ОБ ИЗОХРОННОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ

А. Е. Руденок (Минск, Беларусь)

Теорема 1. Пусть $b(x) = x + ...-$аналитическая в точке $x = 0$ функция. Для того чтобы функция, обратная к функции $b(x)$, имела вид $x+\alpha(x)$, где $\alpha(x)-$ четная функция, необходимо и достаточно чтобы выполнялось тождество

$$b(x) + b(x - 2b(x)) = 0. \tag{1}$$

Теорема 2. Для того чтобы система $\dot{x} = -y, \dot{y} = f(x)$ была изохронной, необходимо и достаточно чтобы выполнялось тождество (1), где $b(x) = \sqrt{2\int\limits_0^x f(x)\mathrm{d}x}$.

Теорема 3. Для того чтобы система

$$\dot{x} = -y, \dot{y} = a(x) + c(x)y^2 \tag{2}$$

была изохронной, необходимо и достаточно чтобы она представлялась в виде

$$\dot{x} = -y, \dot{y} = \frac{b(C(x))b'(C(x))}{C'(x)} + \frac{C'(x)}{C''(x)}y^2,$$

где $b(x)-$ функция, такая что обратная к ней функция имеет вид $x + \alpha(x), \alpha(x)$ — четная функция.

Примеры. Системы

$$\dot{x} = -y, \dot{y} = \frac{f(x)\,(1 - f(x))\left(1 - 2f(x) + 2(f(x))^2\right)}{(1 - 2f(x))^3\, f'(x)} + \frac{f''(x)}{f'(x)}y^2, f(x) = x + ...,$$

$$\dot{x} = -y, \dot{y} = \frac{f(x)\,(3 - 4f(x))}{3f'(x)} + (\frac{5f'(x)}{3 - 4f(x)} + \frac{f''(x)}{f'(x)})y^2, f(x) = x + ...,$$

$$\dot{x} = -y, \dot{y} = \frac{-1 + f(x)}{(f(x))^2 f'(x)} + \frac{(f'(x))^2 + f(x)f''(x)}{f(x)f'(x)}y^2, f(0) = 1$$

— изохронные.

Теорема 4. Для того чтобы система (2) была изохронной, необходимо и достаточно чтобы система уравнений

$$A(x) + A(y) = 0, C(x) - 2A(x) = C(y) \tag{3}$$

где

$$C(x) = \int\limits_0^x \exp(\int\limits_0^x c(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x, A(x) = \sqrt{2\int\limits_0^x a(x)C'(x)\mathrm{d}x}$$

имела аналитическое решение $y = y(x)$ такое, что $y(0) = 0, y'(0) = -1$.

Пример. Система (2), где

$$a(x) = \frac{x\left(3 - 6Nx + N^2x^2\right)}{3\,(1 - Nx)\,(1 - 2Nx)}, c(x) = \frac{N\,(1 + Nx)}{(1 - Nx)\,(1 - 2Nx)} \quad ,$$

изохронная, так как система уравнений (3) имеет решение $y(x) = \dfrac{-x}{1 - 2Nx}$.

О ПРИБЛИЖЕНИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ

В. Н. Русак, И. В. Рыбаченко (Минск, Беларусь)

Будем рассматривать мероморфные функции, представимые в виде интеграла, зависящего от параметра

$$F(z) = \frac{z}{1 - e^{-2\pi z}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-tz} dt. \tag{1}$$

Очевидно, числитель и знаменатель правой части суть аналитические функции во всей комплексной плоскости, поэтому их отношение будет мероморфной функцией, имеющей простые полюсы в нулях знаменателя $\pm i, \pm 2i, \ldots, \pm ki, \ldots$.

Если $f(t)$ принадлежит пространству $C_{2\pi}$, то мероморфная функция (1) $F(z)$ раскладывается в ряд по простым дробям

$$F(z) = \frac{F_0}{2} + z \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{F_k}{z - ki} + \frac{F_{-k}}{z + ki} \right). \tag{2}$$

В дальнейшем нас будут интересовать равномерные и интегральные уклонения функции $F(x)$, $x \in R$, от частных сумм ряда (2)

$$S_n(x) = \frac{F_0}{2} + x \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{F_k}{x - ki} + \frac{F_{-k}}{x + ki} \right),$$

или, более общо, от рациональных функций $R_{2n}(x)$ с простыми полюсами в точках $z = ki, k = \overline{-n, n}$, которые являются образами тригонометрических полиномов $\sigma_n(t)$.

Теорема 1. Если $f(t)$ непрерывная 2π - периодическая функция, то справедлива оценка

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - R_{2n}(x)|^p \frac{dx}{1 + x^2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi^{\frac{1}{p}} \| f(t) - \sigma_n(t) \|_{C_{2\pi}}, \ \ 1 \leq p \leq \infty.$$

Пусть $W^r_{2\pi}$ есть класс 2π-периодических функций, у которых существует абсолютно непрерывная производная $f^{(r-1)}(t)$ и почти всюду $|f^{(r)}(t)| \leq M$.

Теорема 2. Если $f(t) \in W^r_{2\pi}$, то при всех $p, 1 \leq p \leq \infty$, справедлива оценка

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - S_n(x)|^p \frac{dx}{1 + x^2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{4M}{\pi^{2 - \frac{1}{p}}} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r} \right).$$