ОБОБЩЕНИЯ ПОДГРУППЫ ФИТТИНГА И ГИПЕРЦЕНТРА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

***В.И. МУРАШКО*, А.Ф. ВАСИЛЬЕВ**

In the paper properties of the generalized Fitting subgroups and the hypercenter of a finite group were studied and a notion of R-subnormal subgroup was introduced. With the help of them new characterizations of classes of nilpotent groups, supersoluble groups and some local formations were obtained

Ключевые слова: конечная группа, нильпотентная группа, подгруппа Фиттинга, гиперцентр, субнормальная подгруппа

1. Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Одним из важнейших классов конечных групп является класс всех нильпотентных групп. Он обладает многими интересными свойствами. В частности, нильпотентная группа является прямым произведением своих силовских подгрупп. Данный класс определяет в каждой группе специальные подгруппы такие, как подгруппа Фиттинга, гиперцентр и др., имеющие значительное влияние на строение произвольной группы.

В 1938 Фиттинг [1] показал, что произведение двух нормальных нильпотентных подгрупп нильпотентно. Это означает, что во всякой группе существует единственная максимальная нормальная нильпотентная подгруппа $F(G)$, называемая подгруппой Фиттинга. Эта подгруппа оказывает большое влияние на строение разрешимой группы. Например, Рамадан [2] доказал следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть G – разрешимая группа. Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп F(G) нормальны в G, то G сверхразрешима.*

Анализируя доказательства теорем такого типа в разрешимом случае, можно заметить, что наиболее часто используются следующие свойства $F(G)$:

(1) $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$;

(2) $\Phi(G) \subseteq F(G)$ и $F(G)/\Phi(G) = F(G/\Phi(G))$;

(3) $F(G)/\Phi(G) \leq Soc(G/\Phi(G))$.

Для подгруппы Фиттинга произвольной группы верны только утверждения (2) и (3). Заметим, что имеется большое количество неизоморфных групп G с $F(G) = 1$. Поэтому предпринимались попытки обобщить подгруппу Фиттинга. В 1970 году Х. Бендер [3] ввел квазинильпотентный радикал $F^*(G)$. Подгруппа $F^*(G)$ может быть определёна следующей формулой: $F^*(G)/F(G) = Soc(C_G(F(G))F(G)/F(G))$. Для $F^*(G)$ выполняются утверждения аналогичные (1) и (3). Данная подгруппа является обобщением подгруппы Фиттинга. Она использовалась при классификации конечных простых групп. Также $F^*(G)$ рассматривалась многими авторами при изучении непростых групп (см., например, [4–6]).

В 1985 г. П. Фёрстер [7] показал, что в каждой группе G существует характеристическая подгруппа $\widetilde{F}(G)$, удовлетворяющая утверждениям аналогичным (1)-(3). Эта подгруппа определяется условиями: $\Phi(G) \subseteq \widetilde{F}(G)$ и $\widetilde{F}(G)/\Phi(G) = Soc(G/\Phi(G))$. Впервые это подгруппа была отмечена П. Шмидом [8] в 1972 г. Она была определена в явном виде Л.А. Шеметковым [9, с. 79] в 1978 г. П. Шмид и Л.А. Шеметков использовали подгруппу $\widetilde{F}(G)$ при изучении *f*-стабильных групп автоморфизмов. Отметим следующее применение $\widetilde{F}(G)$.

Теорема 1.2 [10]. *Пересечение всех максимальных подгрупп M группы G таких, что* $\widetilde{F}(G)M = G$, *совпадает с Φ(G) для любой группы G*.

Другое направление использования подгруппы Фиттинга и её обобщений связано со следующей концепцией. Напомним [11, 12], что подгрупповым функтором называется отображение τ, которая сопоставляет каждой группе G множество $\tau(G)$ подгрупп G, удовлетворяющее $f(\tau(G)) = \tau(f(G))$ для любого изоморфизма $f\colon G \to G^*$.

Определение 1.3. Пусть θ – подгрупповой функтор и R – подгруппа группы G. Подгруппу H группы G назовём R-θ подгруппой, если $H \in \theta(\langle H, R\rangle)$.

Пусть θ – **P**-субнормальный подгрупповой функтор. Напомним [13], что подгруппа H группы G называется **P**-субнормальной в G, если $H = G$ или существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$, где $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для $i = 1,\ldots,n$. Хорошо известную теорему О. Крамера [14, с. 12] можно записать следующим образом.

Теорема 1.4. *Если всякая максимальная подгруппа разрешимой группы G является F(G)-**P**-субнормальной, то G сверхразрешима.*

Эта теорема была обобщена в [15]. В нашей терминологии этот результат звучит так.

Теорема 1.5. *Если всякая максимальная подгруппа группы G является* $\widetilde{F}(G)$*-**P**-субнормальной, то G сверхразрешима.*

Пусть θ – сопряжённо-перестановочный подгрупповой функтор. Напомним [16], что подгруппа H группы G называется сопряжённо-перестановочной, если $HH^x = H^xH$ для всех $x \in G$.

Теорема 1.6 [17, 18]. *Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда всякая её максимальная подгруппа является* $\widetilde{F}(G)$*-сопряжённо-перестановочной.*

Теорема 1.7 [17, 18]. *Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда всякая силовская подгруппа G является* $F^*(G)$*-сопряжённо-перестановочной.*

Пусть θ – субнормальный функтор. В [19] В.И. Мурашко и А.Ф. Васильев начали изучать произведения $F(G)$-субнормальных подгрупп. В данной работе продолжено изучение влияния R-субнормальных подгрупп на строение конечных групп, если $R \in \{F(G), F^*(G), \widetilde{F}(G)\}$.

В работе [20] Бэр установил важные свойства гиперцентра конечной группы. В частности, им была доказана следующая теорема.

Теорема 1.8 [20]. *Пересечение всех нормализаторов силовских подгрупп группы G совпадает с ее гиперцентром* $Z_\infty(G)$.

Одним из естественных обобщений класса нильпотентных групп является следующий класс групп.

Определение 1.9. Пусть π – подмножество множества простых чисел. Предположим, что σ является разбиением π на непересекающиеся подмножества π_i, $i \in I$. Обозначим через $\times_{i \in I} \mathsf{G}_{\pi_i}$ класс групп представимых в виде прямого произведения прямого произведения своих холловых π_i-подгрупп, где $i \in I$.

Данный класс групп является насыщенной наследственной формацией [12, с. 131]. В настоящей работе получены характеризации **F**-гиперцентра относительно этого класса групп.

Пусть **F** – насыщенная наследственная формация. Напомним, что подгруппа H группы G называется **F**-субнормальной, если $H = G$ или существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathbf{F}} \subseteq H_{i-1}$ для $i = 1,\ldots, n$. В работе при помощи $\widetilde{F}(G)$ изучается класс групп, у которых каждая циклическая примарная подгруппа является **F**-субнормальной.

2. Обобщения $F(G)$ и их свойства

В данном разделе излагается материал, полученный в [21]. Хорошо известно, что $F(F(G))=F(G)$ и $F^*(F^*(G))=F^*(G)$. В [22] П. Фёрстер показал, что существуют группы G, для которых $\widetilde{F}(\widetilde{F}(G)) < \widetilde{F}(G)$. Это приводит нас к следующему определению.

Определение 2.1. Пусть G – конечная группа. Для целого неотрицательного n определим подгруппу $\widetilde{F}^n(G)$ следующим образом: $\widetilde{F}^0(G) = G$ и $\widetilde{F}^{n+1}(G) = \widetilde{F}(\widetilde{F}^n(G))$ для $n > 0$.

Ясно, что $\widetilde{F}^{i-1}(G) = \widetilde{F}^i(G) = \widetilde{F}^{i+1}(G)$ для некоторого i. Итак, мы можем определить подгруппу $\widetilde{F}^\infty(G)$ как минимальную подгруппу в ряду $G = \widetilde{F}^0(G) \supseteq \widetilde{F}^1(G) \supseteq \widetilde{F}^2(G) \supseteq \ldots$. Очевидно, что $\widetilde{F}^\infty(G) = \widetilde{F}^\infty(\widetilde{F}^\infty(G))$.

Предложение 2.2. *Пусть n – натуральное число, N и H – нормальные подгруппы G.*

(1) *Если* $N \le \Phi(\widetilde{F}^{n-1}(G))$, *то* $\widetilde{F}^n(G/N) = \widetilde{F}(G)/N$;

(2) $F^*(G) \subseteq \widetilde{F}^n(G)$;

(3) *если* $\Phi(\widetilde{F}^{n-1}(G)) = 1$, *то* $F^*(G) = \widetilde{F}^n(G)$;

(4) $C_G(\widetilde{F}^n(G)) \subseteq F(G)$;

(5) $\widetilde{F}^n(N) \le \widetilde{F}^n(G)$;

(6) $\widetilde{F}^n(G)N/N \le \widetilde{F}^n(G/N)$;

(7) *если* $G = N \times H$, *то* $\widetilde{F}^n(G) = \widetilde{F}^n(N) \times \widetilde{F}^n(H)$;

(8) $\Delta(G) \subseteq \widetilde{F}(G)$ *и* $\widetilde{F}(G/\Delta(G)) = \widetilde{F}(G)/\Delta(G)$, *где* $\Delta(G)$ *– пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп G.*

Из утверждений (1)-(6) предложения 2.2 при $n = 1$ следует часть соответствующих результатов из работ [7, 8, 10, 15, 22]. В работе [23] вводится подгруппа $\widetilde{F}_{\Delta}(G)$: $\Delta(G) \subseteq \widetilde{F}(G)$ и $\widetilde{F}_{\Delta}(G)/\Delta(G) = Soc(G/\Delta(G))$. Как следует из (8) предложения 2.2 $\widetilde{F}(G) = \widetilde{F}_{\Delta}(G)$.

Заметим, что $F(G)$ и $F^{*}(G)$ являются радикалами относительно формаций **N** всех нильпотентных и $\mathbf{N}^{*}$ всех квазинильпотентных групп. Естественно задать вопрос, а есть ли другие радикалы относительно N_0-замкнутых формаций лежащие между $F(G)$ и $\widetilde{F}(G)$? В значительной степени ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 2.3. Пусть $\boldsymbol{F}$ – *N_0-замкнутая формация.*

(1) *Если $\boldsymbol{F}$ насыщена и $F(G) \subseteq G_{\boldsymbol{F}} \subseteq \widetilde{F}(G)$ для любой группы G, то $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}$.*

(2) *Если $F^{*}(G) \subseteq G_{\boldsymbol{F}} \subseteq \widetilde{F}(G)$ для любой группы G, то $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}^{*}$.*

3. Обобщенный гиперцентр и нильпотентный корадикал

В данном разделе излагаются результаты, полученные в [24].

Теорема 3.1. *Пусть π – произвольное подмножество множества простых чисел, σ – разбиение π на непересекающиеся подмножества π_i, $i \in I$, и $\boldsymbol{F} = \times_{i \in I} \mathbf{G}_{\pi_i}$. Для любой π-группы G выполняется*:

(1) *$G \in \boldsymbol{F}$ тогда и только тогда, когда $ab = ba$ для всех элементов a, b группы G таких, что, если $\pi(a) \cap \pi_i \neq \varnothing$ для некоторого i, то $\pi(b) \cap \pi_i = \varnothing$.*

(2) *$GF = \langle [a,b] \mid a,b \in G$ и если для некоторого i – $\pi(a) \cap \pi i \neq \varnothing$, то $\pi(b) \cap \pi i = \varnothing \rangle$.*

(3) *πi-элемент g принадлежит ZF(G) тогда и только тогда, когда $gx = xg$ для любого $\pi i'$-элемента $x \in G$.*

(4) *ZF(G) является пересечением всех нормализаторов максимальных πi-подгрупп G, где i пробегает I.*

Теорема 1.8, как и ряд результатов из [20], следует из теоремы 3.1 в случае, когда σ – разбиение множества всех простых чисел на одноэлементные множества.

4. Приложения подгруппы Фиттинга и её обобщений

В данном разделе излагается материал, полученный в [21]. Теоремы 4.1 и 4.2 являются обобщениями хорошо известных критериев нильпотентности конечной группы.

Теорема 4.1. *Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда всякая её максимальная подгруппа является $\widetilde{F}(G)$-субнормальной.*

Теорема 4.2. *Следующие условия для группы G эквивалентны*:

(1) *G нильпотентна;*

(2) *все нормализаторы силовских подгрупп G – $F^{*}(G)$-субнормальные*;

(3) *все циклические примарные подгруппы G – $F^{*}(G)$-субнормальные*;

(4) *все силовские подгруппы G – $F^{*}(G)$-субнормальные.*

Теорема 4.5. *Если группа $G = AB$ является произведением своих F(G)-субнормальных нильпотентных подгрупп A и B, то G нильпотентна.*

Фриссен в [31] заметил, что если группа G есть произведение двух нормальных (субнормальных) сверхразрешимых подгрупп, имеющих взаимно простые индексы в ней, то G сверхразрешима. Следующий пример показывает, что в данной теореме условие субнормальности нельзя заменить на $F(G)$-субнормальность. Пусть G – группа, изоморфная симметрической группе степени 3. Тогда существует точный неприводимый F_7G-модуль V размерности 2 над полем F_7. Пусть T – полупрямое произведение V и G. Рассмотрим $A = VG_3$ и $B = VG_2$, где G_p-силовская p-подгруппа G и $p \in \{2, 3\}$. Так как $7 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ для $p \in \{2, 3\}$, то нетрудно видеть, что A и B сверхразрешимы. Так как V – точный неприводимый F_7G-модуль, то $F(T) = V$. Таким образом, A и B – $F(T)$-субнормальные подгруппы T. Заметим, что $T = AB$, но T, в силу свойств F_7G-модуля T, не является сверхразрешимой группой.

Теорема 4.8. *Пусть A, B и C – F(G)-субнормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Если индексы A, B и C в G попарно взаимно просты, то G сверхразрешима.*

5. Группы с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами

В данном разделе изложены результаты, полученные в [25].

Определение 5.1. Пусть **F** – формация. Через v**F** определим класс групп, у которых каждая циклическая примарная подгруппа, в том числе и единичная подгруппа, является **F**-субнормальной.

Теорема 5.2. *Пусть **F** – наследственная насыщенная формация. Тогда ν**F** также является наследственной насыщенной формацией и ν(ν**F**) = ν**F**.*

Известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая её циклическая примарная подгруппа субнормальна (**N**-субнормальна). С другой стороны, существуют примеры несверхразрешимых групп [26], у которых всякая циклическая примарная подгруппа **U**-субнормальна.

Теорема 5.3. *Пусть **F** – насыщенная наследственная формация. Тогда и только тогда ν**F** = **F**, когда $G/\widetilde{F}(G)$ является циклической примарной группой для любой минимальной не **F**-группы G.*

Доказательство. Предположим, что G является минимальной не **F**-группой. Если $\pi(G)\backslash\pi(\mathbf{F}) \neq \varnothing$, то G является циклической группой простого порядка в силу наследственности **F**. В этом случае $G = \widetilde{F}(G)$ и утверждение теоремы верно. Предположим теперь, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathbf{F})$. Так как **F** насыщена, то в силу (1) предложения 2.2 можно считать, что $\Phi(G) = 1$. Заметим, что $|\pi(G)| > 1$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа G. Если $N = G$, то группа $G/N \cong G/\widetilde{F}(G) \cong 1$ является циклической. Предположим, что $G \neq \widetilde{F}(G)$. Тогда найдётся максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = MN$. Откуда мы заключаем, что $N = G^{\mathbf{F}}$. Пусть C – циклическая примарная подгруппа группы G. Из $G/N \in \mathbf{F}$ следует, что CN **F**-субнормальна в G. Если $CN \neq G$, то $CN \in \nu\mathbf{F}$ и, следовательно, C **F**-субнормальна в G. Значит, если $CN \neq G$ для любой циклической примарной подгруппы группы G, то $G \in \nu\mathbf{F}$. Это означает, что $G = CN$ для некоторой циклической примарной подгруппы группы C. Так как $N \leq \widetilde{F}(G)$, то есть $G/\widetilde{F}(G)$ – циклическая примарная группа. Что и требовалось доказать.

Обратно. Предположим, что для любой минимальной не **F**-группы G верно, что $G/\widetilde{F}(G)$ – циклическая примарная группа. Ясно, что $\mathbf{F} \subseteq \nu\mathbf{F}$. Предположим, что $\nu\mathbf{F}\backslash\mathbf{F} \neq \varnothing$. Пусть группа G – минимальная группа из $\nu\mathbf{F}\backslash\mathbf{F}$. Так как формации **F** и ν**F** насыщены, то можно предположить, что $\Phi(G) = 1$. Из наследственности ν**F** и выбора группы G заключаем, что G является минимальной не **F**-группой. Заметим, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = \widetilde{F}(G) = G^{\mathbf{F}}$. По условию $G/N = \langle xN\rangle$ – циклическая p-подгруппа для некоторого простого p. Пусть P – силовская p-подгруппа в $\langle x\rangle$. Заметим, что P – циклическая подгруппа и $PN = \langle x\rangle N = G$. С другой стороны, так как $G \in \nu\mathbf{F}$, то P **F**-субнормальна в G. Тогда найдётся максимальная подгруппа M группы G такая, что $P \leq M$ и $G^{\mathbf{F}} \leq M$. Это означает, что $G < M < M$. Противоречие. Значит, ν**F** = **F**, что и требовалось доказать.

Напомним, что формация **F** называется формацией Шеметкова, если всякая минимальная не **F**-группа является группой Шмидта или циклической группой простого порядка.

Следствие 5.4. *Пусть **F** – насыщенная наследственная формация Шеметкова, тогда ν**F** = **F**.*

Напомним, что формация **F** называется решеточной, если для любой группы $G \in \mathbf{F}$ множество **F**-субнормальных подгрупп образует подрешётку решётки подгрупп G.

Следствие 5.5. *Пусть **F** – насыщенная наследственная решёточная формация, тогда ν**F** = **F**.*

Следствие 3.3. *Пусть **F** – формация π-нильпотентных групп, тогда ν**F** = **F**.*

Следствие 3.4. *Пусть **F** – формация φ-дисперсивных групп, тогда ν**F** = **F**.*

Литература

1. *Fitting, H.* Beitrage zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung / H. Fitting // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. – 1938. – Bd. 48. – S. 77-141.
2. *Ramadan, M.* Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroups of a finite group / M. Ramadan // Acta Math. Hungar. – 1992. – V. 59, № 1-2. – P. 107-110.
3. *Bender, H.* On groups with abelian Sylow 2-subgroups / H. Bender // Math. Z. – 1970. – Bd. 117. – P. 164-176.
4. *Wei, H.* On *c*-normal Maximal and Maximal Subgroups of Sylow Subgroups of Finite Groups, II / H. Wei, Y. Wang, Y. Li // Comm. Algebra. – 2003. – V. 31, № 10. – P. 4807-4811.
5. *Shen, Z.* Finite groups with weakly *S*-semipermutable subgroups embedded subgroups / Z. Shen, J. Zhang, S. Wu // International Electronic Journal of Algebra. – 2012. – V. 11. – P. 111–124.
6. *Васильев, А.Ф.* Одна задача теории формаций конечных групп / А.Ф. Васильев // Матем. заметки – 1997. – Т. 62, № 1. – С. 44–49.
7. *Forster, P.* Projektive Klassen endlicher Gruppen IIa. / P. Forster // Pub. Mat. UAB. – 1985. – V. 29, № 2-3. – P. 39-76.
8. *Shmid, P.* Uber die Automorphismengruppen endlicher Gruppen / P. Shmid // Arch. Math. – 1972. – Bd. 23, № 3. – S. 236-242.
9. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А Шеметков. — Москва:Наука, 1978. – 272 с.
10. *Васильев, А.Ф.* Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.В. Сыроквашин // ПФМТ. – 2012. – №11. – С. 62-64.
11. *Ballester-Bolinches, A.* Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.
12. *Каморников, С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Беларуская навука, 2003. – 254 с.
13. *Васильев, А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн.– 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270-1281.
14. Between Nilpotent and Soluble / H.G Bray [et al.]; ed. M.Weinstein. — Passaic:Polygonal Publishing House, 1982. – 240 p.
15. *Li, Y.* A characterization of finite supersoluble groups / Y. Li, X. Li // Publ. Math Debrecen .– 2012.– V. 80, № 3-4. – P.1-10.

16. *Foguel, T.* Conjugate-Permutable Subgroups / T. Foguel // J. Algebra. – 1997. – № 191. – P. 235–239.
17. *Мурашко, В.И.* О частично сопряжённо-престановочных подгруппах конечных групп / В.И. Мурашко // ПФМТ. — 2013. – № 14. – С. 74-78.
18. *Murashka, V.I.* On Partially Conjugate-Permutable Subgroups of Finite Groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // ArXiv.org e-Print archive, arXiv:1206.0185v1, 1 Jun 2012.
19. *Мурашко, В.И.* О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Вестник ВГУ. – 2012. – Т. 70, № 4. – С. 24-27.
20. *Baer, R.* Group elements of prime power index / R. Baer // Trans. Amer.Math. Soc. – 1953. – V. 75. – P. 20-47.
21. *Murashka, V.I.* Generalized Fitting subgroups of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // ArXiv.org e-Print archive, arXiv:1310.7445v1, 28 Oct 2013.
22. *Forster, P.* Projektive Klassen endlicher Gruppen / P. Forster // Math. Z. – 1984. – Bd. 186, № 2. – P. 149-178.
23. *Селькин, М.В.* О **F**-достижимых подгруппах конечных групп / М.В. Селькин, Р.В. Бородич // Известия ГГУ. – 2008. – № 47. – С. 177-183.
24. *Мурашко, В.И.* Об одном обобщении теорем Бэра о гиперцентре и нильпотентном корадикале / В.И. Мурашко // ПФМТ. – 2013. – № 16. – С. 84–88.
25. *Мурашко, В.И.* О классе конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Известия ГГУ. – 2013. – № 81(6). – С.55-61.
26. *Monakhov, V.S.* Finite groups with **P**-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – №62. – С. 307-322.

ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ ЗАПИСЬ ДИНАМИЧЕСКИХ ГОЛОГРАММ ГАУССОВЫМИ И СИНГУЛЯРНЫМИ СВЕТОВЫМИ ПУЧКАМИ

***С.А. НАЗАРОВ*, А.Л. ТОЛСТИК**

It has been theoretically and experimentally investigated that the polarization multi-wave mixing gives the possibility to dynamically change the polarization of light waves. It is possible to rotate the plane of polarization by 90 °, as well as the translation of the linear polarization state in a circular

Ключевые слова: Динамические голограммы, поляризационная запись

1. Введение

В современной оптической индустрии актуальной задачей является поиск методов и систем, позволяющих проводить операции над световыми пучками. Перспективным направлением исследований являются многоволновые взаимодействия в растворах сложных органических соединений, которые представляют фундаментальный и практический интерес в связи с реализацией различных методов и схем преобразования характеристик лазерных пучков, включая пространственно-временную, топологическую и поляризационную структуру волнового фронта. Использование сингулярных световых пучков (оптических вихрей) позволило создать оптические пинцеты, волноводы, новые способы лазерной обработки материалов, а схемы преобразования топологического заряда перспективны для реализации помехозащищенных алгебраических и логических операций [1].

2. Поляризационное многоволновое взаимодействие

В таблице 3.2 представлены результаты экспериментального исследования поляризационных динамических решеток с использованием схемы четырехволнового взаимодействия, когда решетка, записанная двумя волнами с различными поляризациями, считывается третьей линейно поляризованной волной, в результате чего образуется четвертая (дифрагированная) волна.

Как видно из таблицы, при взаимодействии волн с ортогональными линейными поляризациями, дифрагированная волна приобретает поляризацию ортогональную поляризации считывающей волны. При взаимодействии волн с ортогональными круговыми поляризациями, дифрагированная волна приобретает круговую поляризацию. При считывании решетки, записанной сигнальной волной с круговой поляризацией и опорной волной с линейной поляризацией, поляризация дифрагированной волны становится эллиптической.

Установлено, что поляризационное четырехволновое взаимодействие даёт возможность динамически изменять поляризацию световых волн, а именно: поворачивать плоскость поляризации на 90°, а также переводить линейное состояние поляризации в эллиптическое или круговое.

***Таблица* 1. Состояния поляризации дифрагированной волны в зависимости от состояний поляризации взаимодействующих волн**

Волна	Поляр.	Поляр.	Поляр.	Поляр.	Поляр.	Поляр.
Опорная	→	↻	↑	→	↻	↑
Сигнальная	↑	↺	↻	↑	↺	↻
Считывающая	↑	↑	↑	→	→	→
Дифрагированная	→	○	⬯	↑	○	⬭