

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе

А.Л. Толстик

08.11.2017

Регистрационный № УД-189 /уч.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МАТРИЧНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности
второй ступени высшего образования (магистратуры)

1-31 80 03 Математика

2017г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования ОСВО 1-31 80 03-2012, утвержденного 24.08.2012, и учебных планов № G31-029/уч. от 30.05.2012, № G31з-148/уч. от 04.04.2014, № G31-257/уч. от 26.05.2017, № G31з-258/уч. от 26.05.2017.

СОСТАВИТЕЛИ:

Игнатенко Марина Викторовна – доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Янович Леонид Александрович – главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Беларуси, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования
(протокол № 2 от 04.10.2017);

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета
Белорусского государственного университета
(протокол № 3 от 02.11.2017).



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Теория интерполирования функций от матриц в идейном плане близка к теории интерполирования функций скалярного аргумента. Основы последней излагаются в изучаемом студентами курсе «Численные методы». Теория интерполирования функций матричной переменной естественно более сложная и включает как частный случай классическую теорию интерполирования функций, имеющую широкое применение, как в самой математике, так и во многих смежных с математикой областях. Этим объясняется целесообразность изучения магистрантами специальности «Математика» данного раздела матричного анализа.

В предлагаемом спецкурсе «*Интерполирование функций матричной переменной и его применение*» достаточно подробно рассматривается задача интерполяции в различных ее постановках в случае обычно принятого умножения матриц. Однако, как в самой математике, так и в ряде прикладных областей возникают задачи, когда используются другие правила умножения матриц.

В университетском курсе матричного анализа другие правила умножения матриц не рассматриваются. В данном спецкурсе строятся и исследуются интерполяционные формулы для функций матричных переменных, как с обычным умножением, так и с йордановым, кронекеровским (тензорным) и умножением по Адамару.

Основная цель дисциплины «*Интерполирование функций матричной переменной и его применение*» заключается в освоении учащимися современной технологии математического моделирования, основанной на использовании методов интерполирования функций матричной переменной и прикладного программного обеспечения.

Задачи дисциплины состоят:

- в получении новых сведений по матричному анализу в области теории матриц, функций матричных аргументов, методов приближения такого класса функций и их применения при решении практических задач;
- в изучении основных принципов построения методов интерполирования функций матричной переменной и оценки их вычислительных качеств, развития умения и навыков выбора адекватного алгоритма, его программной реализации, интерпретации результатов численных расчетов и степени их достоверности.

В результате изучения дисциплины магистрант должен

знать:

- дополнительно новые сведения из теории функций от матриц;
- основные постановки задач интерполирования в классах функций матричных переменных;
- методы построения интерполяционных формул разных видов для приближения функций данного класса;

уметь:

- применять интерполяционные формулы для приближения конкретных функций матричных переменных;

– использовать интерполяционные матричные многочлены для решения задач матричного анализа, решения линейных алгебраических и систем дифференциальных уравнений, а также в других областях математики, где используется аппарат матричного анализа;

владеть:

– навыками практического использования интерполяционных методов приближения в теоретических и прикладных исследованиях.

Курс рассчитан на изучение магистрантами теории интерполирования функций от матриц и некоторого ее приложения. Для более глубокого освоения теории предусмотрено решение конкретных задач как аналитически, так и программным путем в среде Mathematica.

Для изучения дисциплины рекомендуется монография Л. А. Яновича и М. В. Игнатенко «Основы теории интерполирования функций матричных переменных». В нее включены, в том числе, некоторые результаты, полученные при выполнении темы НИР «Спектрально-разностные методы и итерационные алгоритмы для многомерных задач математической физики» подпрограммы «Методы математического моделирования сложных систем» государственной программы научных исследований «Конвергенция-2020» (№ ГР 20161644, 2016-2020 гг.) и диссертационного исследования М. В. Игнатенко «Интерполяционные методы для аппроксимации операторов, заданных на множествах функций скалярного аргумента и матриц». Отдельные вопросы изложены в книгах по матричному анализу, приведенных в списке рекомендуемой литературы, а также в научных статьях.

Данная дисциплина опирается на изученные ранее сведения из университетского курса первой степени высшего образования «Численные методы».

Преподавание данной дисциплины должно строиться таким образом, чтобы обучающийся приобретал следующие академические, социально-личностные и профессиональные компетенции:

– АК-1. Способность к самостоятельной научно-исследовательской деятельности (анализ, сопоставление, систематизация, абстрагирование, моделирование, проверка достоверности данных, принятие решений и др.), готовность генерировать и использовать новые идеи.

– АК-3. Способность к постоянному самообразованию.

– СЛК-1. Совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень, добиваться нравственного и физического совершенствования своей личности.

– СЛК-3. Формировать и аргументировать собственные суждения и профессиональную позицию.

– СЛК-4. Анализировать и принимать решения по социальным, этическим, научным и техническим проблемам, возникающим в профессиональной деятельности.

– ПК-7. Квалифицированно проводить научные исследования в области фундаментальной и прикладной математики.

Учебная программа предназначена для магистрантов 1 курса дневной (срок обучения 1 и 2 года) и заочной формы получения образования (срок обучения 1,5 и 2,5 года).

В соответствии с учебными планами специальности на изучение дисциплины отводится следующее количество часов аудиторной и самостоятельной работы:

Форма обучения	Срок обучения, лет	Курс	Семестр	Экзамен семестр	Зачет, семестр	Всего часов	В том числе ауд.	Из них	
								Лекций	Практических занятий
дневная	1	1	1	-	1	68	34	22	12
заочная	1,5	1	2	-	2	68	20	10	10
дневная	2	1	2	-	2	120	46	22	24
заочная	2,5	1	2	-	2	120	14	10	4

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Учебный материал курса «Интерполирование функций матричной переменной и его применение» разделен на несколько тем, каждая из которых содержит ряд вопросов, рассматриваемых в ходе лекций, практических занятий и выполнения заданий, рекомендованных для самостоятельной работы магистрантов.

Тема 1. Основные задачи операторного интерполирования и интерполирования функций от матриц: интерполирование Лагранжа, Эрмита, Эрмита–Биркгофа и др.

Тема 2. Аналитические и другие классы функций матричной переменной: основные классы матричных многочленов (случай квадратных и прямоугольных матриц), аналитические функции от матриц (определение, примеры), тригонометрические и другого вида матричные многочлены.

Тема 3. Основные виды интерполяционных формул лагранжева и ньютонова типов: интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона первой и второй степени, интерполяционные многочлены произвольной степени для разных видов матричных узлов, применение линейного интерполирования к решению матричных уравнений.

Тема 4. Интерполяционные формулы Лагранжа–Сильвестра для простых матриц и матриц с произвольным спектром: аннулирующие многочлены матрицы, формула Лагранжа–Сильвестра (общий случай, для треугольных матриц, клеток Жордана и диагональных матриц). Примеры.

Тема 5. Интерполяционная формула Эрмита с двукратными узлами: алгебраический случай и тригонометрический случай (скалярные узлы интерполирования).

Тема 6. Интерполяционные формулы на множестве матриц с йордановым умножением: определение йорданова умножения и его свойства, линейные интерполяционные многочлены и многочлены произвольной степени.

Тема 7. Кронекеровское умножение матриц и интерполяционные формулы на множестве матриц с таким умножением: основные свойства кронекеровского умножения, интерполяционные формулы первого и произвольных порядков.

Тема 8. Представление интерполяционных многочленов для аналитических функций в виде контурных интегралов: матричный аналог формулы Коши для аналитических функций, интегральное представление интерполяционных многочленов и их погрешностей, получение оценок погрешностей интерполирования.

Тема 9. Интерполирование функций двух матричных переменных: виды многочленов от двух матричных переменных, формулы линейной интерполяции и произвольного порядка различной структуры.

Тема 10. Псевдообратная матрица и ее свойства. Некоторое ее применение: существование и единственность матриц Мура–Пенроуза, решение систем алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей, наилучшее в среднеквадратичном смысле решение.

Тема 11. Интерполяционные формулы на множестве прямоугольных матриц: формулы линейной интерполяции, матричные интерполяционные многочлены произвольной степени.

Тема 12. Матричный интеграл Стилтеса и его применение в задачах интерполяции функций от матриц: определение и вычисление интегралов специального вида, матричные интерполяционные многочлены в пространстве непрерывных матриц.

Тема 13. Формулы интерполирования в пространстве гладких матриц: формулы на множествах непрерывно дифференцируемых матриц, формулы интерполирования на множестве матриц более высокой гладкости.

Тема 14. Варианты сплайнов для функций матричной переменной: сплайны первой степени, матричные варианты сплайнов третьей степени.

Тема 15. Приближенные методы интерполяционного типа для решения матричных уравнений: построение приближенных методов основано на полученных ранее интерполяционных формулах.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
(дневная форма обучения, срок обучения 1 год)

Номер раздела,	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					УСР	Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Тема 1. Основные задачи операторного интерполирования и интерполирования функций от матриц: интерполирование Лагранжа, Эрмита, Эрмита-Биргофа и др.	1	1					[1-2]	Опрос
2	Тема 2. Аналитические и другие классы функций матричной переменной: основные классы матричных многочленов (случай квадратных и прямоугольных матриц), аналитические функции от матриц (определение, примеры), тригонометрические и другого вида матричные многочлены.	2	1					[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
3	Тема 3. Основные виды интерполяционных формул лагранжева и ньютонова типов: интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона первой и второй степени, интерполяционные многочлены произвольной степени для разных видов матричных узлов, применение линейного интерполирования к решению матричных уравнений.	2	1					[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
4	Тема 4. Интерполяционные формулы Лагранжа-	2	1					[1-2]	Опрос, отчет о

	Сильвестра для простых матриц и матриц с произвольным спектром: аннулирующие многочлены матрицы, формула Лагранжа-Сильвестра (общий случай, для треугольных матриц, клеток Жордана и диагональных матриц). Примеры.											практической работе
5	Тема 5. Интерполяционная формула Эрмита с двукратными узлами: алгебраический случай и тригонометрический случай (скалярные узлы интерполирования).	1									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
6	Тема 6. Интерполяционные формулы на множестве матриц с йордановым умножением: определение йорданова умножения и его свойства, линейные интерполяционные многочлены и многочлены произвольной степени.	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
7	Тема 7. Кронекеровское умножение матриц и интерполяционные формулы на множестве матриц с таким умножением: основные свойства кронекеровского умножения, интерполяционные формулы первого и произвольных порядков.	1									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
8	Тема 8. Представление интерполяционных многочленов для аналитических функций в виде контурных интегралов: матричный аналог формулы Коши для аналитических функций, интегральное представление интерполяционных многочленов и их погрешностей, получение оценок погрешностей интерполирования.	2	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
9	Тема 9. Интерполирование функций двух матричных переменных: виды многочленов от двух матричных переменных, формулы линейной интерполяции и произвольного порядка различной структуры.	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
10	Тема 10. Псевдообратная матрица и ее свойства.	2	1								[1-2]	Опрос, отчет о

	Некоторое ее применение: существование и единственность матриц Мура–Пенроуза, решение систем алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей, наилучшее в среднеквадратичном смысле решение.											практической работе
11	Тема 11. Интерполяционные формулы на множестве прямоугольных матриц: формулы линейной интерполяции, матричные интерполяционные многочлены произвольной степени.	1									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
12	Тема 12. Матричный интеграл Стильбеса и его применение в задачах интерполяции функций от матриц: определение и вычисление интегралов специального вида, матричные интерполяционные многочлены в пространстве непрерывных матриц.	2	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
13	Тема 13. Формулы интерполирования в пространстве гладких матриц: формулы на множествах непрерывно дифференцируемых матриц, формулы интерполирования на множестве матриц более высокой гладкости.	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
14	Тема 14. Варианты сплайнов для функций матричной переменной: сплайны первой степени, матричные варианты сплайнов третьей степени.	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
15	Тема 15. Приближенные методы интерполяционного типа для решения матричных уравнений: построение приближенных методов основано на полученных ранее интерполяционных формулах	2	1								[1-2]	Отчет о практической работе, зачет
	ВСЕГО ЧАСОВ	22	12									Зачет

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
(заочная форма обучения, срок обучения 1,5 года)

Номер раздела, Темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					УСР	Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Тема 1. Основные задачи операторного интерполирования и интерполирования функций от матриц: интерполирование Лагранжа, Эрмита, Эрмита-Биркгофа и др.	1	1					[1-2]	Опрос
2	Тема 2. Аналитические и другие классы функций матричной переменной: основные классы матричных многочленов (случай квадратных и прямоугольных матриц), аналитические функции от матриц (определение, примеры), тригонометрические и другого вида матричные многочлены.	1	1					[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
3	Тема 3. Основные виды интерполяционных формул лагранжева и ньютонова типов: интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона первой и второй степени, интерполяционные многочлены произвольной степени для разных видов матричных узлов, применение линейного интерполирования к решению матричных уравнений.	1	1					[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
4	Тема 4. Интерполяционные формулы Лагранжа-	1	1					[1-2]	Опрос, отчет о

	Сильвестра для простых матриц и матриц с произвольным спектром: аннулирующие многочлены матрицы, формула Лагранжа-Сильвестра (общий случай, для треугольных матриц, клеток Жордана и диагональных матриц). Примеры.											практической работе
5	Тема 5. Интерполяционная формула Эрмита с двукратными узлами: алгебраический случай и тригонометрический случай (скалярные узлы интерполирования).	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
6	Тема 6. Интерполяционные формулы на множестве матриц с йордановым умножением: определение йордана умножения и его свойства, линейные интерполяционные многочлены и многочлены произвольной степени.	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
7	Тема 7. Кронекеровское умножение матриц и интерполяционные формулы на множестве матриц с таким умножением: основные свойства кронекеровского умножения, интерполяционные формулы первого и произвольных порядков.	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
8	Тема 8. Представление интерполяционных многочленов для аналитических функций в виде контурных интегралов: матричный аналог формулы Коши для аналитических функций, интегральное представление интерполяционных многочленов и их погрешностей, получение оценок погрешностей интерполирования.	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
9	Тема 9. Интерполирование функций двух матричных переменных: виды многочленов от двух матричных переменных, формулы линейной интерполяции и произвольного порядка различной структуры.	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
10	Тема 10. Псевдообратная матрица и ее свойства.	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о

	Некоторое ее применение: существование и единственность матриц Мура–Пенроуза, решение систем алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей, наилучшее в среднеквадратичном смысле решение.										практической работе
11	Тема 11. Интерполяционные формулы на множестве прямоугольных матриц: формулы линейной интерполяции, матричные интерполяционные многочлены произвольной степени.									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
12	Тема 12. Матричный интеграл Стилтеса и его применение в задачах интерполяции функций от матриц: определение и вычисление интегралов специального вида, матричные интерполяционные многочлены в пространстве непрерывных матриц.									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
13	Тема 13. Формулы интерполирования в пространстве гладких матриц: формулы на множествах непрерывно дифференцируемых матриц, формулы интерполирования на множестве матриц более высокой гладкости.									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
14	Тема 14. Варианты сплайнов для функций матричной переменной: сплайны первой степени, матричные варианты сплайнов третьей степени.									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
15	Тема 15. Приближенные методы интерполяционного типа для решения матричных уравнений: построение приближенных методов основано на полученных ранее интерполяционных формулах									[1-2]	Отчет о практической работе, зачет
	ВСЕГО ЧАСОВ	10	10	10	10	10	10	10	10	10	Зачет

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
(дневная форма обучения, срок обучения 2 года)

Номер раздела,	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					УСР	Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Тема 1. Основные задачи операторного интерполирования и интерполирования функций от матриц: интерполирование Лагранжа, Эрмита, Эрмита-Биркгофа и др.	1	1					[1-2]	Опрос
2	Тема 2. Аналитические и другие классы функций матричной переменной: основные классы матричных многочленов (случай квадратных и прямоугольных матриц), аналитические функции от матриц (определение, примеры), тригонометрические и другого вида матричные многочлены.	2	3					[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
3	Тема 3. Основные виды интерполяционных формул лагранжева и ньютонова типов: интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона первой и второй степени, интерполяционные многочлены произвольной степени для разных видов матричных узлов, применение линейного интерполирования к решению матричных уравнений.	2	3					[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
4	Тема 4. Интерполяционные формулы Лагранжа-	2	2					[1-2]	Опрос, отчет о

	Сильвестра для простых матриц и матриц с произвольным спектром: аннулирующие многочлены матрицы, формула Лагранжа-Сильвестра (общий случай, для треугольных матриц, клеток Жордана и диагональных матриц). Примеры.										практической работе
5	Тема 5. Интерполяционная формула Эрмита с двукратными узлами: алгебраический случай и тригонометрический случай (скалярные узлы интерполирования).	1	1							[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
6	Тема 6. Интерполяционные формулы на множестве матриц с йордановым умножением: определение йорданова умножения и его свойства, линейные интерполяционные многочлены и многочлены произвольной степени.	1	1							[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
7	Тема 7. Кронекеровское умножение матриц и интерполяционные формулы на множестве матриц с таким умножением: основные свойства кронекеровского умножения, интерполяционные формулы первого и произвольных порядков.	1	1							[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
8	Тема 8. Представление интерполяционных многочленов для аналитических функций в виде контурных интегралов: матричный аналог формулы Коши для аналитических функций, интегральное представление интерполяционных многочленов и их погрешностей, получение оценок погрешностей интерполирования.	2	2							[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
9	Тема 9. Интерполирование функций двух матричных переменных: виды многочленов от двух матричных переменных, формулы линейной интерполяции и произвольного порядка различной структуры.	1	1							[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
10	Тема 10. Псевдообратная матрица и ее свойства.	2	2							[1-2]	Опрос, отчет о

	Некоторое ее применение: существование и единственность матриц Мура-Петроуза, решение систем алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей, наилучшее в среднеквадратичном смысле решение.																		практической работе
11	Тема 11. Интерполяционные формулы на множестве прямоугольных матриц: формулы линейной интерполяции, матричные интерполяционные многочлены произвольной степени.	1	1																Опрос, отчет о практической работе
12	Тема 12. Матричный интеграл Стилтеса и его применение в задачах интерполяции функций от матриц: определение и вычисление интегралов специального вида, матричные интерполяционные многочлены в пространстве непрерывных матриц.	2	2																Опрос, отчет о практической работе
13	Тема 13. Формулы интерполирования в пространстве гладких матриц: формулы на множествах непрерывно дифференцируемых матриц, формулы интерполирования на множестве матриц более высокой гладкости.	1	1																Опрос, отчет о практической работе
14	Тема 14. Варианты сплайнов для функций матричной переменной: сплайны первой степени, матричные варианты сплайнов третьей степени.	1	1																Опрос, отчет о практической работе
15	Тема 15. Приближенные методы интерполяционного типа для решения матричных уравнений: построение приближенных методов основано на полученных ранее интерполяционных формулах	2	2																Отчет о практической работе, зачет
	ВСЕГО ЧАСОВ	22	24																Зачет

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
(заочная форма обучения, срок обучения 2,5 года)

Номер раздела,	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					УСР	Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Тема 1. Основные задачи операторного интерполирования и интерполирования функций от матриц: интерполирование Лагранжа, Эрмита, Эрмита-Биркгофа и др.	1	1					[1-2]	Опрос
2	Тема 2. Аналитические и другие классы функций матричной переменной: основные классы матричных многочленов (случай квадратных и прямоугольных матриц), аналитические функции от матриц (определение, примеры), тригонометрические и другого вида матричные многочлены.	1						[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
3	Тема 3. Основные виды интерполяционных формул лагранжа и ньютонова типов: интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона первой и второй степени, интерполяционные многочлены произвольной степени для разных видов матричных узлов, применение линейного интерполирования к решению матричных уравнений.	1						[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
4	Тема 4. Интерполяционные формулы Лагранжа-	1	1					[1-2]	Опрос, отчет о

	Сильвестра для простых матриц и матриц с произвольным спектром: аннулирующие многочлены матрицы, формула Лагранжа-Сильвестра (общий случай, для треугольных матриц, клеток Жордана и диагональных матриц). Примеры.											практической работе
5	Тема 5. Интерполяционная формула Эрмита с двукратными узлами: алгебраический случай и тригонометрический случай (скалярные узлы интерполирования).	1									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
6	Тема 6. Интерполяционные формулы на множестве матриц с йордановым умножением: определение йорданова умножения и его свойства, линейные интерполяционные многочлены и многочлены произвольной степени.	1									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
7	Тема 7. Кронекеровское умножение матриц и интерполяционные формулы на множестве матриц с таким умножением: основные свойства кронекеровского умножения, интерполяционные формулы первого и произвольных порядков.	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
8	Тема 8. Представление интерполяционных многочленов для аналитических функций в виде контурных интегралов: матричный аналог формулы Коши для аналитических функций, интегральное представление интерполяционных многочленов и их погрешностей, получение оценок погрешностей интерполирования.	1									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
9	Тема 9. Интерполирование функций двух матричных переменных: виды многочленов от двух матричных переменных, формулы линейной интерполяции и произвольного порядка различной структуры.	1									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
10	Тема 10. Псевдообратная матрица и ее свойства.	1	1								[1-2]	Опрос, отчет о

	Некоторое ее применение: существование и единственность матриц Мура–Пенроуза, решение систем алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей, наилучшее в среднеквадратичном смысле решение.										практической работе
11	Тема 11. Интерполяционные формулы на множестве прямоугольных матриц: формулы линейной интерполяции, матричные интерполяционные многочлены произвольной степени.									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
12	Тема 12. Матричный интеграл Стилтгеса и его применение в задачах интерполяции функций от матриц: определение и вычисление интегралов специального вида, матричные интерполяционные многочлены в пространстве непрерывных матриц.									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
13	Тема 13. Формулы интерполирования в пространстве гладких матриц: формулы на множествах непрерывно дифференцируемых матриц, формулы интерполирования на множестве матриц более высокой гладкости.									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
14	Тема 14. Варианты сплайнов для функций матричной переменной: сплайны первой степени, матричные варианты сплайнов третьей степени.									[1-2]	Опрос, отчет о практической работе
15	Тема 15. Приближенные методы интерполяционного типа для решения матричных уравнений: построение приближенных методов основано на полученных ранее интерполяционных формулах									[1-2]	Отчет о практической работе, зачет
	ВСЕГО ЧАСОВ	10	4	4							Зачет

ИНФОРМАЦИОННО–МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Янович Л. А., Игнатенко М. В. Основы теории интерполирования функций матричных переменных. – Минск: Беларуская навука, 2016. – 281 с.
2. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А. – Интерполирование операторов. – Киев: Наукова думка, 2000. – 407 с.

Дополнительная литература

3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
4. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 367 с.
6. Магнус Я. Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с.
7. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
8. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
9. Сачков В. Н., Тараканов В. Е.. Комбинаторика неотрицательных матриц. – М.: Научное издательство ТВП, 2000. – 452 с.
10. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 565 с.
11. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— 3-е изд., перераб. – М. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 752 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ МАГИСТРАНТОВ

Самостоятельная работа для магистрантов – важнейшая часть учебного процесса. Решение задач по подготовке квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, невозможно без наличия навыков самостоятельной работы магистрантов.

Цель самостоятельной работы магистрантов:

- углубление фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков в соответствии с профилем деятельности;
- сознательно и самостоятельно осуществлять работу с учебным и научным материалом;
- совершенствование опыта исследовательской и созидательной деятельности;
- совершенствование навыков творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального формата;
- укрепление навыков самоорганизации и самовоспитания для получения навыков перманентного повышения профессионализма.

Для достижения целей самостоятельной работы магистрантов необходимо решение следующих задач:

- развитие творческого мышления;
- овладение основными методами исследовательской работы;
- приобретение магистрантами через самостоятельную деятельность собственного опыта и профессиональных навыков.
- углубление, расширение, систематизация и закрепление полученных знаний и умений;
- выработка навыка использования и анализа источниковой базы и специальной литературы;
- формирование исследовательских навыков и умений;
- овладение способностью использовать собранную в ходе самостоятельной работы информацию в учебных целях.

Основными направлениями самостоятельной работы в овладении знаниями учебной дисциплины *«Интерполирование функций матричной переменной и его применение»* являются:

- первоначально подробное ознакомление с программой учебной дисциплины;
- ознакомление со списком рекомендуемой литературы по дисциплине в целом и ее разделам, наличие ее в библиотеке и других доступных источниках, изучение необходимой литературы по теме, подбор дополнительной литературы;
- изучение и расширение лекционного материала преподавателя за счет специальной литературы, консультаций;
- подготовка к зачету.

Тем самым, имеется в виду постепенный переход обучения в самообучение, когда магистрант должен получать знания главным образом за счет креативной самостоятельной работы, самостоятельно осуществляя поиск необходимой информации и созидательно прорабатывая ее с тем, чтобы произвести необходимые умозаключения и получить результаты. В этом случае, выполняя учебные задачи, магистранты самостоятельно приобретают новые знания, навыки и умения (в частности, умение анализировать и принимать решения в нестандартных ситуациях), что очень важно для эффективной будущей профессиональной деятельности.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ МАГИСТРАНТОВ

Задание 1. Вычислить функцию $f(A) = e^A$ в случаях, когда $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ и $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, используя интерполяционную формулу Лагранжа–Сильвестра.

Методические рекомендации. В первом случае, поскольку собственные значения матрицы различны, применить интерполяционную формулу Лагранжа–Сильвестра для матриц простой структуры. Во втором случае, так как матрица имеет единственное собственное значение второй кратности, использовать интерполяционную формулу Лагранжа–Сильвестра для случая одного двукратного собственного значения.

$$\text{Ответ: } f\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 + 4e & 2 - 2e \\ -6 + 6e & 4 - 3e \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = e^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задание 2. Вычислить приближенно функцию $f(A) = e^A$ в точке $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, используя формулу линейной интерполяции

$$L_1(A) = f(A_0) \odot (A_0 - A_1)^{(-1)} \odot (A - A_1) + f(A_1) \odot (A_1 - A_0)^{(-1)} \odot (A - A_0),$$

где узлы интерполирования $A_0 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, \odot – операция умножения матриц по Адамару.

Методические рекомендации. Если $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ – матрицы одинаковой размерности, то матрица $C = A \odot B$ той же размерности с элементами $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ – произведение Адамара; $A^{\dot{-}1} = \left[\frac{1}{a_{ij}} \right]$ – обратная по Адамару для $A = [a_{ij} \neq 0]$.

$$\text{Ответ: } f(A) \approx \begin{bmatrix} -3355,0 & 1446,93 \\ 109,27 & 111,99 \end{bmatrix}.$$

Задание 3. Построить интерполяционный многочлен первой степени

$$L_{01}(A) = F(A_0) \cdot \left\{ (A_1 - A_0)^{-1} \cdot (A_1 - A) \right\} + F(A_1) \cdot \left\{ (A_0 - A_1)^{-1} \cdot (A_0 - A) \right\}$$

по узлам $A_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, где \cdot – операция йорданова умножения матриц, для

а) функции $F(A) = A$;

б) функции $F(A) = A^2$.

Методические рекомендации. Йорданово произведение матриц:

$$A \cdot B = \frac{1}{2}(AB + BA).$$

Ответ: а) $L_{01}(A) = \begin{bmatrix} -1/12 & 7/12 \\ 2/3 & 1/12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot A \right\};$

б) $L_{01}(A) = \begin{bmatrix} -113/12 & -35/12 \\ -40/3 & -65/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 17 & 14 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot A \right\}.$

Задание 4. Построить интерполяционный матричный многочлен

$L_1(A)$ по узлам $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, где

$$L_1(A) = F(A_0) \left[(A_0 - A_1)^{-1} \odot (A - A_1) \right] + F(A_1) \left[(A_1 - A_0)^{-1} \odot (A - A_0) \right].$$

Здесь \odot – умножение матриц по Адамару, $(A_0 - A_1)^{-1}$ – матрица, обратная по Адамару к матрице $A_0 - A_1$.

Методические рекомендации. Если $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ – матрицы одинаковой размерности, то матрица $C = A \odot B$ той же размерности с элементами $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ – произведение Адамара; $A^{-1} = \left[\frac{1}{a_{ij}} \right]$ – обратная по Адамару для $A = [a_{ij} \neq 0]$.

Ответ: $L_1(A) = F(A_0) \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & 3 - a_{12} \\ 5 - a_{21} & \frac{a_{22} - 1}{2} \end{bmatrix} + F(A_1) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} - 2 \\ a_{21} - 4 & \frac{3 - a_{22}}{2} \end{bmatrix}.$

Задание 5. Вычислить $\sin A$, где $A = \begin{bmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{bmatrix}$.

Методические рекомендации. Применить формулу Лагранжа–Сильвестра для матриц простой структуры.

Ответ: $\sin A = \frac{\sin(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$

Задание 6. Вычислить функцию $F(A) = \cos^2 A + \sin^2 A$ в точке

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Методические рекомендации. Применить формулу Лагранжа–Сильвестра для матриц простой структуры.

Ответ: $F(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Задание 7. Вычислить приближенно функцию $F(A) = \cos^2 A + \sin^2 A$ в точке $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ по интерполяционной формуле

$$L_1(A) = F(A_0) + (A - A_0)(A_1 - A_0)^{-1} [F(A_1) - F(A_0)],$$

где $A_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Методические рекомендации. Применить формулу Лагранжа–Сильвестра для матриц в случае единственного двукратного собственного значения.

Ответ: $F(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Задание 8. Вычислить матрицы A^{100} , где $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ и A^{50} , где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Методические рекомендации. В первом случае, поскольку собственные значения матрицы различны, применить интерполяционную формулу Лагранжа–Сильвестра для матриц простой структуры. Во втором случае, так как матрица имеет единственное собственное значение второй кратности, использовать интерполяционную формулу Лагранжа–Сильвестра для случая одного двукратного собственного значения.

Ответ: 1) $A^{100} = 3^{100} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $A^{50} = 2^{50} \begin{bmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{bmatrix}.$

Задание 9. Вычислить матрицу $F(A)$ в точке $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, где

$F(z)$ – любая целая функция.

Методические рекомендации. Использовать интерполяционную формулу Лагранжа–Сильвестра для случая одного трехкратного собственного значения.

Ответ: $f(A) = I f(0) + A f'(0) + \frac{1}{2} A^2 f''(0)$.

Задание 10. Найти предел при $n \rightarrow \infty$ при последовательности матриц

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^n \quad (n=1,2,3\dots).$$

Методические рекомендации. Вычислить общий член последовательности, применяя интерполяционную формулу Лагранжа-Сильвестра и учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{kk}^n = 0$, поскольку $0 < \lambda_k = a_{kk} < 1$ для $k = 0, 1, 2$.

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задание 11. Вычислить дифференциал Гато функции $\sin A$ на множестве коммутируемых матриц.

Методические рекомендации. Вычислить дифференциал Гато $\delta F[x; h] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [F(x + \lambda h) - F(x)]$ по правилу Лопиталья.

Ответ: $\delta \sin[A; H] = \cos A \cdot H$.

Задание 12. Вычислить значение функции $f(A) = e^{A+I}$, где I –

единичная матрица, в точке $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Методические рекомендации. Воспользоваться формулой $f(A) = H_{00}(A) f(\lambda_0) + H_{10}(A) f'(\lambda_0) + H_{01}(A) f(\lambda_1)$, где λ_0 – двукратное собственное значение матрицы A , λ_1 – собственное значение первой кратности,

$$H_{00}(z) = \frac{z - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_1} - \frac{(z - \lambda_0)(z - \lambda_1)}{(\lambda_0 - \lambda_1)^2}, \quad H_{10}(z) = \frac{(z - \lambda_0)(z - \lambda_1)}{\lambda_0 - \lambda_1},$$

$$H_{01}(z) = \frac{(z - \lambda_0)^2}{(\lambda_1 - \lambda_0)^2}.$$

$$\text{Ответ: } f(A) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^9 + 2 & e^9 - 1 & e^9 - 1 \\ e^9 - 1 & e^9 + 2 & e^9 - 1 \\ e^9 - 1 & e^9 - 1 & e^9 + 2 \end{bmatrix}.$$

Задание 13. Построить интерполяционный многочлен

$$L_1(A, B) = F(A_0, B_0) + \int_0^1 \delta_A F[A_0 + \tau(A_1 - A_0), B_0 + \tau(B_1 - B_0); A - A_0] d\tau + \\ + \int_0^1 \delta_B F[A_0 + \tau(A_1 - A_0), B_0 + \tau(B_1 - B_0); B - B_0] d\tau$$

для функции $F(A, B) = P_2(A, B) = \int_T N_0(t) A(t) N_1(t) B(t) dt$.

Методические рекомендации. Учтите, что дифференциалы Гато

$$\delta_A F[A, B; H] = \int_T N_0(t) H(t) N_1(t) B(t) dt = F(H, B),$$

$$\delta_B F[A, B; H] = \int_T N_0(t) A(t) N_1(t) H(t) dt = F(A, H).$$

Ответ: $L_1(A, B) = \frac{1}{2} F(A - A_0, B_1) + \frac{1}{2} F(A - A_1, B_0) + \frac{1}{2} F(A_1 + A_0, B)$.

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Диагностика результатов учебной деятельности по дисциплине «Интерполирование функций матричной переменной и его применение» проводится, как правило, во время аудиторных занятий. Для диагностики используются:

- опрос на аудиторных занятиях;
- защита лабораторных работ;
- защита результатов домашних заданий.

Контрольные мероприятия проводятся в соответствии с учебно-методической картой дисциплины. В случае неявки на контрольное мероприятие по уважительной причине магистрант вправе по согласованию с преподавателем выполнить его в дополнительное время. Для магистрантов, получивших неудовлетворительные оценки за контрольные мероприятия, либо не явившихся по неуважительной причине, по согласованию с преподавателем и с разрешения заведующего кафедрой мероприятие может быть проведено повторно. По итогам семестра проводится зачет.

МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ИТОГОВОЙ ОЦЕНКИ

Полученные магистрантом количественные результаты учитываются как составная часть итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

Итоговая оценка формируется на основе трех документов:

1. Правила проведения аттестации (Постановление № 53 от 29.05.2012 г.).
2. Положение о рейтинговой системе БГУ (ред 2015 г.).
3. Критерии оценки магистрантов (10 баллов).

ПРОТОКОЛ

СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Численные методы	Веб-технологий и компьютерного моделирования	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол №2 от 04.10.2017г.)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ

на ____ / ____ учебный год

№.№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры Веб-технологий и компьютерного моделирования (протокол № ____ от ____ 201__ г.)

Заведующий кафедрой

канд. физ.-мат. наук, доцент
(ученая степень, ученое звание)

(подпись) В.С. Романчик
(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

канд. физ.-мат. наук, доцент
(ученая степень, ученое звание)

(подпись) Д.Г. Медведев
(И.О.Фамилия)