О ЕСТЕСТВЕННОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ

В.И. Булатов

Белорусский государственный университет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
boulatov@bsu.by

Рассмотрим стационарную систему, не разрешенную относительно производной

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $x - n$-вектор траектории; $u - r$-вектор управления; A_0, A и $B - n \times n, n \times n$ и $n \times r$-матрицы.

Под решением системы (1), соответствующим начальному условию

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где x_0 – заданный n-вектор, будем подразумевать пару $(x(t); u(t))$ из дифференцируемой n-вектор-функции $x(t), t \in [0; +\infty[$ и интегрируемой r-вектор-функции $u(t),\ t \in [0; +\infty[$, удовлетворяющих (1),(2).

Пусть X_0 – множество всех n-векторов x_0, для каждого из которых система (1) имеет хотя бы одно решение, соответствующее начальному условию (2).

Систему (1) считаем естественно управляемой, если для произвольного $x_0 \in X_0$ найдется такое решение $(x(t); u(t))$ этой системы, соответствующее начальному условию (2), что при некотором $t_0 > 0$ имеем $x(t_0) = 0$. В случае $X_0 = \mathbb{R}^n$ естественно управляемую систему (1) будем называть полностью управляемой.

Пусть система (1) является регулярной, т.е. существует число λ_0, такое, что

$$\det(\lambda_0 A_0 - A_0) \neq 0. \tag{3}$$

При выполнении (3) регулярная система (1) с помощью замены

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda_0 t} x_0(t), \\ u(t) = e^{\lambda_0 t} u_0(t), \end{cases} \tag{4}$$

приводится к виду

$$G\dot{x}_0(t) = x_0(t) + B_0 u_0(t), \tag{5}$$

где

$$\begin{cases} G = (A - \lambda_0 A_0)^{-1} A_0, \\ B_0 = (A - \lambda_0 A_0)^{-1} B. \end{cases} \tag{6}$$

Отсюда, учитывая, что из (4) следует

$$x_0(0) = x(0) = x_0 \in X_0,$$

получаем, что регулярная система (1) будет естественно управляемой тогда и только тогда, когда естественно управляема система (5), т.е. когда [1]

$$\mathrm{rank}[B_0; GB_0; \ldots; G^{\,n-1}B_0] = \mathrm{rank}[B_0; GB_0; \ldots, G^{\,n-1}B_0; G^{\,n}].$$

На основании этого доказывается следующая

Теорема 1. *Для естественной управляемости системы* (5), *а, значит, и регулярной системы* (1), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\underset{\forall\lambda}{rank}[\lambda G - E; B_0] = n. \tag{7}$$

Замечание. Используя (6) нетрудно получить, что для регулярных систем (1) условие (7) равносильно условию

$$\underset{\forall\lambda}{\mathrm{rank}}[\lambda A_0 - A; B] = n, \tag{8}$$

являющимся спектральным критерием естественной управляемости регулярных систем (1). Отсюда следует, что так как для обыкновенных систем (1), т.е. когда $\det A_0 \neq 0$, имеем $X_0 = \mathbb{R}^n$, то естественная управляемость таких систем совпадает с их полной управляемостью, и поэтому для этих систем условие (8) будет также критерием их полной управляемости, что соответствует хорошо известному спектральному критерию полной управляемости обыкновенных систем (1).

Библиографические ссылки

1. *Булатов В.И.* Критерий естественной управляемости одной линейной системы, не разрешенной относительно производной. // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Тезисы докл. Минск. 2010. С. 80 – 81.