, Теория всплесков. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
3. А.Б. Антоневиц, Я.В. Радыно. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Минск: Университетское, Мн.: БГУ. 2006.

Дополнительная литература

- 3 I. Singer. Bases in Banach spaces. Vol. 1. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1970.

Перечень используемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Контроль освоения практических навыков осуществляется в форме оценки выполнения упражнений.

Формой текущей аттестации по дисциплине учебным планом предусмотрен – экзамен.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации (постановление №53 от 29.05.2012 г.).
2. Положение о рейтинговой системе БГУ (ред. 2015 г.).
3. Критерии оценки студентов (10 баллов).

Весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

Формирование оценки за текущую успеваемость:

– оценка выполнения упражнений – 100 %.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценка по текущей успеваемости составляет 40 %, экзаменационная оценка – 60 %.

Примерный перечень упражнений для управляемой самостоятельной работы

ТЕМА 2. Ортогональные системы в гильбертовом пространстве

1. Применить процесс ортогонализации к системе двоичных отрезков.
2. Доказать критерий ближайшего элемента.
3. Доказать тождество параллелограмма.
4. Доказать теорему Пифагора.

ТЕМА 3. Базисы в банаховых пространствах

1. Построить базис в пространствах суммируемых последовательностей.
2. Показать, что пространство ограниченных последовательностей не является сепарабельным.
3. Построить базис в пространстве сходящихся последовательностей.

ТЕМА 4. Безусловные базисы

1. Построить безусловный базис в пространствах суммируемых последовательностей.
2. Построить безусловную базисную систему в пространстве ограниченных последовательностей.
3. Построить безусловный базис в пространстве сходящихся последовательностей.

ТЕМА 5. Конкретные базисы в пространствах функций

1. Доказать оценку для приближений суммами Фабера-Шаудера через модули гладкости.

2. Доказать оценку для приближений суммами Хаара в пространстве ограниченных функций через модули непрерывности.

3. Доказать оценку для приближений суммами Хаара в пространствах суммируемых функций через модули непрерывности.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются:

- *эвристический подход*, который предполагает выбор содержания и способа его организации при подготовке образовательных продуктов (сообщений, докладов, презентаций) по проблемам методологии математики и их соотношения и многообразием решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем; творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов; индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

- *методы и приемы развития критического мышления*, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации управляемой самостоятельной работы магистрантов

Основными направлениями управляемой самостоятельной работы в овладении знаниями учебной дисциплины «Дополнительные главы анализа» являются:

- первоначально подробное ознакомление с программой учебной дисциплины;
- ознакомление со списком рекомендуемой литературы по дисциплине в целом и ее разделам, наличие ее в библиотеке и других доступных источниках, изучение необходимой литературы по теме, подбор дополнительной литературы;
- изучение и расширение лекционного материала преподавателя за счет специальной литературы, консультаций;
- подготовка к зачету.

Тем самым, имеется в виду постепенное превращение обучения в самообучение, когда магистрант должен получать знания главным образом за счет креативной самостоятельной работы, самостоятельно осуществляя поиск необходимой информации и созидательно прорабатывая ее с тем, чтобы произвести необходимые умозаключения и получить результаты. В этом случае, выполняя учебные задачи, магистранты самостоятельно приобретают новые знания, навыки и умения (в частности, умение анализировать и принимать решения в нестандартных ситуациях), что очень важно для эффективной будущей профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа для магистрантов важнейшая часть учебного процесса. Решение задач по подготовке квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, способного к эффективной работе по

специальности на уровне мировых стандартов, невозможно без наличия навыков самостоятельной работы магистрантов.

Цель самостоятельной работы магистрантов:

- углубление фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков в соответствии с профилем деятельности;
- сознательно и самостоятельно осуществлять работу с учебным и научным материалом;
- совершенствование опыта исследовательской и созидательной деятельности;
- совершенствование навыков творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального формата;
- укрепление навыков самоорганизации и самовоспитания для получения навыков перманентного повышения профессионализма.

Для достижения целей самостоятельной работы магистрантов необходимо решение следующих задач:

- развитие творческого мышления;
- овладение основными методами исследовательской работы;
- приобретение магистрантами через самостоятельную деятельность собственного опыта и профессиональных навыков.
- углубление, расширение, систематизация и закрепление полученных знаний и умений;
- выработка навыка использования и анализа источниковой базы и специальной литературы;
- формирование исследовательских навыков и умений;
- овладение способностью использовать собранную в ходе самостоятельной работы информацию в учебных целях.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Теорема Хана-Банаха, теорема Банаха-Штейнгауза, теорема Банаха об обратном операторе. Рефлексивность.
2. Вспомогательные сведения из функционального анализа (теорема о проекции, теорема Пифагора, критерий ближайшего элемента).
3. Ортогональные системы, тождество Бесселя, равенство Парсеваля-Стеклова, сходимости рядов Фурье.
4. Замкнутые и минимальные системы, сопряженная система функционалов. Операторы частичных сумм, ряды Фурье.
5. Определение базиса и теорема Банаха о базисе. Базисные системы, свойства системы, сопряженной к базису.
6. Устойчивость базисов. Базисы в некоторых конкретных пространствах.
7. Безусловная сходимости рядов в банаховых пространствах. Безусловные базисы и их свойства. Примеры безусловных базисов.
8. Двоично-рациональные точки и промежутки.
9. Задача кусочно линейной интерполяции.
10. Система функций Фабера-Шаудера и ее свойства.
11. Система функций Хаара и ее свойства.
12. Двоичная максимальная функция. Безусловная базисность системы Хаара.
13. Базисы Рисса.

14. Кратномасштабный анализ и масштабирующая функция.
15. Системы Хаара, Баттла-Лемарье, Стрёмберга и Мейера.
16. Фреймы и их свойства.

**ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
(протокол № ____ от _____ 20_ г.)

Заведующий кафедрой

(степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

(степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)