БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

В пяти частях

Часть 1

МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики

МИНСК
2010

УДК [514+512](075.8)
ББК 22.14+22.15я73-1
Р 175

Рекомендовано Ученым советом
факультета прикладной математики и информатики
21 сентября 2010 г., протокол № 1

Рецензент

кандидат физико-математических наук,
доцент *В. И. Чесалин*

Размыслович, Г. П.

Р175 Геометрия и алгебра. В 5-ти частях. Ч. 1: Матрицы, определители, системы линейных уравнений: пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики
Г.П.Размыслович – Минск:БГУ, 2010. - 73с.

В данной части учебного пособия излагаются основы теории матриц, определителей и систем линейных алгебраических уравнений.

Пособие предназначено для студентов факультетов прикладной математики и информатики, механико-математических факультетов, а также может представлять интерес и для студентов технических вузов, где преподается курс высшей математики.

УДК [514+512] (075.8)
ББК 22.14+22.15я73-1

© Г. П. Размыслович. 2010
© БГУ, 2010

Предисловие

"Геометрия и алгебра"является одной из основных математических дисциплин, читаемых для студентов младших курсов факультетов прикладной математики и информатики университетов. Поэтому в соответствии с типовыми программами коллективом авторов в составе Г.П.Размыслович, М.М.Феденя, В.М.Ширяев были изданы учебные пособия "Геометрия и алгебра"(г.Минск, издательство "Университетское 1987г., 352с.) "Сборник задач по геометрии и алгебре"(г.Минск, издательство "Университетское 1987г., 383с.).

Однако со временем, в силу многих обстоятельств, потребовалось новое изложение материала как в теоретическом, так и практическом планах. Предлагаемое читателю учебное пособие содержит основы матричного анализа и систем линейных алгебраических уравнений, является лишь первой частью всего курса "Геометрия и алгебра"(предполагается 8 частей) и соответствует всем типовым программам этого курса для высших учебных заведений по специальностям: G1-3103 - прикладная математика; G1-3104 - информатика; G-3105 - актуарная математика; G-3106 - экономическая кибернетика, утвержденным Министерством Образования РБ от 24.09.2008г.

Это пособие (как и каждое последующее) состоит из одного или нескольких модулей (глав), т. е. весь материал разделен на фрагменты, что обеспечивает максимальную возможность взаимозаменяемости учебного материала как на бумажных, так и на электронных носителях. В свою очередь, каждый из модулей содержит теорию, примеры и цикл задач с ответами.

В заключение отметим, что в данном издании используются обозначения: ♦ — начало доказательства утверждения, ■ — конец доказательства.

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Определение матрицы. Частные случаи матриц

Пусть K — ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, а m и n — натуральные числа.

Определение 1.1. Матрицей размеров $m \times n$ над кольцом K называется прямоугольная таблица, составленная из mn элементов кольца K и имеющая m строк и n столбцов, т.е. таблица вида

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}, \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}, \end{matrix}$$

где $a_{ij} \in K$; $i, i = \overline{1,m}$ — номер строки; $j, j = \overline{1,n}$, — номер столбца. Элементы a_{ij}, составляющие матрицу называют ее элементами.

Для изображения матриц употребляют как круглые, так и квадратные скобки:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}, \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}, \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}, \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}, \end{bmatrix}.$$

Если $m = 1$, то матрица называется строчной, матрицей-строкой или просто строкой. Аналогично, если $n = 1$, то матрица называется столбцовой, матрицей-столбцом или просто столбцом.

Множество всех матриц размеров $m \times n$ над кольцом K обозначают $K_{m,n}$. Кроме того, иногда матрицу размеров $m \times n$ называют $m \times n$-матрицей.

Для обозначения матрицы употребляется также запись $(a_{ij};\, i = \overline{1,m},\, j = \overline{1,n})$ или (a_{ij}), если из контекста ясно, матрица каких размеров имеется в виду. Часто матрицу обозначают одной буквой, например

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим некоторые частные виды матриц.

1. Если $m = n$, то матрица называется квадратной матрицей n-ого порядка.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

есть квадратная матрица порядка n. Тогда одна ее часть, определяемая элементами $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, называется главной диагональю, а другая, определяемая элементами $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ — побочной диагональю.

2. Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, т. е. матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В этом случае часто пишут $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

3. Диагональная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{pmatrix}$$

называется скалярной.

4. Скалярная матрица с единичными элементами на главной диагонали называется единичной и обозначается E или I. Единичную матрицу порядка n иногда обозначают $E_n(I_n)$.

5. Матрица размеров $m \times n$, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой и обозначается $0_{m,n}$.

6. Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Причем матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется верхней треугольной, а матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— нижней треугольной матрицей.

7. Пусть α — обратимый элемент кольца K. Диагональная матрица порядка n, у которой α расположен на главной диагонали, а остальные элементы равны единице, называется элементарной матрицей первого типа или типа I. Такая матрица, как правило обозначается $T_{k,\alpha}$, если α есть k-й элемент диагонали.

Пусть $n \in N$, $\alpha \in K$. Квадратная матрица порядка n называется элементарной матрицей второго типа или типа II, если ее диагональные элементы равны единице, некоторый недиагональный элемент равен α, а остальные элементы равны нулю. Эту матрицу обозначают $T_{k,l,\alpha}$, если элемент α расположен на пересечении k-й строки и l-го столбца.

8. Матрицу A размеров $m \times n,\ m \leq n$, назовем частично мономиальной, если в каждой ее строке найдется хотя бы один элемент, равный единице, причем остальные элементы столбца, содержащего этот элемент, равны нулю. Иначе говоря, матрица $A \in K_{m,n}$ частично мономиальна, если из некоторых ее столбцов можно составить единичную матрицу порядка m.

9. Рассмотрим матрицу A размеров $m \times n$. Блоком матрицы A называется часть этой матрицы, определяемая элементами a_{ij}, где $i = \overline{i_1, i_2},\ j = \overline{j_1, j_2},\ 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m,\ 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$. Этот блок обозначается $A_{[i_1,i_2],[j_1,j_2]}$.

Возрастающая последовательность натуральных чисел

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_p,\ p \in N, \tag{1.1}$$

где $m_p = m$, называется разбиением числа m. Пусть наряду с разбиением (1.1) числа m имеем разбиение числа n :

$$n_1 < \ldots < n_q = n.$$

Тогда в соответствии с этой парой разбиений матрицу A можно разбить на блоки:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} A_{[1,m_1],[1,n_1]} & \ldots & A_{[1,m_1],[n_{q-1}+1,n_q]} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{[m_{p-1}+1,m_p]} & \ldots & A_{[m_{p-1}+1,m_p],[n_{q-1}+1,n_q]} \end{array} \right).$$

Такое разбиение матрицы A назовем блочным разбиением.

Пусть $m = n$, т. е. A — квадратная матрица порядка n, разбиения чисел m и n совпадают ($k = p = q,\ n_i = m_i,\ i = \overline{1, k}$) и матрица A представима в виде

$$\left(\begin{array}{cccc} A_{[1,n_1],[1,n_1]} & 0_{n_1,n_2-n_1} & \ldots & 0_{n_1,n_k-n_{k-1}} \\ 0_{n_2-n_1,n_1} & A_{[n_1+1,n_2],[n_1+1,n_2]} & \ldots & 0_{n_2-n_1,n_k-n_{k-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_{n_k-n_{k-1},n_1} & 0_{n_k-n_{k-1},n_2-n_1} & \ldots & A_{[n_{k-1}+1,n_k],[n_{k-1}+1,n_k]} \end{array} \right).$$

В этом случае матрицу A называют блочно-диагональной, квазидиагональной или распавшейся и пишут

$$A = \mathrm{diag}(A_{[1,n_1],[1,n_1]}, A_{[n_1+1,n_2],[n_1+1,n_2]}, \ldots, A_{[n_{k-1}+1,n_k],[n_{k-1}+1,n_k]}).$$

В соответствии с блочным разбиением матрицы по аналогии с определением треугольной матрицы можно ввести понятие (верхней, нижней) блочно-треугольной, квазитреугольной или полураспавшейся матрицы.

Так, например, матрица вида

$$A = \left(\begin{array}{cc} A_{[1,m_1],[1,n_1]} & 0_{m_1,n_2-n_1} \\ A_{[m_1+1,m_2],[1,n_1]} & A_{[m_1+1,m_2],[n_1+1,n_2]} \end{array} \right)$$

является нижней квазитреугольной, а матрица

$$A = \left(\begin{array}{cc} A_{[1,m_1],[1,n_1]} & A_{[1,m_1],[n_1+1,n_2]} \\ 0_{m_2-m_1,n_1} & A_{[m_1+1,m_2],[n_1+1,n_2]} \end{array} \right)$$

– верхней квазитреугольной.

Две матрицы $A = (a_{ij};\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ и $B = (b_{ij};\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ одинаковых размеров считаются равными (обозначение: $A = B$), если элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой матрицы, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i, j.

1.2. Линейные операции над матрицами

Рассмотрим множество матриц $K_{m,n}$.

Определение 1.2. Суммой двух матриц $A, B \in K_{m,n}$ называется такая матрица $C = (c_{ij}) \in K_{m,n}$, у которой

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \forall i, j,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Сумма матриц A и B обозначается $A + B$.

Из этого определения видно, что сумма $A + B$ матриц A и B вполне определяется этими матрицами. Следовательно, операция $(A, B) \mapsto A+B$ является алгебраической. Эта операция называется сложением матриц.

Свойства операции сложения матриц.

1^0. $A + B = B + A,\ \forall A, B \in K_{m,n}$.

2^0. $(A + B) + C = A + (B + C), \forall A, B, C \in K_{m,n}$.

3^0. Для любой матрицы $A \in K_{m,n}$ верны равенства $A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A$.

4^0. Для любой матрицы $A \in K_{m,n}$ существует матрица $B \in K_{m,n}$ такая, что $A+B = B + A = O_{m,n}$. При этом, если $A = (a_{ij})$, а $B = (b_{ij})$, то $b_{ij} = -a_{ij}$.

5^0. Матрица B называется матрицей противоположной матрице A, и обозначается $-A$.

Из указанных свойств следует

Теорема 1.1. *Множество $K_{m,n}$ относительно сложения образует абелеву группу.*

Определение 1.3. Произведением элемента α кольца K на матрицу $A \in K_{m,n}$ называется матрица $C \in K_{m,n}$ с элементами, которые вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \alpha a_{ij},\ \forall i, j,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Это произведение обозначается αA.

Операция $(\alpha A) \mapsto \alpha A$ называется умножением элемента кольца на матрицу или умножением матрицы на элемент кольца.

Свойства операции умножения матриц на элемент кольца.

Для любых матриц $A, B \in K_{m,n}$ и элементов $\alpha, \beta \in K$ имеют место следующие соотношения:

1^0. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

2^0. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

3^0. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

4^0. $1A = A$.

1.3. Умножение матриц

Определение 1.4. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размеров $m \times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размеров $n \times l$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размеров $m \times l$, у которой каждый элемент c_{ij} вычисляется по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB.

Из определения следует, что элемент матрицы AB, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Операция $(A, B) \mapsto AB$ называется умножением матриц.

Согласно определению умножать матрицу A на матрицу B можно только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В этом случае матрица A называется согласованной с матрицей B.

Из согласованности матрицы A с матрицей B не следует, вообще говоря, согласованность матрицы B с A. Однако легко заметить, что если A и B — квадратные матрицы одинакового порядка, то матрица A согласована с матрицей B и наоборот.

Свойства умножения матриц.

1^0. В общем случае $AB \neq BA$.

2^0. $(AB)C = A(BC)$, $\forall A \in K_{m,n},\ B \in K_{n,l},\ C \in K_{l,p}$.

♦ Левая часть рассматриваемого равенства имеет смысл только в случае, если матрица A согласована с матрицей B, а матрица AB согласована с матрицей C. Пусть A — $m \times n$-матрица, B — $n \times l$-матрица, а C — $l \times p$-матрица. Тогда матрица $F = (f_{ij}) = (AB)C$ имеет размеры $m \times p$. Легко убедиться, что произведение $A(BC)$ существует и матрица $\tilde{F} = (\tilde{f}_{ij}) = A(BC)$ имеет те же размеры, что и матрица F. Докажем, что

$$f_{ij} = \tilde{f}_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,p}.$$

Произведение AB обозначим через D, D — $m \times l$-матрица. Элементы этой матрицы

$$d_{is} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ks},\ i = \overline{1,m},\ s = \overline{1,l},$$

а элементы матрицы F имеют вид

$$f_{ij} = \sum_{s=1}^{l} d_{is} c_{sj},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,p},$$

или, используя свойства операций в кольце K, получаем

$$f_{ij} = \sum_{s=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ks} \right) c_{sj} = \sum_{s=1}^{l} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ks} c_{sj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{l} a_{ik}b_{ks}c_{sj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{s=1}^{l} b_{ks}c_{sj}\right).$$

Очевидно, что

$$g_{kj} = \sum_{s=1}^{l} b_{ks}c_{sj},\ k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p},$$

есть элементы $n \times p$-матрицы $G = BC$. Тогда

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}g_{kj} = \tilde{f}_{ij}.\blacksquare$$

Имеет смысл рассматривать произведение $A_1A_2\ldots A_l$ конечного числа матриц $A_1, A_2, \ldots, A_l$. Это произведение существует, если матрицы $A_i,\ i = \overline{1,l}$, соответствующим образом согласованы друг с другом.

Пусть A — квадратная матрица порядка n. Положим

$$A^0 = E,\ A^1 = A,\ A^2 = A \cdot A, \ldots,\ A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k}.$$

Таким образом вводится понятие степени матрицы A. Очевидно, что матрица A^k имеет тот же порядок, что и матрица A.

3^0. $A^mA^l = A^{m+l}$.

♦ $A^mA^l = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m}\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{l} = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m+l} = A^{m+l}.\blacksquare$

4^0. $A(B + C) = AB + AC,\ \forall A \in K_{m,n},\ \forall B, C \in K_{n,l}$;
$(A + B)C = AC + BC,\ \forall A, B \in K_{m,n},\ \forall C \in K_{n,l}$.

♦ Доказательство следует из определений суммы и произведения матриц. ■

5^0. $E_mA = AE_n = A,\ \forall A \in K_{m,n}$.

♦ Обозначим через $B = (b_{ij})$ произведение AE_n, а через $C = (c_{ij})$ — произведение E_mA. Тогда

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij},$$

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ik}a_{kj} = \delta_{ii}a_{ij} = a_{ij},$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера. Итак, $b_{ij} = a_{ij} = c_{ij},\ \forall i, j.\blacksquare$

6^0. $(\alpha E_m)A = \alpha A = A(\alpha E_n),\ \forall A \in K_{m,n},\ \forall \alpha \in K$.

7^0. $O_{p,m}A = O_{p,n},\ AO_{n,q} = O_{m,q},\ \forall A \in K_{m,n}$. В частности,

$$O_{n,n}A = AO_{n,n} = O_{n,n},\ \forall A \in K_{n,n}.$$

♦ Доказательство свойств 5^0 и 6^0 аналогично доказательству свойства 4^0.■

8^0. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B),\ \forall A \in K_{m,n},\ \forall B \in K_{n,l},\ \forall \alpha \in K$.

Доказательство следует из свойств 5^0 и 1^0.

Теорема 1.2. *Множество $K_{n,n}$ квадратных матриц порядка n над кольцом K относительно операций сложения и умножения матриц образует ассоциативное кольцо с единицей.*

♦ Из теоремы (1.1) следует, что $(K_{n,n}, +)$ является абелевой группой. Так как все матрицы из множества $K_{n,n}$ согласованы, то на этом множестве определена операция умножения. Дистрибутивность умножения относительно сложения и ассоциативность умножения матриц вытекают из свойств 3^0 и 2^0 соответственно. Свойство 4^0 констатирует наличие в $K_{n,n}$ единицы. ■

Рассмотрим теперь, как умножение матриц, разбитых на блоки, сводятся к операциям над блоками.

Пусть

$$0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_p = m, \tag{1.2}$$

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k = n, \tag{1.3}$$

$$0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_q = l \tag{1.4}$$

есть разбиения чисел m, n, l соответственно по этим разбиениям построим блочные разбиения $m \times n$-матрицы A и $n \times l$-матрицы B. Такое блочное разбиение матрицы A назовем согласованным с блочным разбиением матрицы B. В этом случае блок разбиения матрицы $C = AB$, соответствующего разбиениям (1.2) и (1.4) чисел m и l, равен сумме произведений всех блоков матрицы A, расположенных на соответствующих строках, на блоки матрицы B, расположенных на соответствующих столбцах.

Например, в частном случае, когда $p = k = q = 2$, имеет место следующее равенство:

$$AB=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right), \tag{1.5}$$

где $A_1 = A_{[1,m_1],[1,n_1]};\ B_1 = B_{[1,n_1],[1,l_1]}$ и т.д.

В самом деле, если $AB = C = (c_{ij})$, то для $1 \le i \le m_1,\ 1 \le j \le l_1$ справедливы равенства

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=n_1+1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \tag{1.6}$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n_1} a_{ik}b_{kj}$ – элемент матрицы A_1B_1, а $\sum\limits_{k=n_1+1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ – элемент матрицы A_2B_3, причем оба они расположены в этих матрицах на пересечении i-х строк и j-х столбцов, то из (1.6) следует, что

$$C_{[1,m_1],[1,l_1]} = A_1B_1 + A_2B_3.$$

С помощью таких же рассуждений приходим к остальным равенствам для блоков, указанных в (1.5).

1.4. Элементарные преобразования матриц

Пусть A – произвольная $m \times n$-матрица над кольцом K. Элементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицы A называют следующие операции:

1) умножение какой-либо, например i-й строки (столбца), на обратимый элемент α кольца K;

2) прибавление к одной, например i-й строке (столбцу) другой, например j-й строки (столбца), умноженной на элемент кольца K.

Если матрица B получена из матрицы A в результате последовательного применения нескольких элементарных преобразований строк (столбцов), то говорят, что матрица A эквивалентна матрице B, и пишут $A \sim B$.

Теорема 1.3. *Пусть матрица A получается из матрицы B в результате применения элементарного преобразования строк (столбцов). Тогда существует элементарная матрица T такая, что $TB = A$ (соответственно $BT = A$).*

♦ Пусть матрица $B \in K_{m,n}$ и T — элементарная матрица порядка m. Пусть k-я строка матрицы T не является строкой единичной матрицы, т.е. имеет вид:

1) $(0, 0, \ldots, \alpha, 0, \ldots, 0)$, $\alpha \neq 0$;

или

2) $(0, \ldots, 0, \alpha, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Так как k-я строка произведения TB получается умножением k-й строки матрицы T на столбцы матрицы B, то в случае 1) k-й элемент каждого столбца матрицы B умножается на α и остается на том же месте, а в случае 2) l-й элемент каждого столбца умножается на α и прибавляется к k-му элементу. Это означает, что к k-й строке матрицы B прибавляется l-я, умноженная на α. Получившаяся строка будет k-й в произведении TB. Наконец, j-я строка произведения TB, где $j \neq k$, получается путем умножения j-ой строки единичной матрицы на все столбцы матрицы B, т.е. имеем случай 1) при $\alpha = 1$, и, следовательно, j-я строка матрицы B становится j-й строкой матрицы TB. Итак, применение элементарного преобразования строк равносильно умножению слева на соответствующую элементарную матрицу.

Аналогичным образом показывается, что применение элементарного преобразования столбцов равносильно умножению справа на элементарную матрицу. ■

1.5. Транспонирование матриц

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K_{m,n}.$$

Рассмотрим матрицу

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K_{n,m},$$

которая получается из матрицы A следующим образом: j-й столбец матрицы A^T составляем из элементов j-й строки матрицы A, располагая их в том же порядке.

Операцию $A \mapsto A^T$ называют транспонированием, а матрицу A^T — транспонированной матрицей к матрице A.

Свойства операции транспонирования.

Для любых матриц $A, B \in K_{m,n}$ и любого элемента $\alpha \in K$ верны следующие соотношения:

1^0. $(A^T)^T = A$.

2^0. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

3^0. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Доказательство свойств $1^0 - 3^0$ предоставляется читателю.

4^0. Для любых матриц $A \in K_{m,n}$ и $B \in K_{n,l}$ имеет место равенство $(AB)^T = B^T A^T$.

♦ Пусть $A \in K_{m,n},\ B \in K_{n,l}$. Тогда $(AB)^T \in K_{l,m}$. Нетрудно видеть, что матрица $B^T A^T$ имеет те же размеры.

Пусть c'_{ij} — элемент матрицы $(AB)^T$, стоящий в i-й строке и j-м столбце. Этот элемент равен элементу c_{ji}, стоящему в j-й строке и i-м столбце матрицы AB, т.е. $c'_{ij} = c_{ji}$. Согласно правилу умножения матриц

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

где a_{jk} и b_{ki} — соответственно элементы матриц A и B. Так как $a_{jk} = a'_{kj},\ b_{ki} = b'_{ik}$ (a'_{kj} и b'_{ik} — соответственно элементы матриц A^T и B^T), то

$$c'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a'_{kj} b'_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj}.$$

Последнее выражение, представляющее собой сумму произведений элементов i-й строки матрицы B^T на соответствующие элементы j-го столбца матрицы A^T, является элементом матрицы $B^T A^T$, стоящим в i-й строке и j-м столбце. Таким образом, $(AB)^T = B^T A^T$.■

Для произведения трех матриц имеем

$$(ABC)^T = ((AB)C)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T.$$

Таким образом,

$$(ABC)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T.$$

Аналогично для l сомножителей

$$(A_1 A_2 \ldots A_l)^T = A_l^T \cdot A_{l-1}^T \cdot \ldots \cdot A_2^T \cdot A_1^T.$$

Определение 1.5. Если квадратная матрица A такова, что $A = A^T$, т. е. $a_{ij} = a_{ji},\ \forall i, j$, то такая матрица называется симметрической.

Определение 1.6. Если же $A = -A^T$, то матрица A называется кососимметрической (антисимметрической).

Теорема 1.4. *Любая квадратная матрица A порядка n представлена в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.*

♦ Матрицу $A = (a_{ij})$ можно представить в виде суммы двух матриц: $A_1 = \left(\dfrac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right)$ и $A_2 = \left(\dfrac{a_{ij}-a_{ji}}{2}\right)$. Матрица A_1 является симметрической, а матрица A_2 — кососимметрической. ■

1.6. Перестановки

Пусть M — некоторое непустое множество, состоящее из n элементов.

Определение 1.7. Конечная последовательность длины n, составленная из различных элементов множества M, называется перестановкой множества M.

Пронумеруем элементы множества M с помощью чисел

$$1, 2, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Тогда любой перестановке элементов множества M будет соответствовать перестановка чисел (1.7). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать лишь перестановки множества (1.7). Множество всех таких перестановок обозначим P_n.

Теорема 1.5. *Множество P_n состоит ровно из $n!$ элементов.*

♦ Действительно, для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для любого множества из $n-1$ чисел. Все перестановки из n чисел можно разбить на n классов, помещая в один класс лишь те перестановки, которые на первом месте имеют одно и то же число. Число перестановок в каждом классе совпадает с числом перестановок из $n-1$ чисел, т. е. равно $(n-1)!$. Следовательно, число всех перестановок из n чисел равно $n!$.■

Говорят, что в данной перестановке числа i, j образуют инверсию, если $i > j$, но i стоит в перестановке раньше j.

Число инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ будем обозначать $\nu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Перестановку назовем четной, если ее числа составляют четное количество инверсий, и нечетной в противном случае. Если в некоторой перестановке поменяем местами какие-либо два числа, не обязательно стоящие рядом, а все остальные оставим на месте, то получим новую перестановку. Это преобразование перестановки называется транспозицией.

Теорема 1.6. *Всякая транспозиция меняет четность перестановки на противоположную.*

♦ Для чисел, стоящих рядом, это утверждение очевидно. Их взаимное расположение относительно других- чисел осталось прежним, а перестановка самих чисел меняет общее число инверсий на единицу. Пусть теперь между переставляемыми числами i и j находятся s других чисел $k_1, k_2, \ldots, k_s$, т. е. перестановка имеет вид

$$(\ldots, i, k_1, k_2, \ldots, k_s, j, \ldots).$$

Будем менять местами число i последовательно с рядом стоящими числами $k_1, k_2, \ldots, k_s, j$. Затем число j, стоящее уже перед i, переместим влево при помощи s транспозиций с числами $k_s, k_{s-1}, \ldots, k_1$. Таким образом, всего выполним $2s+1$ транспозиций рядом стоящих чисел. Следовательно, четность перестановки изменится на противоположную.■

Теорема 1.7. *Все $n!$ перестановок из n, $n \geq 2$, чисел можно расположить в таком порядке, что каждая следующая будет получаться из предыдущей при помощи одной транспозиции, причем начинать можно с любой перестановки.*

♦ Это утверждение справедливо при $n = 2$. Если требуется начинать с перестановки $(1, 2)$, то искомое расположение будет $(1, 2)$, $(2, 1)$; если же начинаем с перестановки $(2, 1)$, то искомое расположение будет $(2, 1)$, $(1, 2)$.

Предположим, что теорема уже доказана для любых перестановок, содержащих не более $n-1$ чисел. Рассмотрим перестановки из n чисел. Пусть необходимо начать с перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Расположение перестановок будем осуществлять по следующему принципу. Начнем с перестановок, у которых на первом месте стоит число i_1. Согласно предположению, эти перестановки можно упорядочить в соответствии с требованиями теоремы, так как фактически необходимо расположить в нужном порядке все перестановки из $n-1$ чисел.

В последней полученной таким путем перестановке произведем одну транспозицию, переставив на первое место число i_2. Далее упорядочим, как и в предыдущем случае, все перестановки, у которых на первом месте стоит данное число, и.т.д. Этим способом можно перебрать все перестановки из n чисел.■

Следствие 1.1. Число четных перестановок из n чисел равно числу нечетных перестановок из этих чисел и равно $\dfrac{n!}{2}$.

1.7. Определитель и его свойства

Пусть K — ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей и $n \in N$. Рассмотрим произвольную квадратную матрицу порядка n над кольцом K :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

С каждой такой матрицей свяжем вполне определенный элемент кольца K, называемый определителем данной матрицы. С этой целью рассмотрим все произведения элементов матрицы, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца. Любое такое произведение будет содержать n сомножителей и может быть записано в виде

$$a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_n\beta_n}, \tag{1.8}$$

где $\alpha_i \neq \alpha_j$, $\beta_i \neq \beta_j$, если $i \neq j$. Умножив каждое из произведений (1.8) на $(-1)^{\nu(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\nu(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$, получим произведения вида

$$(-1)^{\nu(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\nu(\beta_1,\ldots,\beta_n)} a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \ldots a_{\alpha_n\beta_n}. \tag{1.9}$$

Выражение (1.9) называется членом определителя матрицы A.

Преобразуем выражение (1.9). Для удобства, использовав коммутативность кольца K, сомножители в (1.9) расположим так, чтобы первые индексы (номера строк) следовали в порядке возрастания, т. е. перейдем к выражению

$$(-1)^{\nu(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \ldots a_{n\gamma_n}. \tag{1.10}$$

Элементы (1.9) и (1.10) равны между собой, так как перемена местами двух сомножителей $a_{\alpha_i\beta_i}$ и $a_{\alpha_j\beta_j}$ в члене определителя изменяет четность в перестановках $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_j, \ldots, \beta_n)$ одновременно, и, следовательно, четность суммы чисел инверсий этих перестановок не изменяется.

Поэтому в дальнейшем будем оперировать как членами определителя вида (1.9), так и членами определителя вида (1.10).

Определение 1.8. Определителем матрицы A называется элемент кольца K, равный сумме $n!$ членов определителя этой матрицы, т. е. равный

$$\sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m)\in P_n}(-1)^{\nu(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)}a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\ldots a_{n\gamma_n},$$

где сумма берется по всем различным перестановкам $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ из n чисел.

Употребляются следующие обозначения определителя матрицы $A=(a_{ij})$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ |A|,\ \det A,\ \Delta.$$

Иногда определитель называют детерминантом.

Таким образом, по определению,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)\in P_n}(-1)^{\nu(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)}a_{1\gamma_1}\ldots a_{n\gamma_n}. \qquad (1.11)$$

Укажем, что обозначение определителя матрицы A в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

несет большую функциональную нагрузку. Элементы, строки, столбцы, диагонали и порядок матрицы A называются также соответственно элементами, строками, столбцами, диагоналями и порядком определителя этой же матрицы.

Вычислим определитель матрицы A в случае, когда $n=1,2,3$.

Для $n=1$ имеем $\det A=|a_{11}|=a_{11}$.

Для $n=2$ получаем $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^{\nu(1,2)}a_{11}a_{22}+(-1)^{\nu(2,1)}a_{12}a_{21}=$ $=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Для $n=3$ имеем $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{\nu(1,2,3)}a_{11}a_{22}a_{33}+$
$+(-1)^{\nu(2,3,1)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\nu(3,1,2)}a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^{\nu(3,2,1)}a_{13}a_{22}a_{31}+$
$+(-1)^{\nu(1,3,2)}a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^{\nu(2,1,3)}a_{12}a_{21}a_{33}=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-$
$-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$.

Замечание 1.1. Как видно из формулы вычисления определителя третьего порядка, этот определитель равен сумме шести слагаемых: трех слагаемых, у которых знак сохраняется, и трех слагаемых, у которых знак меняется на противоположный. Поэтому укажем схему вычисления определителя третьего порядка, которая называется правилом треугольников или правилом Саррюса.

Отметим элементы определителя точками (см. рис.):

Тогда три слагаемых со знаком плюс представляют собой произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников, у которых одна из сторон параллельна главной диагонали, а три слагаемых со знаком минус вычисляются аналогично, только за основу берется побочная диагональ.

Для некоторых $n \times n$-матриц специального вида можно вычислить их определители, исходя из определения.

1. Определитель единичной матрицы:

$$\det E_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Определитель диагональной матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

3. Определители элементарных матриц:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \alpha,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \dots 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 & \dots & \beta & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

4. Определители верхней и нижней треугольных матриц:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Таким образом, определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Вычисление определителей при помощи только формулы (1.11) связано со значительными вычислительными трудностями. Например, уже при вычислении определителя пятого порядка пришлось бы искать 120 его членов. Поэтому для вычисления определителей применяют другие приемы, основанные, например, на свойствах определителей.

Свойства определителей.

1^0. $\det A = \det A^T$ (свойство инвариантности).

♦ Пусть $A = (a'_{ij})$, а $A^T = (a_{ij})$. Так как $\det A$ и $\det A^T$ имеют равное число членов $(n!)$, то достаточно показать, что любой член $\det A$ является членом $\det A^T$ и наоборот.

Пусть
$$(-1)^{\nu(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+\nu(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\dots a_{\alpha_n\beta_n}$$
есть какой-либо член $\det A$. Рассмотрим произведение
$$(-1)^{\nu(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)+\nu(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a'_{\beta_1\alpha_1}a'_{\beta_2\alpha_2}\dots a'_{\beta_n\alpha_n},$$
которое является членом $\det A^T$. В силу того, что $a_{ij} = a'_{ji}$, имеем
$$(-1)^{\nu(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+\nu(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_1\beta_2}\dots a_{\alpha_n\beta_n} =$$
$$= (-1)^{\nu(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)+\nu(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a'_{\beta_1\alpha_1}a'_{\beta_2\alpha_2}\dots a'_{\beta_n\alpha_n}. \blacksquare$$

2^0. Если матрица B получена из матрицы A умножением некоторой строки на элемент a кольца K, то $\det B = a\det A$.

♦ Действительно,

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ aa_{i1} & aa_{i2} & \dots & aa_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$
$$= \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\in P_n} (-1)^{\nu(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)}a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\dots aa_{i\gamma_i}a_{i+1,\gamma_{i+1}}\dots a_{n\gamma_n} =$$
$$= a\sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\in P_n} (-1)^{\nu(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)}a_{1\gamma_1}\dots a_{i\gamma_i}\dots a_{n\gamma_n} = a\det A.$$

■

3^0. Определитель с нулевой строкой равен нулю.

♦ Положив в предыдущем свойстве $a = 0$, получим требуемое. ■

4^0. Если матрица B получается из матрицы A перестановкой двух каких-либо ее строк, то $\det B = -\det A$.

♦ Пусть матрица B получена из матрицы A перестановкой двух рядом стоящих строк с номерами a и $a+1$.

Тогда

$$\det A = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)\in P_n} (-1)^{\nu(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \ldots a_{\alpha\gamma_\alpha} a_{\alpha+1,\gamma_{\alpha+1}} \ldots a_{n\gamma_n},$$

$$\det B = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{\alpha-1},\beta_\alpha,\beta_{\alpha+1},\ldots,\gamma_n)\in P_n} (-1)^{\nu(\gamma_1,\ldots,\gamma_{\alpha-1},\beta_\alpha,\beta_{\alpha+1},\ldots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1} \ldots a_{\alpha-1,\gamma_{\alpha-1}} b_{\alpha\beta_\alpha} b_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}} \ldots a_{n\gamma_n},$$

где $\beta_\alpha = \gamma_{\alpha+1}$; $\beta_{\alpha+1} = \gamma_\alpha$; $b_{\alpha,\gamma_{\alpha+1}} = a_{\alpha+1,\gamma_{\alpha+1}}$; $b_{\alpha+1,\gamma_\alpha} = a_{\alpha\gamma_\alpha}$.

Так как перестановка $(\gamma,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$ после транспозиции чисел γ_α и $\gamma_{\alpha+1}$ дает перестановку $(\gamma_1,\ldots,\gamma_{\alpha-1},\gamma_{\alpha+1},\gamma_\alpha,\ldots,\gamma_n)$, и эти перестановки имеют разный характер четности, то члены этих определителей $\det A$ и $\det B$ отличаются только знаками и, следовательно, $\det B = -\det A$.

Пусть матрица B получена из матрицы A перестановкой i-ой и j-ой строк, между которыми содержится m строк. Ясно, что i-ю строку можно поместить на j-е место, а j-ю строку – на i-е место путем последовательной перестановки $2m+1$ раз стоящих рядом строк. Поэтому $\det B = (-1)^{2m+1}\det A = -\det A$.■

5^0. Определитель, содержащий две одинаковые строки равен нулю.

♦ Пусть i-я и j-я строки матрицы A совпадают, $\det A$ есть сумма всех членов вида (1.10), в каждой из которых входят элементы i-ой и j-ой строк. Пусть

$$(-1)^{\nu(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1} \ldots a_{i\gamma_i} \ldots a_{j\gamma_j} \ldots a_{n\gamma_n} \tag{1.12}$$

– один из таких членов. Поскольку сумма берется по всем перестановкам из номеров столбцов, то член (1.12), который соответствует перестановке $(\gamma_1,\ldots,\gamma_i,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)$, можно сопоставить с членом

$$(-1)^{\nu(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_i,\ldots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1} \ldots a_{i\gamma_j} \ldots a_{j\gamma_i} \ldots a_{n\gamma_n} \tag{1.13}$$

соответствующим перестановке $(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_i,\ldots,\gamma_n)$, получаемой из исходной транспозицией i-го и j-го элементов. Если к новой перестановке применить такую же транспозицию, то получим исходную перестановку. Следовательно, множество всех членов определителя разбивается на пары членов вида (1.12) и (1.13), сопоставляемых друг с другом. Так как $a_{i\gamma_j} = a_{j\gamma_j}$, $a_{j\gamma_i} = a_{i\gamma_i}$, то сопоставленные члены отличаются только знаками, и поэтому их сумма равна нулю. Таким образом, все $n!$ члены определителя разбиваются на пары и сумма членов, входящих в одну пару, равна нулю. Следовательно, $\det A = 0$.■

6^0. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

♦ Вынося за знак определителя общий множитель элементов одной из строк, получаем определитель, у которого две одинаковые строки. Последний определитель равен нулю в силу свойства 5^0.■

7^0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \dots & a'_{in}+a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

♦ $$\Delta = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\in P_n} (-1)^{\nu(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1}\dots(a'_{i\gamma_i}+a''_{i\gamma_i})\dots a_{n\gamma_n} =$$
$$= \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\in P_n} (-1)^{\nu(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1}\dots a'_{i\gamma_i}\dots a_{n\gamma_n} +$$
$$+ \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\in P_n} (-1)^{\nu(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)} a_{1\gamma_1}\dots a''_{i\gamma_i}\dots a_{n\gamma_n}. \quad ■$$

8^0. Определитель не изменится, если к одной строке определителя прибавить другую строку этого же определителя, умноженную на произвольный элемент кольца K.

♦ Новый определитель Δ_1 есть сумма двух слагаемых: исходного определителя Δ и определителя с пропорциональными строками. Последний равен нулю, поэтому $\Delta_1 = \Delta$.■

9^0. Если матрица B получена из матрицы A прибавлением к некоторой ее строке других строк, умноженных на элементы кольца K, то $\det B = \det A$.

♦ Доказательство этого свойства аналогично доказательству свойства 8^0.■

10^0. Если какая-нибудь строка матрицы A равна сумме произведений других ее строк на элементы кольца K, то определитель этой матрицы равен нулю.

Отметим, что применение указанных выше простейших свойств определителей облегчает их вычисление.

1.8. Миноры и алгебраические дополнения

Рассмотрим $m \times n$-матрицу $A \in K_{m,n}$. Выберем в ней произвольно k строк и k столбцов, причем каждая строка и каждый столбец выбираются лишь один раз. Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, составляют матрицу k-го порядка. Определитель M этой матрицы называется минором k-го порядка матрицы A.

Если A – квадратная матрица порядка n и $k < n$, то элементы, расположенные на пересечении остальных строк и столбцов, образуют матрицу $(n-k)$-го порядка. Определитель M' полученной матрицы называется дополнительным минором к минору M. Ясно, что минор M будет в свою очередь дополнительным к минору M'.

Миноры квадратной матрицы называют также минорами ее определителя.

Алгебраическим дополнением минора M называется дополнительный к нему минор M', умноженный на $(-1)^s$, где s – сумма тех номеров строк и столбцов матрицы A, на которых расположена матрица минора M. Обозначим алгебраическое дополнение минора M через M''. Тогда $M'' = (-1)^s M'$.

Каждый элемент a_{ij} $n \times n$-матрицы A можно рассматривать как ее минор первого порядка. Дополнительный к нему минор (при $n > 1$) есть определитель $(n-1)$-го порядка. Его обозначим M_{ij}, а алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначим A_{ij}. Тогда $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

1.9. Теорема Лапласа

Теорема 1.8 (теорема Лапласа). *Пусть A — квадратная матрица n-го порядка над кольцом K, $n > 1$. Выделим в матрице A любые k строк (столбцов), где $1 \leq k < n$. Определитель матрицы A равен сумме произведений всех миноров k-го порядка, расположенных на выделенных k строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.*

Теорема Лапласа позволяет сводить вычисление определителя к вычислению определителей меньших порядков.

Рассмотрим блочно-диагональную матрицу вида

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & O_{k,n-k} \\ \hline D & C \end{array}\right].$$

Разлагая определитель матрицы A по первым k строкам, находим, что единственным минором k-го порядка, который расположен на этих строках и может быть не равен нулю, является $\det B$. Поэтому

$$\det A = (\det B)(-1)^{2(1+2+\ldots+k)} \det C = (\det B)(\det C).$$

Применяя далее индукцию по числу блоков на диагонали, приходим к следствию из теоремы Лапласа.

Следствие 1.2. Определитель блочно-треугольной матрицы равен произведению определителей ее диагональных блоков.

Другое важное следствие получается как частный случай теоремы Лапласа при $k = 1$. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 1.9 (теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца). *Пусть A есть $n \times n$-матрица над кольцом K и $n > 1$. Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраическое дополнение, т. е.*

$$\det A = a_{j1}A_{j1} + \ldots + a_{jn}A_{jn},\ \forall j,\ 1 \leq j \leq n,$$

$$\det A = a_{1l}A_{1l} + \ldots + a_{nl}A_{nl},\ \forall l,\ 1 \leq l \leq n.$$

Замечание 1.2.В частности, если все элементы j-й строки (l-го столбца) равны нулю, кроме $a_{jl},\ 1 \leq l \leq n$, то

$$\det A = a_{jl}(-1)^{j+l}A_{jl}. \tag{1.14}$$

Лемма 1.1. *Пусть A есть $n\times n$-матрица над кольцом K, $n>1$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n \in K$. Сумма произведений элементов $b_1, \ldots, b_n$ на алгебраические дополнения соответствующих элементов какой-нибудь строки (столбца) матрицы A равна определителю матрицы B, которая получается из матрицы A путем замены указанной строки (столбца) на строку (столбец), составленную из элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$.*

♦Пусть j — номер выбранной строки матрицы A. После замены элементов $a_{j1}, \ldots, a_{jn}$ j-й строки матрицы A на соответствующие элементы $b_1, \ldots, b_n$ алгебраические дополнения, как нетрудно видеть, остались прежними. Поэтому согласно теореме 1.9

$$b_1 A_{j1} + b_2 A_{j2} + \ldots + b_n A_{jn} = \det B. \blacksquare$$

Лемма 1.2. *Сумма произведений всех элементов какой-нибудь строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.*

♦Пусть дана $n \times n$-матрица $A = (a_{ij})$. Докажем, что

$$a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \ldots + a_{in} A_{jn} = 0,$$

$$1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ i \neq j.$$

На основании леммы 1.1 сумма $a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \ldots + a_{in} A_{jn}$ есть определитель матрицы B, полученной из матрицы A путем замены элементов j-й строки элементами $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. Следовательно, матрица B имеет одинаковые строки, и поэтому $\det B = 0$, т. е.

$$\det B = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \ldots + a_{in} A_{jn} = 0.$$

Аналогично доказывается утверждение для столбцов. ■

Из теоремы 1.9 и леммы 1.2 получаем следующие равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \det A, \tag{1.15}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

1.10. Определитель произведения матриц

Теорема 1.10. *Определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка над кольцом K равен произведению определителей этих матриц.*

♦ Пусть A и B — две квадратные матрицы n-го порядка над кольцом K. Докажем, что

$$\det(AB) = (\det A)(\det B). \tag{1.16}$$

Рассмотрим матрицу D порядка $2n$:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} A & O_{n,n} \\ \hline -E_n & B \end{array} \right).$$

С одной стороны, на основании следствия 1.2, имеем

$$\det D = (\det A)(\det B). \tag{1.17}$$

С другой стороны, преобразуем матрицу D так, чтобы на месте, занимаемом матрицей A, появилась нулевая матрица. Пусть $C = (c_{ij}) = AB$. К первой строке матрицы D прибавим $(n+1)$-ю строку, умноженную на a_{11}, $(n+2)$-ю, умноженную на

$a_{12}, \ldots,$ последнюю, умноженную на a_{1n}. Тогда в полученной матрице первые n элементов первой строки будут нулевыми, а другие n элементов этой строки будут такими: $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}$. Аналогичным образом поступаем со второй строкой и т. д. К i-й строке, $1 \le i \le n$, прибавим $(n+1)$-ю, умноженную на a_{i1}, $(n+2)$-ю, умноженную на $a_{i2}, \ldots,$ последнюю, умноженную на a_{in}. Тогда i-я строка примет вид

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n},\ c_{i1}, c_{i2} \ldots, c_{1n}.$$

После этих преобразований получим матрицу

$$D' = \left(\begin{array}{c|c} O_{n,n} & C \\ \hline -E_n & B \end{array} \right).$$

Используя свойство 9^0 определителей, равенство (1.17) и теорему Лапласа, имеем

$$(\det A)(\det B) = \det D = \det D' = (\det C)(-1)^{1+2+\ldots+n+\ldots+2n} \det(-E_n) =$$

$$= (\det C)(-1)^{\frac{2n+1}{2}2n}(-1)^n = (\det C)(-1)^{2n^2+2n} = \det C = \det(AB).$$

Следовательно, равенство (1.16) доказано. ■

Отметим, что теорема 1.10 справедлива и для произведения любого конечного числа квадратных матриц одного порядка.

1.11. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица порядка n над полем P.

Матрица $X \in P_{n,n}$ называется обратной к матрице A, если

$$AX = XA = E_n. \tag{1.18}$$

Обратная матрица к матрице A обозначается A^{-1}. Из равенств (1.18) имеем

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n. \tag{1.19}$$

Квадратная матрица называется невырожденной (или неособенной), если ее определитель отличен от нуля, и вырожденной (или особенной) в противном случае.

Из теоремы 1.10 следует, что произведение матриц, хотя бы одна из которых вырожденная, будет вырожденной матрицей, а произведение любых невырожденных матриц – невырожденной матрицей.

Теорема 1.11 (теорема единственности обратной матрицы). *Если для матрицы A существует обратная матрица, то она единственна.*

♦ Пусть для матрицы A существуют две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1}. Найдем произведение $A_1^{-1}AA_2^{-1}$.

С одной стороны, имеем

$$A_1^{-1}AA_2^{-1} = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = E_nA_2^{-1} = A_2^{-1},$$

ибо A_1^{-1} — обратная матрица для матрицы A.

С другой стороны, учитывая, что A_2^{-1} — обратная матрица для матрицы A, получаем

$$A_1^{-1}AA_2^{-1} = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = A_1^{-1}E_n = A_1^{-1}.$$

Отсюда следует, что $A_2^{-1} = A_1^{-1}$.■

Матрицей, присоединенной к матрице A, называется матрица

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Лемма 1.3. *Для матрицы A и присоединенной к ней матрицы B выполняются равенства*

$$AB = BA = (\det A)E_n. \tag{1.20}$$

♦ Пусть $C = (c_{ij}) = AB$. Тогда из определения произведений матриц и соотношений (1.15) имеем

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}\det A,$$

т. е. $c_{ii} = \det A,\ i = \overline{1,n};\ c_{ij} = 0,\ i,j = \overline{1,n},\ i \neq j$. Таким образом,

$$AB = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = (\det A)E_n.$$

Аналогично доказывается, что $BA = (\det A)E_n$.■

Теорема 1.12 (теорема существования обратной матрицы). *Для того чтобы для матрицы A существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.*

♦ Необходимость. Пусть для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Тогда из (1.19), ввиду теоремы 1.10, получаем

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E_n \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0.$$

Достаточность. Пусть $\det A \neq 0$, т. е. A — невырожденная матрица. Докажем, что $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}B$, где B — присоединенная матрица к матрице A. Действительно, из равенств (1.20) следует, что

$$\frac{1}{\det A}AB = \frac{1}{\det A}BA = E_n$$

или

$$A\left(\frac{1}{\det A}B\right) = \left(\frac{1}{\det A}B\right)A = E_n.$$

Последние равенства говорят о том. что матрица $\dfrac{1}{\det A}B$ является обратной к матрице A.■

Свойства обратных матриц.

Пусть A и B — невырожденные матрицы порядка n над полем P. Тогда справедливы следующие равенства.

1^0. $(A^{-1})^{-1} = A$.

2^0. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

3^0. $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$, $\forall k \in N$.

4^0. $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

Доказательство свойств $1^0 - 4^0$ предоставляется читателю.

5^0. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

♦ $E_n = AA^{-1} = AE_nA^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1})$. Аналогично, $E_n = (B^{-1}A^{-1})(AB)$. Из этих равенств и определения обратной матрицы имеем $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.■

ПРИМЕРЫ

Пример 1.1. Найти матрицу X, удовлетворяющую равенству $3X - 2B = A$, где

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -9 \\ 1 & -6 & 6 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Исходя из свойств линейных операций над матрицами, равенство $3X - 2B = A$ равносильно равенству $X = \dfrac{1}{3}(2B + A)$. Таким образом,

$$X = \frac{1}{3}\left(2\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 & -9 \\ 1 & -6 & 6 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 2\cdot 3 & (-2)\cdot 2 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 7 & 2\cdot 2 & 2\cdot(-3) \end{bmatrix} +\right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 3 & -5 & -9 \\ 1 & -6 & 6 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6+3 & -4-5 & 12-9 \\ 8+1 & 6-6 & 12+6 \\ 14+1 & 4-1 & -6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.2. Перемножить матрицы

$$A\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ -5 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Произведение AB имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Поэтому

$$AB = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 & (-1)\cdot 7 + 1\cdot(-2) + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 2 + 6\cdot 3 & 0\cdot 7 + 4\cdot(-2) + 6\cdot 0 \\ (-5)\cdot 1 + (-2)2 + (-1)\cdot 3 & (-5)\cdot 7 + (-2)(-2) + (-1)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 26 & -8 \\ -12 & -31 \end{bmatrix}.$$

Произведение BA не имеет смысла, так как число столбцов матрицы B (два) не равно числу строк матрицы A (три).

Пример 1.3.Пусть матрицы A и B представлены в виде блочных разбиений следующим образом:

$$A = \left[\begin{array}{r|rr} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline -6 & 0 & 3 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

или

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right], \quad B \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right],$$

где $A_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\quad A_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\quad A_3 = [-6]$; $\quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$;

$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\quad B_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Нетрудно видеть, что блочное разбиение матрицы A согласовано с блочным разбиением матрицы B. Тогда на основании равенства (1.5) имеем

$$AB = \left[\begin{array}{rr|rr} 2 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ \hline -3 & -12 & 0 & -6 \end{array}\right].$$

Пример 1.4.Вычислить $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$, использовав равенство

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Поскольку матрицы $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ таковы, что выполняется равенство $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, постольку

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 3^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 243 \end{bmatrix},$$

окончательно имеем

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 243 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & 729 \\ 160 & 1701 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.5.Вычислить $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 3x + 1,\ A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е. Подставляя в многочлен $f(x)$ вместо x матрицу A и учитывая, что $1 = 1 \cdot x^0$, получаем

$$f(A) = A^2 - 3A + E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 3i \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.6.В следующей перестановке определить число инверсий: $(5n, 5n-5, \ldots, 10, 5, 5n-1, 5n-6, \ldots, 9, 4, 5n-2, 5n-3, \ldots, 8, 3, 5n-3, 5n-8, \ldots, 7, 2, 5n-4, 5n-9, \ldots, 6, 1)$.

Р е ш е н и е. Очевидно, что исходная перестановка состоит из пяти подпоследовательностей: 1) $(5n, 5n-5, \ldots, 10, 5)$; 2) $(5n-1, 5n-6, \ldots, 9, 4)$;
3) $(5n-2, 5n-7, \ldots, 8, 3)$; 4) $(5n-3, 5n-8, \ldots, 7, 2)$; 5) $(5n-4, 5n-9, \ldots, 6, 1)$.

В каждой из указанных подпоследовательностей имеется $\dfrac{n(n-1)}{2}$ инверсий. Следовательно, всего таких инверсий $\dfrac{5n(n-1)}{2}$. Далее, нетрудно видеть, что числа из подпоследовательности $(5n-4, 5n-9, \ldots, 6, 1)$ не образуют инверсий по отношению к числам остальных подпоследовательностей . В то же время числа из подпоследовательности $(5n-3, 5n-8, \ldots, 7, 2)$ по отношению к числам подпоследовательности $(5n-4, 5n-9, \ldots, 6, 1)$ образуют $\dfrac{n(n+1)}{2}$ инверсий; числа подпоследовательности $(5n-2, 5n-7, \ldots, 8, 3)$ по отношению к числам подпоследовательностей $(5n-3, 5n-8, \ldots, 7, 2); (5n-4, 5n-9, \ldots, 6, 1)$ образуют $\dfrac{2n(n+1)}{2}$ инверсий; и т. д. Наконец, числа подпоследовательности $(5n, 5n-5, \ldots, 10, 5)$ по отношению к числам всех остальных последовательностей образуют $\dfrac{4n(n+1)}{2}$ инверсий. Итак, общее число инверсий в исходной перестановке равно $\dfrac{5n(n-1)}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{2n(n+1)}{2} + \dfrac{3n(n+1)}{2} + \dfrac{4n(n+1)}{2} = \dfrac{5n(3n+1)}{2}$.

Пример 1.7.Определить четность перестановки (4,3,1,8,5,2,7,6,9) и посредством применения транспозиций определить четность перестановки (9,8,7,6,5,3,1,2,4).

Р е ш е н и е. Ясно, что ν (4,3,1,8,5,2,7,6,9)=3+2+0+4+1+0+1+0=11. Следовательно, первая перестановка является нечетной. От этой перестановки перейдем ко второй перестановке посредством применения ряда транспозиций:

$$(4, 3, 1, 8, 5, 2, 7, 6, 9) \to (9, 3, 1, 8, 5, 2, 7, 6, 4) \to (9, 8, 1, 3, 5, 2, 7, 6, 4) \to$$

$$\to (9, 8, 7, 3, 5, 2, 1, 6, 4) \to (9, 8, 7, 6, 5, 2, 1, 3, 4) \to (9, 8, 7, 6, 5, 3, 1, 2, 4).$$

Итак, вторая перестановка получается из первой при помощи пяти транспозиций. Но так как всякая транспозиция изменяет четность перестановки на противоположную, то вторая перестановка является четной.

Пример 1.8.Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 9 & 9 & 13 & 13 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Если воспользоваться разложением определителя по элементам какой-либо строки или столбца, то его вычисление сведется к вычислению четырех определителей третьего порядка. В то же время, использовав свойства определителей, можно преобразовать исходный определитель так, чтобы все элементы некоторой строки или столбца за исключением, быть может, одного, были равны нулю. Затем от вычисления определителя четвертого порядка перейдем к вычислению лишь одного определителя третьего порядка. Для этого из первой строки вычтем вторую, а затем ко второй строке прибавим полученную первую строку, умноженную на -2, к третьей строке — полученную первую, умноженную на -9, к четвертой строке — полученную первую, умноженную на -4. В результате исходный определитель будет равен определителю

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -6 & -11 \\ 0 & 21 & 16 & 28 \\ 0 & 81 & 67 & 112 \\ 0 & 36 & 29 & 50 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по первому столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 21 & 16 & 28 \\ 81 & 67 & 112 \\ 36 & 29 & 50 \end{vmatrix}.$$

Итак, от определителя четвертого порядка перешли к определителю третьего порядка, который можно вычислить таким образом, как и исходный. Умножив первую строку на -4 и прибавив ее ко второй, а затем прибавив второй столбец к первому, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 37 & 16 & 28 \\ 0 & 3 & 0 \\ 65 & 29 & 50 \end{vmatrix}.$$

Разлагая последний определитель по второй строке, имеем

$$\Delta = 3 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 37 & 28 \\ 65 & 50 \end{vmatrix} = 3(1850 - 1820) = 90.$$

Пример 1.9.Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 6 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Вычислим этот определитель, разложив его по каким-либо k ($1 \leq$ $\leq k < 5$) строкам, т. е. воспользуемся теоремой Лапласа. Данная теорема позволяет свести вычисление исходного определителя к вычислению определителей меньших порядков. Ею удобно пользоваться тогда, когда в определителе имеются равные нулю миноры. В этом случае при вычислении определителя необходимо выделять те k строк или столбцов, которые содержат наибольшее число миноров k-го порядка равных нулю. Исходя их этого, преобразуем исходный определитель следующим образом. Из первой строки вычитаем сумму четвертой и пятой строк , а из второй — сумму третьей и четвертой строк. Получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Используя первую и вторую строку, по теореме Лапласа имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 19 = -57.$$

Метод вычисления определителей с числовыми элементами, состоящий в обращении в нуль элементов строки (столбца) или нескольких строк (столбцов) и последующим понижением порядка определителя, становится весьма громоздким в случае определителей с буквенными или числовыми элементами, но с произвольным порядком n. Общего метода для вычисления таких определителей не существует (если не считать выражения определителя, данного в его определении). К определителям того или иного специального вида применяются различные методы вычисления, приводящие к выражениям более простым (т. е. требующие меньшее число операций), чем выражение определителя по определению. В последующих примерах укажем наиболее употребительные из таких методов.

Пример 1.10.Вычислить определитель порядка n

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

Р е ш е н и е. Для вычисления этого определителя воспользуемся методом приведения его к треугольному виду. Метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, где все элементы, лежащие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Полученный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Прибавляя в определителе Δ первую строку ко всем остальным строкам, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!.$$

Пример 1.11.Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. На примере продемонстрируем метод вычисления определителей, получивший название метода рекуррентных соотношений. Разложив определитель Δ_n по элементам первой строки, получим

$$\Delta_n = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Первый определитель имеет такой же вид, как и исходный определитель Δ_n, но на единицу меньшего порядка, значит, его можно записать так: Δ_{n-1}. Далее, если второй определитель разложить по элементам первого столбца, то получим определитель такого же вида, как и исходный, но на две единицы меньшего порядка, т. е. Δ_{n-2}. В итоге имеем соотношение $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$, связывающее данный определитель порядка n с определителем такой же структуры, но порядков $n-1$ и $n-2$. Соотношения этого типа носят название рекуррентных. В общем случае рекуррентное соотношение связывает n-й член какой-то последовательности через некоторое число ее предыдущих членов. В нашем случае членами такой последовательности являются определители. Найдем несколько ее первых членов:

$$\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Заметим, что значение каждого из вышеперечисленных определителей есть число, на единицу большее индекса. Поэтому естественно предположить, что $\Delta_k = k+1$, $\forall k \in N$. Для доказательства этого утверждения воспользуемся методом математической индукции. Для $k = 1, 2$ это утверждение верно. Допустим, что $\Delta_k = k+1$ справедливо для всех k, $k \le n-1 (n \ge 2)$. Покажем, что оно справедливо и для $k = n$. Подставим значение определителей Δ_{n-1}, Δ_{n-2} в рекуррентную формулу:

$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} = 2(n-1+1) - (n-2+1) = 2n - n + 1 = n+1$. Итак, полученная формула справедлива для любого k, следовательно, $\Delta_n = n+1$.

Вообще говоря, в методе рекуррентных соотношений можно обойтись и без угадывания формулы для Δ_n. Разберем частный случай, где рекуррентное соотношение дает алгоритм для решения задачи, который исключает элемент догадки, имеющийся в общем случае. Пусть рекуррентное соотношение имеет вид

$$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} + \beta\Delta_{n-2}, \tag{1.21}$$

где α, β — постоянные, т. е. независящие от величины n. По элементам α и β определим величины x_1 и x_2 как корни квадратного уравнения: $x^2 - \alpha x - \beta = 0$. Тогда $x_1 + x_2 = \alpha$, $x_1 x_2 = -\beta$ и равенство (1.21) можно переписать в виде

$$\Delta_n - x_2\Delta_{n-1} = x_1(\Delta_{n-1} - x_2\Delta_{n-2}) \tag{1.22}$$

или

$$\Delta_n - x_1\Delta_{n-1} = x_2(\Delta_{n-1} - x_1\Delta_{n-2}). \tag{1.23}$$

Предположим сначала, что $x_1 \neq x_2$. По формуле для $(n-1)$-го члена геометрической прогрессии из равенств (1.22) и (1.23) находим $\Delta_n - x_2\Delta_{n-1} = x_1^{n-2}(\Delta_2 - x_2\Delta_1)$ и $\Delta_n - x_1\Delta_{n-1} = x_2^{n-2}(\Delta_2 - x_1\Delta_1)$. Откуда $\Delta_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$, где $c_1 = \dfrac{\Delta_2 - x_2\Delta_1}{x_1(x_1 - x_2)}$; $c_2 = \dfrac{\Delta_2 - x_1\Delta_1}{x_2(x_2 - x_1)}$. Если же $x_1 = x_2$, то нетрудно показать, что $\Delta_n = x_1^{n-1}\Delta_1 + x_1^{n-2}(n-1)(\Delta_2 - x_1\Delta_1)$.

В рассмотренном примере $x_1 = x_2 = 1$ и, следовательно,

$$\Delta_n = 2 + (n-1)(3-2) = 2 + n - 1 = n + 1.$$

Пример 1.12. Использовав метод рекуррентных соотношений, вычислить определитель Вандермонда

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Решение. Из каждой строки определителя, начиная с последней, поочередно вычтем предыдущую строку, умноженную на x_1. Тогда получим

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2 x_1 & \ldots & x_n^2 - x_n x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 & \ldots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \end{vmatrix}.$$

Разлагая последний определитель по первому столбцу, а затем вынося в полученном определителе за знак определителя из первого столбца множитель $x_2 - x_1$, из второго столбца — множитель $x_3 - x_1$ и т. д., из последнего столбца множитель $x_n - x_1$, получаем

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Отсюда $\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1)\cdot\Delta_{n-1}(x_2, \ldots, x_n)$. Пользуясь этой рекуррентной формулой, получаем

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2-x_1)\ldots(x_n-x_1)(x_3-x_2)\ldots(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1}) = \prod_{j<k}(x_k-x_j).$$

Пример 1.13.Вычислить определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 4 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \ldots & n & 2n \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся методом представления определителя в виде суммы определителей, т. е. исходный определитель вычислим путем разложения его в сумму определителей того же порядка. Для этого элементы последней строки определителя представим в виде сумм $0+n, 0+n, \ldots, 0+n, n+n$. Это дает возможность представить исходный определитель в виде суммы двух других

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 4 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 4 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \ldots & n & n \end{vmatrix}.$$

Первый из этих определителей треугольный, и, следовательно он равен $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot(n-1) \cdot n = n!$. Второй определитель равен нулю, так как у него первая и последняя строки пропорциональны. Значит, $\Delta_n = n! + 0 = n!$.

Пример 1.14.Выяснить, существует ли матрица, обратная к матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

и если существует, то найти ее.

Р е ш е н и е. Вычисление обратной матрицы начнем с вычисления алгебраических дополнений элементов матрицы A. Найдем первоначально алгебраические дополнения элементов первой строки: $A_{11} = 3$, $A_{12} = 3$, $A_{13} = -6$. Тогда $\det A =$

$= 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot (-6) = 6 - 30 = -24 \neq 0$. Следовательно, обратная матрица к матрице A существует. Поэтому вычисляем все остальные алгебраические дополнения элементов матрицы A. Имеем $A_{21} = -5,\ A_{22} = -5,\ A_{23} = 2,\ A_{31} = -30,\ A_{32} = -6,\ A_{33} = 12$. Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -30 \\ 3 & -5 & -6 \\ -6 & 2 & 12 \end{bmatrix}.$$

ЗАДАЧИ

1.1. Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.
Найти: 1) $2A + B$; 2) $-6A + 3B$.

1.2. Найти указанные суммы, а в случаях, когда это невозможно, объяснить почему:

1) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

1.3. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию:

1) $5A + 2X = 0$, где $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$;

2) $3X - A = 2B$, где $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$.

1.4. Вычислить произведения матриц:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.5. Найти AB и BA и сравнить, если:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

3) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

4) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

5) $A = \begin{bmatrix} -101 & 96 & 103 \\ 21 & 73 & 24 \\ 31 & 0 & -64 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1.6. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей A :

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; 3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1.7. Вычислить:

1) $\begin{bmatrix} 2-i & 1+i \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & i-1 \\ 2 & i-1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.8. Вычислить $AB,\ A^TB^T,\ B^TA^T$, если:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.9. Найти $(A + A^T)B$, если:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.10. Вычислить произведения матриц:

1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

1.11. Произвести указанные операции над матрицами, имеющими блочные разбиения:

1) $\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & -2 & 3 \\ \hline 6 & 4 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline -1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$;

2) $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ \hline 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{rr|rr} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$

1.12. В соответствии с разбиением чисел $m, n, l (0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_p = m,\ 0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_q = n,\ 0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_k = l)$ сделать блочное разбиение $m \times n$-матрицы A и $n \times l$-матрицы B и найти произведение матриц A и B как произведение блочных матриц:

1) $0 < 1 < 2,\ 0 < 2 < 3,\ 0 < 1 < 2 < 4,$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 5 & 2 \end{bmatrix};$

2) $0 < 1 < 2,\ 0 < 1 < 3,\ 0 < 3 < 4,$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$

1.13. Вычислить:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^3$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}^2$; 3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$; 4) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n$;

5) $\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix}^k$; 6) $\begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}^k.$

1.14. Вычислить A^m, использовав соответствующее равенство:

1) $m = 5,\ A = \begin{bmatrix} 22 & -12 \\ 35 & 19 \end{bmatrix}$, если $\begin{bmatrix} 22 & -12 \\ 35 & -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix};$

2) $m = 2,\ A = \begin{bmatrix} 168 & 91 & -161 \\ -231 & -70 & 399 \\ 49 & 49 & 0 \end{bmatrix}$, если $\begin{bmatrix} 168 & 91 & -161 \\ -231 & -70 & 399 \\ 49 & 49 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$

1.15. Доказать, что при условии $AB = BA$ имеют место равенства:

$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2;$

$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B);$

$(A + B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1} B + \ldots + C_n^{n-1} AB^{n-1} + B^n;$

$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}).$

1.16. Вычислить коммутатор $[A, B] = AB - BA$ матриц A и B, если:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.17. Показать непосредственным вычислением, что для любых квадратных матриц A, B, C порядка n выполняется равенство (тождество Якоби): $[A,[B,C]]+$ $+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] = O_{n,n}$.

1.18. Показать, что если A и B — симметрические матрицы, то матрица AB не обязательно симметрическая.

1.19. Показать, что если A — симметрическая матрица, то для любой матрицы B матрица B^TAB также является симметрической.

1.20. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны нулевой матрице.

1.21. Найти все матрицы второго порядка, кубы которых равны нулевой матрице.

1.22. Доказать:

1) $\mathbf{tr}A = \mathbf{tr}A^T$;

2) $\mathbf{tr}(A+B) = \mathbf{tr}A + \mathbf{tr}B$;

3) $\mathbf{tr}(\alpha A) = \alpha\mathbf{tr}A$;

4) $\mathbf{tr}(AB) = \mathbf{tr}(BA)$, $\forall A, B \in K_{n,n}$ $\forall\alpha \in K$.

1.23. Доказать, что если $\mathbf{tr}AX = 0$ для всех квадратных матриц X, то $A = O_{n,n}$.

1.24. Найти $f(A)$, если:

1) $f(x) = x^2 + 2x + 3,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

2) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1,\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

1.25. Доказать, что каждая матрица второго порядка $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ удовлетворяет условию $x^2 - (a+b)x + ab - bc = 0$.

1.26. Найти все действительные инволютивные матрицы второго порядка.

1.27. Найти все действительные идемпотентные матрицы второго порядка.

1.28. Доказать, что если матрица A является идемпотентной, то матрица $B = 2A-$ $-E_n$ является инволютивной.

1.29. Показать, что если $AX = XA$ для всех X, то матрица A является скалярной.

1.30. Пусть $A(x) \in (P[x])_{m,n}$, $B(x) \in P([x])_{n,l}$. Доказать, что $\dfrac{d}{dx}[A(x)B(x)] =$ $= \left[\dfrac{d}{dx}A(x)\right]B(x) + A(x)\left[\dfrac{d}{dx}B(x)\right]$.

1.31. Показать, что если матрица $A \in R_{m,n}$ является нижней треугольной, а матрица $B \in R_{n,m}$ — нижней Хессенберга, то матрица $C = AB$ является нижней Хессенберга.

1.32. Доказать, что матрица вида

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

является нильпотентной.

1.33. Определить число инверсий в перестановках:

1) $(2, 3, 8, 1, 4, 5, 7, 6)$;

2) $(4, 3, 1, 8, 5, 2, 6, 7)$;

3) $(8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

Перейти от одной перестановки к другой посредством применения ряда транспозиций.

1.34. Определить число инверсий в перестановке $(n, n-1, n-2, \dots, 2, 1)$.

1.35. Определить число инверсий в перестановках:

1) $(1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, 2, 4, \dots, 2n)$;

2) $(1, 4, 7, \dots, 3n-2, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n)$;

3) $(2, 5, 8, \dots, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-2, 3, 6, 9, \dots, 3n)$;

4) $(1, 5, 9, \dots, 4n-3, 2, 6, 10, \dots, 4n-2, 7, 11, \dots, 4n-1, 4, 8, 12, \dots, 4n)$;

5) $(3, 7, 11, \dots, 4n-1, 4, 8, 12, \dots, 4n, 1, 5, 9, \dots, 4n-3, 2, 6, 10, \dots, 4n-2)$;

6) $(2, 6, 10, \dots, 4n-2, 3, 7, 11, \dots, 4n-1, 1, 5, 9, \dots, 4n-3, 4, 8, 12, \dots, 4n)$;

7) $(4, 9, \dots, 5n-1, 2, 7, \dots, 5n-3, 3, 8, \dots, 5n-2, 5, 10, \dots, 5n, 1, 6, \dots, 5n-4)$;

8) $(3, 8, \dots, 5n-2, 1, 6, \dots, 5n-4, 5, 10, \dots, 5n, 2, 7, \dots, 5n-3, 4, 9, \dots, 5n-1)$;

9) $(5n-4, 5n-9, \dots, 6, 1, 5n-2, 5n-7, \dots, 8, 3, 5n-1, 5n-6, \dots, 9, 4, 5n, 5n-5, \dots, 10, 5, 5n-3, 5n-8, \dots, 7, 2)$.

1.36. Определить число инверсий и указать четность перестановок:

1) $(e, p, 0, t, b, k)$; 2) (k, t, p, b, o, e);

3) (o, p, b, k, e, t); 4) (t, e, p, k, o, b).

Если исходной является перестановка букв в слове "*potbek*".

1.37. Пользуясь только определением, вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 10 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

1.38. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -5 & -2 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

1.39. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+12 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

1.40. Решить равенство $\begin{vmatrix} 1 & x+1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 5+x & -3+x & x \end{vmatrix} > 0.$

1.41. Не раскрывая определитель, доказать справедливость равенств:

1) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-c)(c-b)(c-a);$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b);$

3) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & \cos 2\varphi \end{vmatrix} = 0;$

4) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

1.42. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -x \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 3 & d & x \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

1.43. Пользуясь теоремой Лапласса, вычислить определители:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix};\ 2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix};\ 3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$4)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 \end{vmatrix};\ 5)\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix};\ 6)\begin{vmatrix} a & 0 & c & 0 & 0 & b \\ 0 & d & 0 & b & c & 0 \\ b & 0 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ c & 0 & b & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & a \end{vmatrix}.$$

1.44. Вычислить следующие определители приведением к треугольному виду

$$1)\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix};\ 2)\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \end{vmatrix};$$

$$3)\begin{vmatrix} a & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -b \\ -b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix};\ 4)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

1.45. Вычислить следующие определители методом рекуррентных соотношений:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix};\ 2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix};$$

$$3)\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix};\ 4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

1.46. Вычислить определители

$$
1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ -x & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix};\ 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -x & a & a & \dots & a & a \\ -x & -x & a & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & -x & -x & \dots & a & a \\ -x & -x & -x & \dots & -x & a \end{vmatrix};
$$

$$
3)\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ 1 & 1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix};\ 4)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix};
$$

$$
5)\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix};\ 6)\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix};
$$

$$
7)\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ y & y & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix};\ 8)\begin{vmatrix} 1 & -a & -a & \dots & -a \\ 2 & 1 & -a & \dots & -a \\ 3 & 2 & 1 & \dots & -a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{vmatrix};
$$

$$
9)\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix};\ 10)\begin{vmatrix} a+1 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & a & x & \dots & x & x \\ 1 & 0 & a & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a & x \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix};
$$

$$
11)\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2+x_2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 3+x_3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n+x_n \end{vmatrix};\ 12)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^3 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}.
$$

1.47. Доказать, что если элементы $n \times n$ матрицы $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ есть дифференцируемые функции от x, то

$$
\frac{d}{dx}\det A = \det\left(\frac{d}{dx}A_1, A_2, \dots, A_n\right) +
$$

$$
+\det\left(A_1, \frac{d}{dx}A_2, \dots, A_n\right) + \dots + \det\left(A_1, A_2, \dots, \frac{d}{dx}A_n\right).
$$

1.48. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

$$1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix};\ 2)\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 1/2 \end{bmatrix};\ 3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ 4)\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$5)\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};\ 6)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix};\ 7)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix};$$

$$8)\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix};\ 9)\begin{bmatrix} 1-i & i & 1 \\ -i & 1 & 1+i \\ 1 & 1-i & 1+i \end{bmatrix};$$

$$10)\begin{bmatrix} 1 & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} & i \\ \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} & i & \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} \\ i & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{bmatrix};$$

$$11)\begin{bmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3} & 1 & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{bmatrix};$$

$$12)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix};\ 13)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.49. Показать, что если одна из квадратных матриц n-го порядка A и B вырождена, то их произведение AB есть также вырожденная матрица.

1.50. Для определителей матрицы A порядка n и ее присоединенной матрицы B доказать соотношение $\det B = (\det A)^{n-1}$.

1.51. Доказать, что если $A^2 = O_{n,n}$, то матрица $A + E_n$ и $E_n - A$ являются невырожденными и взаимно обратными.

1.52. Доказать, что если $A^3 = O_{n,n}$, то матрицы $A + E_n$ и $A^2 - A + E_n$ являются невырожденными и взаимно обратными.

1.53. Пусть квадратная $n \times n$-матрица A такова, что $A^m = E_n$. Показать, что матрица A невырождена. Чему равна ее обратная матрица?

1.54. Пусть $A^m = O_{n,n}$. Доказать, что матрица $E_n + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{m-1}$ является обратной для матрицы $E_n - A$.

1.55. Матрица A называется целочисленной, если все ее элементы есть целые числа. Доказать, что для целочисленной $n \times n$-матрицы A существует целочисленная обратная матрица тогда и только тогда, когда $\det A = \pm 1$.

ОТВЕТЫ

1.1. $1)\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix};\quad 2)\begin{bmatrix} -9 & -6 & 18 \\ -12 & 12 & -6 \end{bmatrix}.$

1.2. 1) $\begin{bmatrix} 10 & 11 & -2 \end{bmatrix}$; 2) сложение невозможно; 3) сложение невозможно; 4) $\begin{bmatrix} -35 \\ 24 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.3. 1) $\begin{bmatrix} -10 & 5 & -15 \\ -20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

1.4. 1) $\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 24 & 23 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 17 & 3 & 29 \\ 13 & 6 & 16 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 8 & -4 & 8 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

1.5. 1)$AB = \begin{bmatrix} 13 & 16 \\ 29 & 36 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{bmatrix}$; 2)$AB = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 6 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

$BA = \begin{bmatrix} 14 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ 13 & 1 & -5 \end{bmatrix}$; 3)$AB = \begin{bmatrix} a+c & b+c & a+b+c \\ 2 & 2 & 3 \\ \alpha+\gamma & \beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \end{bmatrix}$,

$BA = \begin{bmatrix} a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ 1+\alpha & 1+\beta & 1+\gamma \\ a+1+\alpha & b+1+\beta & c+1+\gamma \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 20 & 20 & 4 \\ 23 & 30 & 5 \\ 15 & 26 & -3 \end{bmatrix}$,

$BA = \begin{bmatrix} 24 & 19 & 11 \\ 24 & 10 & 10 \\ 16 & 25 & 13 \end{bmatrix}$; 5)$AB = BA = \begin{bmatrix} -303 & 288 & 309 \\ 63 & 219 & 72 \\ 93 & 0 & -192 \end{bmatrix}$.

1.6. 1)$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta-\alpha & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; 2) $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,4}$;

3) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & o & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

1.7. 1) $\begin{bmatrix} 3+4i & -3+3i \\ 4+3i & -5+5i \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 5+i & 9+i \end{bmatrix}$.

1.8. 1) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & -5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & -5 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.9. 1) $\begin{bmatrix} 10 & 7 & -5 \\ 10 & 12 & 3 \\ 16 & 5 & -7 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 6 \\ -20 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1.10. 1)$\begin{bmatrix} -9 & 6 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 40 & -62 & -7 \\ 41 & -68 & -5 \\ 39 & -56 & -9 \end{bmatrix}$.

1.11. 1) $\left[\begin{array}{rr|rr} 5 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 5 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$; 2) $\left[\begin{array}{rr|rr} 30 & 51 & 57 & 69 \\ 39 & 69 & 81 & 105 \\ \hline 48 & 36 & 27 & 60 \\ 21 & 3 & 39 & 30 \end{array}\right]$.

1.12. 1) $\left[\begin{array}{r|r|rr} 11 & -22 & 29 & 5 \\ \hline 9 & -27 & 32 & 5 \end{array}\right]$; $\left[\begin{array}{rrr|r} 11 & -22 & 29 & 5 \\ \hline 9 & -27 & 32 & 5 \end{array}\right]$.

1.13. 1) $\begin{bmatrix} 16 & 29 \\ 29 & 74 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 11 \\ 2 & -3 & -1 \\ 10 & 4 & 12 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} + (-1)^{n+1}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + (-1)^n\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + (-1)^{n+1}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} + (-1)^n\frac{3}{2} \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} \alpha_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n^k \end{bmatrix}$;

6) $\begin{bmatrix} \alpha_1^k & C_k^1\alpha_1^{k-1} & \dots & C_k^{i-1}\alpha_1^{k-i+1} & \dots & C_k^{n-1}\alpha_1^{k-n+1} \\ 0 & \alpha_1^k & \dots & C_k^{i}\alpha_1^{k-i+2} & \dots & C_k^{n}\alpha_1^{k-n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \alpha_1^k \end{bmatrix}$, $C_k^j = 0$, если $j > k$.

1.14. 1) $\begin{bmatrix} 652 & -372 \\ 1085 & -619 \end{bmatrix}$; 2) $7^3 \begin{bmatrix} -2 & 3 & 27 \\ -9 & 10 & 27 \\ -9 & 3 & 34 \end{bmatrix}$.

1.16. 1) $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 11 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 13 & 4 & 12 \\ 12 & -4 & -14 \\ 0 & -6 & -9 \end{bmatrix}$.

1.20. $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| bc = -a^2 \right\}$.

1.24. 1) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; 3)$O_{3,3}$.

1.26. $\left\{ E_2,\ -E_2,\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| a^2 + bc = 1 \right\}$.

1.27. $\left\{ O_{2,2},\ E_2,\ \begin{bmatrix} \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha\beta}}{2} & \alpha \\ \beta & \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha\beta}}{2} \end{bmatrix} \middle| 4\alpha\beta \le 1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

1.33. 1) 8; 2) 10; 3) 28.

1.34. $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.35. 1) $\dfrac{n(n-1)}{2}$; 2) $\dfrac{3n(n-1)}{2}$; 3) $\dfrac{n(3n-1)}{2}$; 4) $3n(n-1)$;
5) $n(3n+1)$; 6) $n(3n-1)$; 7) $n(5n+1)$; 8) $n(5n-1)$; 9) $\dfrac{n}{2}(15n-9)$.

1.36. 1) 4; 2) 8; 3) 5; 4) 7.

1.37. 1) 0; 2) 0; 3) -12.

1.38. 1) 18; 2) 1; 3) 17; 4) 80 ; 5) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$; 6) $abc + x(ab + ac + bc)$.

1.39. -10; 2.

1.40. $x \in]-6, -4[$.

1.42. 1) 54; 2) -20; 3) $3x^2+9x$; 4) $9a+12b-9c+3d$; 5) 0; 6) 20; 7) $4x+4y+47-20t$;

8) 0; 9) 1; 10) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)$.

1.43. 1) -4; 2) 42; 3) 168; 4) $(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$; 5) -99; 6) 0.

1.44. 1) $2^{n-2}(n+1)$; 2) $(-1)^{n-1}3^n$; 3) a^n-b^n; 4) $(a_0+a_1+\ldots+a_n)x^n$.

1.45. 1) $\Delta_n=\dfrac{2}{3}(4^n-1)$; 2) $\Delta_{n+1}=-x_1x_2\ldots x_n\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_1}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}\right)$;

3) $\Delta_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$; 4) $\Delta_n=x^{n-1}+2x^{n-2}+\ldots+(n-1)x+n$.

1.46. 1) nx^{n-1}; 2) $(a+x)^{n-1}$; 3) $(n-1)^n+n^{n-1}$; 4) $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$;

5) $(-1)^{n-1}n!$; 6) $x^n+(a_1+a_2+\ldots+a_n)x^{n-1}$; 7) $\dfrac{1}{x-y}[x(a_1-y)(a_2-y)\ldots(a_n-y)--y(a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_n-x)]$; 8) $(1+a)^n-a^n$; 9) $\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$; 10) $a^n+(a-x)^{n-1}$;

11) $x_1x_2\ldots x_n\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots\dfrac{n}{x_n}+1\right)$; 12) $1!2!\ldots n!=1^n2^{n-1}3^{n-2}\ldots n$.

1.48. 1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{10} \\ 0 & -1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; 6) $\dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$; 7) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -12 & 5 & -4 \\ -8 & 3 & -2 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$;

8) $\dfrac{1}{66}\begin{bmatrix} 21 & -6 & -9 & -39 \\ -1 & -28 & 35 & 27 \\ 23 & -16 & -13 & -27 \\ -13 & 32 & -7 & 21 \end{bmatrix}$; 9) $\dfrac{1}{17}\begin{bmatrix} 5-3i & -10+6i & 9-2i \\ 2-8i & -4-i & 7+6i \\ 7+6i & 3-12i & -1+4i \end{bmatrix}$;

10) $\begin{bmatrix} 6+2i & (-3-\sqrt{3})+(-1+3\sqrt{3})i & -4-8i \\ (-3+\sqrt{3})+(-1-3\sqrt{3})i & -4-8i & (-3+\sqrt{3})+(-1-3\sqrt{3})i \\ -4-8i & (-3-\sqrt{3})+(-1+3\sqrt{3})i & 6+2i \end{bmatrix}$;

11) $\dfrac{1}{-2-\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}i & 6+2i \\ -\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}i & 0 & \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}-\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}i \\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}i & 0 \end{bmatrix}$;

$$12)\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 2-n & 1 & \ldots 1 & \\ 1 & 2-n & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots 2-n & \end{bmatrix}; \quad 13)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.53. Обратная матрица равна присоединенной к матрице A.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Определения. Основные понятия

Пусть P – произвольное поле.

Определение 2.1. Системой m линейных алгебраических уравнений от n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ над полем P называется система выражений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $m, n \in N$; $a_{ij}, b_i \in P$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Элементы a_{ij} называются *коэффициентами системы*, элементы b_i – ее *свободными членами*.

Если все свободные члены системы линейных уравнений равны нулю, то система называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Последовательность чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется *решением системы*, если каждое из уравнений этой системы обращается в верное равенство после подстановки вместо символов неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствующих элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и выполнения указанных в уравнении операций.

Если существует хотя бы одно решение рассматриваемой системы, то эта система считается *совместной*, в противном случае – *несовместной*.

Если система совместна, то каждое ее решение называется *частным решением*. Совокупность всех ее частных решений называется *общим решением*.

Решить систему линейных уравнений – это значит выяснить, совместна она или нет, и в случае совместности найти все ее решения (общее решение).

Две системы линейных уравнений с одними и теми же неизвестными и над одним и тем же полем P называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений. В частности, две несовместные системы с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P равносильны.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы (2.1), называется *матрицей или основной матрицей системы*, а матрица

$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$, которая получается из матрицы A приписыванием столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы*.

Положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Столбец X называется *столбцом неизвестных*, а B – *столбцом свободных членом системы* (2.1).

Матричное уравнение

$$AX = B, \tag{2.2}$$

называется *матричным уравнением соответствующим системе уравнений* (2.1).

Матрица-столбец

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in P_{n,1}$$

называется *решением матричного уравнения* (2.2), если верно равенство $AC = B$.

Лемма 2.1. Последовательность чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ является решением системы уравнений (2.1) тогда и только тогда, когда столбец $C = [\alpha_1 \dots \alpha_n]^T$ есть решение уравнения (2.2).

♦ Действительно, выполнение равенства $AC = B$ равносильно по правилу умножения матриц тому, что

$$\begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 + \dots + a_{2n}\alpha_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\alpha_1 + \dots + a_{mn}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство как равенство матриц равносильно системе равенств

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{array} \right.$$

Значит последовательность $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – решение системы уравнений (2.1).■

Лемма 2.2. Если расширенная матрица одной системы линейных уравнений получается из расширенной матрицы другой системы посредством умножения слева на невырожденную матрицу, то эти две *системы равносильны*.

♦ Пусть (2.1) — система m линейных уравнений с соответствующим матричным уравнением (2.2) и T — невырожденная матрица порядка m. По правилу умножения матриц имеем

$$T\tilde{A} = T[A|B] = [TA|TB].$$

Надо показать, что множество решений матричного уравнения (2.2) совпадает с множеством решений матричного уравнения

$$(TA)X = TB. \tag{2.3}$$

Для этого предположим, что столбец C есть решение уравнения (2.2). Тогда $AC = B$, откуда $(TA)C = T(AC) = TB$ и, следовательно, C есть решение уравнения (2.3). Итак. с одной стороны, всякое решение уравнения (2.2) есть решение уравнения (2.3). С другой стороны, мы можем перейти от матрицы $T\tilde{A}$ к матрице $\tilde{A}$ умножением слева на матрицу T^{-1} (матрица T невырождена!). Поэтому, меняя местами а предыдущем рассуждении уравнения (2.2) и (2.3), приходим к тому. что каждое решение уравнения (2.3) есть решение уравнения (2.2). Следовательно, две рассматриваемые системы уравнений равносильны. ■

Определение 2.2.Следующие преобразования системы линейных алгебраических уравнений называются *элементарными*:

1) умножение некоторого уравнения системы на отличное от нуля число;

2)прибавление к одному уравнению системы другого уравнения этой системы умноженного на элемент поля P;

3) удаление из системы с более чем одним уравнением и приписывание к системе уравнения, у которого все коэффициенты и свободный член равны нулю.

Если одна система линейных уравнений получена с другой путем последовательного применения элементарных преобразований, то эти системы называются *эквивалентными*.

Замечание 2.1. Нетрудно видеть, что применение элементарных преобразований типа 1) и 2) равносильно соответствующим *элементарным преобразованиям строк* расширенной матрицы этой системы. Более того, преобразование типа 1) равносильно умножению слева расширенной матрицы системы на *элементарную матрицу* $T_{i,\alpha}$, а преобразование типа 2) равносильно умножению слева расширенной матрицы на элементарную матрицу $T_{i,j,\beta}$.

Лемма 2.3. Две *эквивалентные системы* уравнений *равносильны*.

♦ Доказательство следует из определения элементарных преобразований, замечания 2.1 и леммы 2.2■.

2.2. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

Определение 2.3.Система n линейных уравнений с n неизвестными называется *невырожденной*, если определитель ее матрицы (который называется также *определителем системы*) не равен нулю.

Соответствующее матричное уравнение также называется *невырожденным матричным уравнением.*

Теорема 2.1. *Решение невырожденного матричного уравнения*

$$AX = B$$

существует, единственно и описывается формулой

$$X = A^{-1}B. \tag{2.4}$$

♦ Поскольку матрица A имеет обратную A^{-1}, то умножая исходное уравнение слева на невырожденную матрицу A^{-1}, приходим согласно лемме 2.2 к равносильной системе с расширенной матрицей

$$A^{-1}[A|B] = [A^{-1}A|A^{-1}B] = [E_n|A^{-1}B],$$

которой соответствует матричное уравнение $E_nX = A^{-1}B$. Это уравнение имеет единственное решение вида (2.4).■

Замечание 2.2. Исходя из связи между решениями системы и соответствующего ей матричного уравнения заключаем, что решение невырожденной системы (2.1) является строка $X^T = (A^{-1}B)^T$.

Теорема 2.2(теорема Крамера). *Невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными всегда совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},\ i = \overline{1, n}, \tag{2.5}$$

где матрица A_i получена из матрицы A путем замены в ней i-го столбца на столбец свободных членов.

♦ Перепишем (2.4) в координатном виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{bmatrix}.$$

Исходя из определения равенства матриц, отсюда следует, что для каждого i, $1 \le i \le n$,

$$x_i = \frac{1}{\det A}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n) =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\det A_i}{\det A} \blacksquare.$$

Замечание 2.3. Метод нахождения решения невырожденных линейных систем по формулам (2.5) называется *методом (правилом) Крамера.*

2.3. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.6}$$

Укажем один из общих методов решения этой системы. Ясно, что среди коэффициентов при неизвестном x_j имеется хотя бы один отличный от нуля. Не ограничивая области, можно считать, что $a_{11} \neq 0$, так как всегда можно принять за первое уравнение системы то, в котором коэффициент при x_j отличен от нуля, а затем перенумеровать неизвестные (элемент преобразования). Исключим неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого, для этого ко 2-му уравнению прибавим первое, умноженное на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}^{(-1)}}\right), \ldots$, к i-ому уравнению $(1 \leq i \leq m)$ прибавим первое умноженное на $\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}^{(-1)}}\right)$.

В результате получаем систему равносильную исходной

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Назовем переход от системы (2.6) к системе (2.7) первым шагом алгоритма Гаусса. В результате первого шага алгоритма могут иметь место следующие ситуации:

1) среди уравнений системы (2.7) имеется хотя бы одно, у которого все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля. Тогда система (2.7) несовметсна, а следовательно, что и система (2.6) несовместна (см. лемма 2.3);

2) если для некоторого l $(2 \leq l \leq m)$ все коэффициенты $a_{lj}^{(1)}$, $j = \overline{2, n}$ и свободный член $b_l^{(1)}$ равны нулю, то l-е уравнение в системе (2.7) можно отбросить, не нарушая множества решений этой системы;

3) среди коэффициентов $a_{ij}^{(1)},\ i = \overline{2,m},\ j = \overline{2,n}$ имеется хотя бы один отличный от нуля. В этом случае переходим ко второму шагу алгоритма. Не ограничивая области, можем считать, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы (2.6) начиная с третьего и ниже. Для этого к 3-ему уравнению прибавим второе умноженное на $\left(-\dfrac{a_{32}^{(1)}}{(a_{22}^{(1)})^{-1}}\right), \ldots,$ к i-у уравнению прибавим второе, умноженное на $\left(-\dfrac{a_{i2}^{(1)}}{(a_{22}^{(1)})^{-1}}\right)$.

Получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{m3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)}. \end{cases} \tag{2.8}$$

В результате второго шага алгоритма могут иметь место случаи, аналогичные тем, которые получились в результате первого шага. Если имеет место третий случай, то переходим к третьему шагу и т.д. Через несколько шагов алгоритма мы либо докажем несовместность системы (2.6), либо придем к системе одного из следующих двух видов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \end{cases} \tag{2.9}$$
$$a_{11}x_1 \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)} \neq 0;$$

либо

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2s}^{(1)}x_s + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3s}^{(2)}x_s + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{ss}^{(s-1)}x_s + \ldots + a_{sn}^{(s-1)}x_n = b_s^{(s-1)}. \end{cases} \tag{2.10}$$
$$a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{ss}^{(s-1)} \neq 0,\ s < n.$$

Легко видеть, что система (2.9) имеет единственное решение. Мы найдем его, если из последнего уравнения определим x_n, далее из предпоследнего, уже зная x_n, найдем x_{n-1} и т.д.

Рассмотрим систему (2.10). Перепишем ее так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s = b_1 - a_{1,s+1}x_{s+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2s}^{(1)}x_s = b_2^{(1)} - a_{2,s+1}^{(1)}x_{s+1} - \ldots - a_{2n}^{(1)}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{ss}^{(s-1)}x_s = b_s^{(s-1)} - a_{s,s+1}^{(s-1)}x_{s+1} - \ldots - a_{sn}^{(s-1)}x_n. \end{cases} \tag{2.11}$$

Если теперь неизвестным $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n$ придать произвольные значения из поля P, то относительно оставшихся s неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_s$ системы (2.11) можно будет решить так же, как и систему (2.9). Легко проверить, что описанным путем получаются все решения системы (2.11), так как при заданных значениях неизвестных $x_{s+1}, \dots, x_n$ оставшиеся неизвестные определяются однозначно.

Замечание 2.4. Таким образом система (2.6) может быть:

а) несовместной (нет решения);

б) определенный (единственное решение);

в) неопределенной (бесконечное множество решений).

Замечание 2.5. При практическом решении системы (2.6) все описанные преобразования удобно применять не к самой системе, а к расширенной матрице $\tilde{A}$.

Замечание 2.6. Метод Гаусса можно использовать для решения матричных уравнений вида

$$AX = B, \tag{2.12}$$

где $A \in R_{m,n},\ B = (B_1|B_2|\dots|B_q) \in R_{m,q}$ – заданные матрицы; $X = (X_1|X_2|\dots|X_q)$ – неизвестная матрица размеров $n \times q$. Так как уравнение (2.12) равносильно системе матричных уравнений

$$AX_1 = B_1,\ AX_2 = B_2, \dots, AX_q = B_q \tag{2.13}$$

с общей матрицей A, то его можно решать, применяя к матрице $(A|B)$ элементарные преобразования строк и удаления нулевых строк. В случае, если в матрице получится ненулевая строка с нулями на первых n позициях, приходим к тому, что матричное уравнение (2.12) не имеет решений. В случае же, если матрица A приводится к частично мономиальной матрице, переходим к решению каждого уравнения (2.13) в отдельности.

Замечание 2.7. Исходя из замечания 2.6 имеем еще один метод вычисления обратной матрицы, который называется методом элементарных преобразований.

Пусть для матрицы A требуется найти A^{-1}. Рассмотрим матричное уравнение

$$AX = E_n, \tag{2.14}$$

где E_n – единичная матрица. С одной стороны умножим это уравнение слева на A^{-1} получим, что $X = A^{-1}$. С другой стороны X можно определить решая матричное уравнение (2.14) методом Гаусса.

2.4. Критерий совместности

Теорема 2.3 (теорема Кронекера–Капелли). *Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы, т.е.* $rank A = rank \tilde{A}$.

♦ Необходимость. Рассмотрим систему (2.1). И пусть эта система совместна.

Это означает, что существуют последовательность чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ таких, что имеет место равенство

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Это в свою очередь означает, что последний столбец матрицы $\tilde{A}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Исходя из теоремы о ранге матрицы следует, что ранг матрицы A равен рангу матрицы $\tilde{A}$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\tilde{A}$. Докажем что система (2.1) совместна. Так как ранг матрицы A равен рангу матрицы $\tilde{A}$, то последний столбец матрицы $\tilde{A}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Это значит, что найдутся числа $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ такие, что выполняется равенство (2.15), которое в свою очередь равносильно равенству

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases} \tag{2.16}$$

Откуда следует, что последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ является решением системы (2.1), т.е. она совместна. ■

Предположим теперь, что система (2.1) совместна. Попытаемся найти все ее решения, используя теорему Кронекера–Капелли. Пусть $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\tilde{A} = r$. Для определенности предположим, что первые r строк матрицы A линейно независимы. Тогда ясно, что первые r строк матрицы $\tilde{A}$ линейно независимы, а каждая другая строка есть их линейная комбинация. Отсюда следует, что всякое уравнение системы (2.1) есть линейная комбинация первых r уравнений и, следовательно, система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{2.17}$$

составленная из первых r уравнений системы (2.1) равносильна системе (2.1). Заменим систему (2.1) системой (2.17).

Если $r = n$, то определитель системы (2.17) отличен от нуля (его строки линейно независимы) и она имеет по правилу Крамера единственное решение.

Пусть $r < n$ и пусть для определенности линейно независимы первые r столбцов матрицы системы (2.17). Тогда из (2.17) получаем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n, \end{cases} \tag{2.18}$$

в которой неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ называются *свободными неизвестными*, а $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – *базисными неизвестными*.

Придадим свободным неизвестным значения $x_{r+1} = c_{r+1}, x_{r+2} = c_{r+2}, \ldots, x_n = c_n$ из поля P. Система (2.18) примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{2n}c_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{rn}c_n. \end{cases} \tag{2.19}$$

Система (2.19) является системой r линейных уравнений с r неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Ее определитель отличен от нуля (можно решить по правилу Крамера). Она имеет единственное решение $c_1, c_2, \ldots, c_r$. Таким образом $c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n$ – решение системы (2.17), а следовательно и системы (2.1). Если поле P, бесконечно, то таким путем получается бесконечное множество решений системы (2.1). Все ли решения найдутся таким путем? Утверждается, что это так.

Пусть $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_r^*, c_{r+1}^*, \ldots, c_n^*$ какое-то произвольное решение системы (2.1). Покажем, что это решение можно получить указанным выше способом.

Положим в системе (2.19) $x_{r+1} = c_{r+1}^*, x_{r+2} = c_{r+2}^*, \ldots, x_n^* = c_n^*$.

В силу того. что система (2.19) при заданной правой части имеет единственное решение, то

$$x_1 = c_1^*, x_2 = c_2^*, \ldots, x_r = c_r^*,$$

что и требовалось показать.

Из вышеприведенных рассуждений получаем следующий метод решения систем линейных уравнений.

Метод решения систем линейных уравнений.

Пусть A – матрица системы уравнений (2.1), B – столбец свободных членов и $\tilde{A}$ – расширенная матрица.

1. Если A – нулевая матрица, тогда если B – нулевой столбец, то $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – общее решение, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – произвольные элементы из поля P. Если же $B \neq$ $\neq O_{m,1}$, то система (2.1) несовместна.

2. Если A – ненулевая матрица, то вычисляем ее базисный минор R. Пусть его порядок равен r.

3. Находим все окаймляющие R миноры $(r+1)$-го порядка матрицы $\tilde{A}$, не содержащиеся в A. Если среди них есть нулевые, процесс заканчиваем, система несовместна, иначе переходим к следующему шагу.

4. Из матрицы $\tilde{A}$ удаляем все строки кроме тех, на которых расположен минор R. Те неизвестные, коэффициенты при которых составляют минор R, объявляем базисными, а остальные, если они есть, – свободными. Решаем полученную систему уравнений, например, по формулам Крамера. Выражаем базисные неизвестные через свободные и получаем общее решение системы (2.1).

2.5. Однородные системы

Рассмотрим однородную систему m линейных уравнений от n неизвестных вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2.20}$$

и соответствующее ей однородное матричное уравнение

$$AX = 0. \tag{2.21}$$

Однородная система (2.20) (как и матричное уравнение (2.21)) всегда совместна, так как она имеет нулевое (тривиальное) решение $(0, 0, \ldots, 0)$.

При каких условиях однородная система (2.20) имеет ненулевое решение? Верна следующая теорема.

Теорема 2.4. *Однородная система m линейных уравнений от n неизвестных (2.20) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше числа неизвестных, т.е. когда* $\mathrm{rank} A < n$.

Следствие 2.1.Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель ее матрицы равен нулю.

Теорема 2.5. *Множество U всех решений однородной системы линейных уравнений (2.20) есть подпространство арифметического пространства* $P_{1,n}$.

♦ Для простоты изложения доказательство приведем для однородного матричного уравнения (2.21). Ясно, что система (2.20), а следовательно, матричное уравнение (2.21) имеет нулевое решение и поэтому множество U не является пустым.

Пусть далее, C' и C'' два решения матричного уравнения (2.21) и α, β – произвольные элементы из поля P. Тогда имеем $A(\alpha C' + \beta C'') = \alpha AC' + \beta AC'' = 0$. Отсюда следует, что столбец $\alpha C' + \beta C'' \in P_{n,1}$, а это значит, что множество U, на основании критерия подпространства векторного пространства, есть подпространство пространства $P_{n,1}$.■

Так как множество всех решений однородной системы линейных уравнений являются подпространством соответствующего пространства, то найдем его базис и размерность.

Пусть для системы(2.20) $\mathrm{rank} A = r$, причем $1 \le r < n$. Требуется найти все ее ненулевые решения. Для определенности предположим, что базисный минор R r-го порядка матрицы A расположен в левом верхнем углу. Тогда, объявив свободными неизвестными, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, от системы (2.20) перейдем к системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r = a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{2.22}$$

При фиксированной правой части система (2.22) является системой r линейных уравнений от r базисных неизвестных $x_1, \ldots, x_r$. Ее определитель отличен от нуля, и поэтому ее можно решать, например, по правилу Крамера.

Придадим свободным неизвестным последовательно значения:

$$\begin{array}{l} x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0; \\ x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, \ldots, x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 1. \end{array}$$

В результате имеем $(n-r)$ решений

$$\begin{array}{l} C_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1r}, 1, 0, \ldots, 0), \\ C_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2r}, 0, 1, \ldots, 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n-r} = (\alpha_{n-r,1}, \alpha_{n-r,2}, \ldots, \alpha_{n-r,r}, 0, 0, \ldots, 1), \end{array}$$

системы (2.22), а следовательно и системы (2.20).

Покажем, что система этих решений

$$(C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}) \tag{2.23}$$

является линейно независимой, и что любое решение системы (2.20) является их линейной комбинацией.

Действительно, так как ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1r} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2r} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & & & & & \\ \alpha_{n-r,1} & \alpha_{n-r,2} & \ldots & \alpha_{n-r,r} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

составленной по системе (2.23) равен $(n-r)$ (базисный минор $(n-r)$ порядка расположен в последних $(n-r)$ столбцах) и равен числу векторов в системе (2.23), то эта система линейно независима.

Пусть теперь $C = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ – произвольное решение системы (2.20). Покажем, что это решение можно представить в виде линейной комбинации решений системы (2.23). Для этого введем в рассмотрение вектор-строку $\tilde{C} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, определяемую соотношением

$$\tilde{C} = C - \beta_{r+1}C_1 - \beta_{r+2}C_2 - \ldots - \beta_n C_{n-r}. \tag{2.24}$$

Можно проверить, что строка $\tilde{C}$ является решением системы(2.22), а следовательно и системы (2.20).

Кроме того, исходя из соотношения (2.24) эта строка имеет вид $\tilde{C} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r, 0, \ldots, 0)$. Но тогда из системы (2.22) (поскольку все свободные неизвестные равны нулю) следует, что $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_r = 0$, а это значит, что $\tilde{C} = (0, \ldots, 0)$, и что в свою очередь $C = \beta_{r+1}C_1 + \beta_{r+2}C_2 + \ldots + \beta_n C_{n-r}$.

Система решений (2.23) называется *фундаментальной системой решений* однородной системы (2.20).

Таким образом, общее решение однородной системы (2.20) имеет вид $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_{n-r} C_{n-r}$, где $(C_1, C_2, \ldots, C_{n-r})$ фундаментальная система ее решений, α_i, $i = \overline{1, n-r}$ — произвольные элементы из поля P, r — ранг матрицы A матрицы системы (2.20), т.е. $r = \operatorname{rank} A$.

На основании вышеизложенного следует, что

1) система решений (2.23) есть базис подпространства U — подпространства решений однородной системы (2.20);

2) размерность этого подпространства равна $n - \operatorname{rank} A$, где A — матрица системы (2.20).

2.6. Связь между решениями неоднородной и приведенной однородной систем уравнений

Рассмотрим систему уравнений (2.1). Если заменить в ней свободные члены нулями, то получим однородную систему линейных уравнений (2.20), называемую *приведенной однородной системой* для системы уравнений (2.1).

Теорема 2.6. *Все решения совместной системы линейных уравнений (2.1) можно получить, складывая какое-либо одно решение этой системы с каждым решением приведенной однородной системы линейных уравнений.*

♦ Доказательство проведем для матричных уравнений. Пусть

$$AX = B \tag{2.25}$$

— матричное уравнение, соответствующее системе уравнений (2.1). Тогда

$$AX = O \tag{2.26}$$

— матричное уравнение, соответствующее приведенной однородной системе для (2.20). Пусть L — множество решений уравнения (2.25), а $\tilde{L}$ — множество решений уравнения (2.26). Зафиксируем некоторый столбец-решение $C_0 \in L$. Надо доказать, что

$$L = \{C_0 + C \mid \forall C \in \tilde{L}\}. \tag{2.27}$$

Если $C \in \tilde{L}$, то $A(C_0 + C) = AC_0 + AC = B + O_{m,1} = B$, так что $C_0 + C \in L$ и потому $\{C_0 + C | C \in \tilde{L}\} \subset L$. Пусть теперь $C_1 \in L$. Положим $C = C_1 - C_0$. Тогда $AC = A(C_1 - C_0) = AC_1 - AC_0 = B - B = O_{m,1}$, так что $C_1 = C_0 + C$, где $C \in \tilde{L}$. Следовательно равенство (2.27) истинно. ■

Следствие 2.2. Пусть r — ранг матрицы совместной системы линейных уравнений (2.1) и $0 < r < n$. Если C_0 — некоторое ее решение, а $(C_1, \ldots, C_{n-r})$ — фундаментальная система решений приведенной однородной системы уравнений (2.20) для системы (2.1), то любое решение системы (2.1) является линейной комбинацией вида

$$C_0 + \alpha_1 C_1 + \ldots + \alpha_{n-r} C_{n-r}, \tag{2.28}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in P$.

ПРИМЕРЫ

Пример 2.1. Выяснить, является ли система

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -7 \end{cases}$$

невырожденной, и если является, то решить ее по формулам Крамера.

Р е ш е н и е. Вычисляем определитель системы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 35.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система является невырожденной и, следовательно, имеет единственное решение, для нахождения которого можно применить формулы Крамера. Для этого вычисляем определители

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 & -1 \\ -7 & 3 & -4 & 4 \\ 9 & 1 & -2 & -2 \\ -7 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 70, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & -1 \\ 2 & -7 & -4 & 4 \\ 3 & 9 & -2 & -2 \\ 1 & -7 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -35,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & -2 \\ 1 & -3 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \det A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & -3 & 7 & -7 \end{vmatrix} = -70.$$

Значит, $x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = 2$, $x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = -1$, $x_3 = \dfrac{\det A_3}{\det A} = 0$, $x_4 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = -2$ и последовательность $(2, -1, 0, -2)$ является решением рассматриваемой системы.

В случае, когда число неизвестных n велико, практическое использование формул Крамера затруднено в связи с необходимостью большого числа вычислений (нужно вычислить $n + 1$ определителей n-го порядка, которые требуют примерно в n^2 раз больше вычислительных операций, чем метод Гаусса). Однако формулы Крамера имеют весьма важное значение в теоретическом плане, поскольку они дают возможность явно записать значения неизвестных через коэффициенты и свободные члены системы.

Пример 2.2. Используя метод Гаусса, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 19. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Так как переменная x_1 присутствует в первом уравнении, то исходя из алгоритма метода Гаусса нет необходимости переставлять уравнения. Вычтем поочередно из второго уравнения первое, умноженное на $\dfrac{1}{3}$, а из третьего уравнения —

первое, умноженное на $\dfrac{5}{3}$. В результате придем к системе

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ \frac{4}{3}x_2 + \frac{11}{3}x_3 = \frac{4}{3}, \\ -\frac{19}{3}x_2 + \frac{16}{3}x_3 = \frac{32}{3}. \end{cases}$$

Хотя систем с дробными коэффициентами не всегда удается избежать, в данном случае можно было получить систему более удобного вида. Для этого в исходной системе следует переставить первое и второе уравнение

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 19, \end{cases}$$

а затем вычесть из второго уравнения первое, умноженной на 3, а из третьего уравнения — первое умноженное на 5. В этом случае придем к системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ -4x_2 - 11x_3 = -4, \\ -13x_2 - 13x_3 = 4. \end{cases}$$

Похожую систему мы могли бы получить, если бы второе и третье уравнение второй системы умножили на 3, но в большинстве случаев удобнее иметь уравнение с самым простым коэффициентом на первом месте. Чтобы система приняла более удобный вид, умножим второе и третье уравнений на -1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 4x_2 + 11x_3 = 4, \\ 13x_2 + 13x_3 = -4. \end{cases}$$

и рассмотрим систему состоящую лишь из двух последних уравнений. Она содержит лишь две неизвестные x_2 и x_3. Исключим неизвестное x_2 из одного из уравнений. Для этого от третьего уравнения отнимем первое, умноженное на $\frac{13}{4}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 4x_2 + 11x_3 = 4, \\ -\frac{91}{4}x_3 = -17. \end{cases}$$

В результате получили систему, третье уравнение которой содержит лишь неизвестное x_3, и , следовательно, можем из него найти значение этого неизвестного:

$$x_3 = \frac{68}{91}.$$

Подставим это значение во второе уравнение

$$4x_2 + \frac{748}{91} = 4$$

и найдем из него значение неизвестного x_2:

$$x_2 = -\frac{96}{91}.$$

Подставим найденные неизвестные в первое уравнение

$$x_1 + \frac{80}{91} = 3$$

и решим его:

$$x_1 = \frac{193}{91}.$$

Таким образом, получили, что

$$\left(\frac{193}{91}, -\frac{96}{91}, \frac{68}{91}\right)$$

— единственное решение исходной системы.

Пример 2.3. Рассмотрим систему, коэффициенты которой зависят от некоторого параметра $\alpha \in R$:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ -2x_1 - 2ax_2 - ax_3 = 1. \end{cases}$$

Такая система может возникнуть, например, при решении следующей задачи. Рассматриваются три объекта регулирования, зависящие от трех управляемых величин x_1, x_2, x_3 и заданного извне параметра a, который определяется внешними факторами. Пусть объекты регулирования имеют вид :

$$x_1 + ax_2 + x_3, \quad x_1 + x_2, \quad -2x_1 - 2ax_1 - ax_3.$$

Определим значения управляемых величин, при котором все объекты регулирования равны 1.

Р е ш е н и е . На первом этапе решения системы вычтем первое уравнение из второго и прибавим к третьему первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ (1-a)x_2 - x_3 = 0, \\ (2-a)x_3 = 1. \end{cases}$$

Получили систему, у которой третье уравнение содержит только одно неизвестное x_3. Однако, вычислить его значение просто разделив уравнение на $2-a$ мы не можем, так как в случае, если $2-a=0$ такое деление невозможно. Следовательно, разделив на $2-a$, мы исключим из рассмотрения случай, когда его значение равно 2, и решение будет неполным. В такой ситуации необходимо рассмотреть два случая: $a=2$ и $a \neq 2$.

Если $a = 2$, то последнее уравнение имеет вид $0 = 3$,и, следовательно, система несовместна.

Пусть $a \neq 2$. Тогда $2-a \neq 0$ и из третьего уравнения

$$x_3 = \frac{3}{2-a}.$$

Подставим найденное значение неизвестного x_3 во второе уравнение:

$$(a-1)x_2 + \frac{3}{2-a} = 0.$$

При решении этого уравнения нам также необходимо рассмотреть два случая: $a = 1$ и $a \neq 1$.

Если $a = 1$, то второе уравнение представляет собой противоречивое равенство

$$\frac{3}{2-a} = 0.$$

Если $a \neq 1$, то из второго уравнения может быть получено значение неизвестного x_2:

$$x_2 = \frac{3}{(a-1)(a-2)}.$$

Подставим найденные значения x_2 и x_3 в первое уравнение и найдем из него x_1. В результате получим, что система имеет множество решений

$$\left(1 - \frac{3}{(a-1)(a-2)}, \frac{3}{(a-1)(a-2)}, \frac{3}{(2-a)}\right), \quad \text{если } a \neq 1, 2,$$

и система не имеет решений, если, $a = 1$ или $a = 2$.

Пример 2.4. Решить методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 5, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x - y + z = 3. \end{cases}$

Р е ш е н и е . Строим расширенную матрицу $\tilde{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$ и преобразуем ее. Ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-2), а к третьей – первую, умноженную на (-3). Получим

$\tilde{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -8 \\ 0 & -4 & -2 & -12 \end{array}\right] \sim$ [ко второй строке прибавим третью, умноженную на (-1)] $\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & -12 \end{array}\right] \sim$ [к третьей строке прибавим вторую, умноженную на 4] $\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$.

Этой матрице соответствует система $\begin{cases} x + y + z &= 5, \\ y + z &= 4, \\ 2z &= 4. \end{cases}$ Откуда имеем, что $x = 1,\ y = 2,\ z = 2$, т.е. система имеет единственное решение.

Пример 2.5. Решить систему $\begin{cases} x - y + 2z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + z = 7. \end{cases}$

Р е ш е н и е . Решаем систему методом Гаусса. Имеем
$\tilde{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim$ [ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-2), а к третьей – первую, умноженную на (-3)] $\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \end{array}\right] \sim$ [к третьей строке прибавим вторую, умноженную на (-1)]

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Этой матрице соответствует система уравнений вида

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4, \\ \ \ 3y - 5z = -5. \end{cases}$$

Из которой $\begin{cases} y & = & \dfrac{5}{3}(z-1), \\ x & = & 4 + y - 2z = 4 + \dfrac{5}{3}(z-1) - 2z = \dfrac{7-z}{3}. \end{cases}$ Полагая $z = \alpha$, имеем $x = \dfrac{7-\alpha}{3}$, $y = \dfrac{5(\alpha-1)}{3}$, $z = \alpha$, где α – любое число. Таким образом, система имеет бесконечное множество решений:

$$\left(\frac{7-\alpha}{3}, \frac{5(\alpha-1)}{3}, \alpha\right), \ \alpha \in R.$$

Пример 2.6. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 3x + y - z = 2, \\ 6x + 2y - 2z = 1. \end{cases}$

Р е ш е н и е . $\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 3x + y - z = 2, \\ 6x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim$
$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & -10 & 4 & -17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right].$

Соответствующая система $\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ -5y + 2z = -7, \\ 0 = -3, \end{cases}$ не имеет решений. Значит и исходная система несовместна.

Пример 2.7.Решить методом Гаусса систему уравнений над полем C :

$$\begin{cases} ix_1 + x_2 + x_3 = i, \\ x_1 + ix_2 + x_3 = 0, \\ ix_1 + ix_2 - x_3 = 2i. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Так как каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование строк расширенной матрицы этой системы и наоборот, то можно оперировать не системой, а строками расширенной матрицы. Составим расширенную матрицу рассматриваемой системы:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & i & -1 & 2i \end{array}\right].$$

Умножая третью строку на $-i$, получаем $\left[\begin{array}{ccc|c} i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & i & 2 \end{array}\right]$. К первой строке прибавим две последние:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i+2 & i+2 & i+2 & i+2 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & i & 2 \end{array}\right].$$

Умножаем первую строку на $(i+2)^{-1}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & i & 2 \end{array}\right]$. Вычитаем из последних строк первую: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i-1 & 1 \end{array}\right]$. Умножаем первую строку на $1-i$ и к ней прибавляем две последние строки: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1-i & 0 & 0 & 1-i \\ 0 & i-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i-1 & 1 \end{array}\right]$. Умножаем первую строку на $\dfrac{1+i}{2}$ и последние на $\dfrac{-1-i}{2}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1+i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1-i}{2} \end{array}\right].$$

Эта матрица является расширенной матрицей системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = \frac{1+i}{2}, \\ x_3 = \frac{-1-i}{2}. \end{cases}$$

Поэтому общее решение исходной системы состоит из одной последовательности $\left(1, \dfrac{1+i}{2}, \dfrac{-1-i}{2}\right)$.

Пример 2.8. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений с матрицей $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Требуется найти фундаментальную систему решений и общее решение этой системы.

Р е ш е н и е. Используя элементарные преобразования, приходим к эквивалентной системе уравнений с матрицей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Имеем $\mathrm{rank}A = 2$. В качестве базисного минора можно взять минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, расположенный на первых двух строках и на первом и третьем столбцах получившейся матрицы. поэтому объявляем x_1 и x_2 базисными, а x_2 и x_4 — свободными неизвестными и получаем следующие выражения базисных неизвестных через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2, \\ x_3 = 2x_2 - x_4. \end{cases}$$

Придадим свободным переменным последовательно значения:

$$\begin{aligned} &x_2 = 1 \quad x_4 = 0; \\ &x_2 = 0, \quad x_4 = 1. \end{aligned}$$

В результате имеем фундаментальную систему решений (C_1, C_2), где $C_1 = (-3, 1, 2, 0)$ и $C_2 = (0, 0, -1, 1)$. а тогда $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = (-3\alpha_1, \alpha_1, 2\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in R$, есть общее решение исходной системы.

Пример 2.9.Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ -19x_1 + 24x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Используя элементарные преобразования, переходим к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 5 & 3 \\ -19 & 24 & 8 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 15 & -18 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -1 & 0 \\ -10 & 12 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 2. В качестве базисного минора возьмем минор $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, расположенный на пересечении второй и третьей строк с третьим и четвертым столбцами преобразованной матрицы. Поэтому объявляем x_3 и x_4 базисными, а x_1 и x_2 свободными неизвестными и получаем следующие выражения базисных неизвестных через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = 5x_1 - 6x_2, \\ x_4 = -7x_1 + 8x_2. \end{cases}$$

Следовательно, $(\alpha, \beta, 5\alpha-6\beta, -7\alpha+8\beta)$, $\alpha, \beta \in R$, есть общее решение, а строки матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -6 & 8 \end{bmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений исходной системы уравнений.

Пример 2.10. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 8, \\ 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 6x_4 = 17, \\ 6x_1 + 12x_2 + 19x_3 + 8x_4 = 25. \end{cases} \tag{2.29}$$

Решение. Элементарными преобразованиями над строками, преобразуем соответствующим образом расширенную матрицу:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & 13 & 6 & 17 \\ 6 & 12 & 19 & 8 & 25 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Получившаяся система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad -5x_4 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 \ +2x_4 = 1. \end{cases} \tag{2.30}$$

Объявляем x_1 и x_3 базисными, x_2 и x_4 свободными неизвестными и, исходя из (2.30), выражаем базисные неизвестные через свободные:

$$x_1 = 1 - 2x_2 + 5x_4,\ x_3 = 1 - 2x_4.$$

Придавая x_2 и x_4 произвольные значения α и β из множества R, получаем общее решение системы (2.29):

$$(1 - 2\alpha + 5\beta,\ \alpha,\ 1 - 2\beta,\ \beta),\ \alpha, \beta \in R.$$

Пример 2.11.Исследовать совместность и записать общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8 \end{cases} \tag{2.31}$$

в виде суммы некоторого частного решения этой системы и линейной комбинации базисных решений приведенной однородной системы.

Решение. Выделим базисный минор матрицы A системы: $M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$. Миноры $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & -8 \end{vmatrix}$, окаймляющие минор M и содержащийся в расширенной матрице $\tilde{A}$, равны нулю. Следовательно, система (2.31) совместна. Рассмотрим далее соответствующую ей приведенную однородную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Так как базисный минор M матрицы A расположен в первых двух столбцах, объявим неизвестные x_1, x_2 базисными, а неизвестные x_3, x_4 свободными. Общее решение системы (2.32) имеет вид $\left(-\frac{5}{3}\alpha_1 - \alpha_2, -\frac{2}{3}\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2\right) = \alpha_1\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right) + \alpha_2(-1, 1, 0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in R$. Придадим параметрам α_1, α_2 значения 1, 0 соответственно. Получим частное решение $C_1 = \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right)$ системы (2.32). Полагая далее $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, получим второе частное решение системы (2.32): $C_2 = (-1, 1, 0, 1)$. Система (C_1, C_2) образует базис пространства решений системы.

Переписав систему (2.31) в виде

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 + x_4, \\ x_1 - x_2 = -x_3 - 2x_4 + 4, \end{cases}$$

найдем ее частное решение C_0, положив, например, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Имеем

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 4. \end{cases}$$

Отсюда $C_0 = \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 0\right)$. Таким образом, общее решение C системы (2.31) имеет вид $C = \alpha_1\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right) + \alpha_2(-1, 1, 0, 1) + \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 0\right)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in R$.

Пример 2.12.Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|cc} 7 & 9 & 9 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 2 & -12 & -14 & -14 & 14 \\ 0 & 1 & -5 & -5 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -5 & -6 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 8 & 9 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -5 & -6 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 8 & 9 & -7 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -8 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Матрица A приведена к частично мономиальной матрице, и, следовательно, исходной матричной уравнение равносильно двум матричным уравнениям с расширенными матрицами

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Первое матричное уравнение имеет общее решение: $X_1 = \begin{bmatrix} 1+8\alpha \\ -1-5\alpha \\ 1-2\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in R$, а второе $- X_2 = \begin{bmatrix} 1+8\beta \\ 1-5\beta \\ -1-2\beta \end{bmatrix}$, $\beta \in R$. Таким образом, $X = \begin{bmatrix} 1+8\alpha & 1+8\beta \\ -1-5\alpha & 1-5\beta \\ 1-2\alpha & -1-2\beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in R$.

Пример 2.13. Используя метод элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Решение.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

ЗАДАЧИ.

2.1. Следующие системы уравнений решить по формулам Крамера:

1) $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3, \\ 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+4x_2+5x_3+2x_4=20, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=11, \\ 7x_1+9x_2+10x_3+2x_4=40, \\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4=37; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+3x_4=10, \\ 5x_1+3x_2+5x_3+3x_4=16, \\ 5x_1+x_2+8x_3+6x_4=20, \\ 7x_1+3x_2+5x_3+3x_4=18; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=4, \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=1, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=-2, \\ x_1 \quad -2x_3-6x_4=-8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=-2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+3x_3-3x_4=10, \\ x_1-7x_2+x_3+8x_4=-4, \\ 2x_1+4x_2+x_3-6x_4=7, \\ 3x_1+4x_2+6x_3+5x_4=16; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=1, \\ a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b, \\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+\ldots+a_n^2x_n=b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1}x_1+a_2^{n-1}x_2+\ldots+a_n^{n-1}x_n=b^{n-1}; \end{cases}$

9) $\begin{cases} ix_1+(1+i)x_2+5x_3=i, \\ (1-i)x_1+4x_2+3x_3=i+5, \\ 5x_1+3x_2+(2-i)x_3=5i+3; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x_1+ix_2-2x_3=10, \\ x_1-x_2+2ix_3=20, \\ ix_1+3ix_2-(1+i)x_3=30. \end{cases}$

2.2. Следующие системы уравнений решить методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ -x+7y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3x+4y=-1, \\ 6x-8y=2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2y=0, \\ -4x+8y=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=5-3i, \\ 10x-6y=2+34i; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} -x+y=1+i, \\ 3x-3y=-3-3i; \end{cases}$

6) $\begin{cases} (1-i)x+3y=4+i, \\ (3-4i)x+(1+i)y=5+4i; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=9, \\ 4x_1-3x_2+4x_3=5, \\ 3x_1-4x_2+x_3=0; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=7, \\ -x_1-2x_2+3x_3=0 \\ 8x_1+12x_2-8x_3=2; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4=0, \\ 3x_1+x_2+6x_3+7=0; \end{cases}$

10) $\begin{cases} (2+i)x_1+ix_2+3x_3=-2-4i, \\ 3ix_1+2x_2-(1-i)x_3=-1-4i; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-3x_4=1, \\ x_1+4x_2-x_3-2x_4=-2, \\ x_1-4x_2+3x_3-2x_4=-2, \\ x_1-8x_2+5x_3-2x_4=-2; \end{cases}$

12) $\begin{cases} -x_1-2x_2+2x_3-4x_4=-7, \\ 3x_1+7x_2-2x_3+2x_4=12, \\ 4x_1-5x_2+x_3+9x_4=-4, \\ 9x_1+7x_2 \quad +9x_4=11; \end{cases}$ 13) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=7, \\ 4x_1+4x_2+4x_3+6x_4=14. \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=6, \\ -8x_1-6x_2-4x_3-2x_4=-36; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 7x_1-5x_2-2x_3-4x_4=8, \\ -3x_1+2x_2+x_3+2x_4=-3, \\ 2x_1-x_2-x_3-2x_4=1, \\ -x_1 \quad +x_3+2x_4=1, \\ \quad -x_2+x_3+2x_4=3; \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 4x_1+4x_2-7x_3+6x_4+10x_5=3, \\ 2x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=1, \\ 8x_1+8x_2-5x_3+12x_4+18x_5=5, \\ 10x_1+12x_2-16x_3+20x_4+23x_5=4; \end{cases}$

$$16)\ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \quad + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 0, \\ x_1 + 9x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 = 0, \\ \quad 5x_2 + x_3 - x_4 \quad - x_6 = 0, \\ \quad 3x_2 \quad - x_4 - x_5 \quad = 0; \end{cases} \quad 17)\ \begin{cases} \quad x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0, \\ x_1 \quad + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1, \\ x_1 + x_2 \quad + \ldots + x_{n-1} + x_n = 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots \quad + x_n = n-2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} \quad = n-1; \end{cases}$$

2.3. Решить матричные уравнения:

$$1)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix};\ 2)\ X \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$3)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix};\ 4)\ X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$5)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix};$$

$$6)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$7)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix};\ 8)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$9)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$10)\ X \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix};$$

$$11)\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix};\ 12)\ X \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix};$$

$$13)\ \begin{bmatrix} 2+i & 4 \\ 1-2i & 3+5i \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} i \\ 1-i \end{bmatrix};\ 14)\ X \begin{bmatrix} 3 & i & 0 \\ -i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i & 4 & 3 \\ i & 1+i & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4. Решить систему матричных уравнений

$$\begin{cases} X \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 9 & 11 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

2.5. Исследовать совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - 6x_2 + 13x_3 - 9x_4 = 6; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2,\\ x_1-x_2+x_3=0,\\ x_1+3x_2-x_3=-2,\\ 3x_1+4x_2+3x_3=0; \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0,\\ x_1-x_2+x_3+2x_4=4,\\ x_1+5x_2+5x_3-4x_4=-4,\\ x_1+8x_2+7x_3-7x_4=6; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} 7x_1-4x_2-6x_3+5x_4=4,\\ 4x_1-x_2-3x_3-7x_4=-5,\\ 5x_1-2x_2-4x_3-3x_4=-2; \end{cases} \quad 6)\ \begin{cases} x_1-3x_2-14x_3-3x_4=8,\\ 2x_1-3x_2-x_3-6x_4=-5,\\ 3x_1-5x_2-6x_3-9x_4=-4; \end{cases}$$

$$7)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+2x_4-x_5=2,\\ 2x_1+4x_2+5x_3+6x_4-3x_5=3,\\ 4x_1+8x_2+13x_3+6x_4-3x_5=9,\\ x_1+x_2+2x_3+4x_4-2x_5=1; \end{cases} \quad 8)\ \begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3+x_4+3x_5=4,\\ 6x_1-4x_2+x_3+3x_4+5x_5=5,\\ 2x_1-4x_2+x_3+x_4+7x_5=11,\\ 4x_1-3x_2+2x_3+3x_4+2x_5=6; \end{cases}$$

$$9)\ \begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3+5x_4=3,\\ 3x_1+7x_2-2x_3+4x_4=1,\\ -x_1-5x_2-6x_3+8x_4=9; \end{cases} \quad 10)\ \begin{cases} 30x_1+40x_2+41x_3+14x_4+24x_5=28,\\ 45x_1+61x_2+62x_3+21x_4+36x_5=43,\\ 60x_1+82x_2+83x_3+28x_4+48x_5=58; \end{cases}$$

$$11)\ \begin{cases} 8x_1+4x_2+x_3+2x_4=-1,\\ 2x_1-6x_2+3x_3+x_4=3,\\ -2x_1+2x_2-2x_3+3x_4=8; \end{cases} \quad 12)\ \begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=2,\\ x_1-x_2+3x_3=-2,\\ x_1+x_2-x_3=0,\\ 3x_1+3x_2+4x_3=0; \end{cases}$$

$$13)\ \begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=4,\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=0,\\ 5x_1+x_2-4x_3+5x_4=-4,\\ 7x_1+x_2-7x_3+8x_4=-8. \end{cases}$$

2.6. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ :

$$1)\ \begin{cases} x_1-3x_2-4x_3-2x_4=-5,\\ 3x_1-7x_2-8x_3-6x_4=-9,\\ 2x_1-5x_2-6x_3-4x_4=-7,\\ 4x_1-9x_2-10x_3-\lambda x_4=-11; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x_1+4x_2+7x_3+14x_4=4,\\ 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4=4,\\ 3x_1+2x_2+\lambda x_3-3x_4=7,\\ x_1+x_2+3x_3+5x_4=2; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 3x_1+x_2=1,\\ 7x_1+5x_2+2x_3=\lambda,\\ 2x_1+2x_2+x_3=1; \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=5,\\ 4x_1+3x_2+3x_3=\lambda,\\ 3x_1+2x_2+2x_3=1; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} 2x_1+4x_2+3x_3=2,\\ 7x_2+4x_3=\lambda,\\ 4x_1+x_2+2x_3=4; \end{cases} \quad 6)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1,\\ x_1+3x_2+5x_3=3,\\ x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=2. \end{cases}$$

2.7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_1+2x_2-x_3-x_4=0,\\ 7x_1+11x_2-x_3-x_4=0,\\ 9x_1+14x_2-x_3-x_4=0; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3+4x_4+6x_5=0,\\ 6x_1+8x_2+5x_3+5x_4+5x_5=0,\\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4+4x_5=0; \end{cases}$$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 18x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 10x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 7x_3 - x_4 - 6x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 9x_4 - 9x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 - 6x_5 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.8. Какие из строк матрицы

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & -6 & -8 & 0 \\ 7 & -3 & 2 & -6 & -2 \\ 4 & -7 & 6 & -5 & -3 \\ 7 & 7 & -5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 8x_5 = 0? \end{cases}$$

2.9. Найти однородную систему линейных уравнений, для которой система векторов $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 0, -1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 0, 4, -2, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, -2, 1, -3)$ является фундаментальной системой решений и которая состоит: 1) из двух уравнений; 2) из трех уравнений.

2.10. Доказать, что если ранг однородной системы уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то любые два решения системы пропорциональны.

2.11. Найти условия, при которых данная линейная комбинация любых решений данной неоднородной системы линейных уравнений является решением этой системы.

2.12. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; 2) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2.13. Исследовать совместность и записать общее решение неоднородной системы в виде суммы одного решения этой системы и линейной комбинации базисных решений приведенной однородной системы:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 20, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 10x_1 + 16x_2 + 19x_3 + 5x_4 = -2, \\ 5x_1 + 6x_2 + 13x_3 + 3x_4 = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4-x_5=2,\\ 2x_1-8x_2-7x_3-7x_4+7x_5=3,\\ 3x_1-6x_2-5x_3-5x_4+2x_5=7;\end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1,\\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,\\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = -3,\\ 2x_3 + x_4 + x_5 = 2,\\ x_4 + x_5 = -1.\end{cases}$

2.14. Найти необходимые и достаточные условия, при которых три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежат на одной прямой.

2.15. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы четыре точки плоскости (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), не лежащие на одной прямой, лежали на одной окружности.

2.16. Дать геометрическую интерпретацию случаев, встречающихся при решении систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными.

ОТВЕТЫ

2.1. 1) $(2,1,-3,1)$; 2) $(2,-1,0,-2)$; 3) $(0,2,2,1)$; 4) $(1,1,1,1)$; 5) $(-2,1,0,1)$; 6) $(0,1,1,0)$; 7) $(3,2,-1,1)$; 8) $x_i = \prod\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{b-a_i}{a_i-a_j} \prod\limits_{\gamma=i+1}^{n} \dfrac{a_\gamma - b}{a_\gamma - a_i}$, $i=\overline{1,n}$, где $\prod\limits_{j=1}^{0}(\cdot) = \prod\limits_{\gamma=n+1}^{n}(\cdot) = 1$; 9) $(i,1,0)$; 10) $(3-11i, -3-9i, 1-7i)$.

2.2. 1) (1,1); 2) $\left(\alpha, -\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\alpha\right)$, $\alpha\in R$; 3) система несовместна; 4) $(2+i, 3-4i)$; 5) $(\alpha, 1+i+\alpha)$, $\alpha \in C$; 6) $(i,1)$; 7) $(1,1,1)$; 8) система несовместна; 9) $\left(-2-\dfrac{12}{5}\alpha, -1+\dfrac{9}{5}\alpha, \alpha\right)$, $\alpha\in R$; 10) $\left(\beta, -\dfrac{29+53i}{50}\beta - \dfrac{77+89i}{50}, -\dfrac{51+7i}{50}\beta - \dfrac{63+41i}{50}\right)$, $\beta \in R$; 11) $(-8, 3+\alpha, 6+2\alpha, \alpha)$, $\alpha\in R$; 12) $\left(\dfrac{37}{137}, \dfrac{133}{137}, -2, \dfrac{27}{137}\right)$; 13) $(2,1,5,-3)$; 14) $(2,0,3-2\alpha,\alpha)$, $\alpha\in R$; 15) $\left(\alpha+\dfrac{3}{4}, -\dfrac{5}{2}\alpha-\dfrac{5}{4}, 0, \alpha, \dfrac{1}{2}\right)$, $\alpha\in R$; 16) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, -\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3)$; 17) $x_k = \dfrac{n}{2}-k+1$, $k=\overline{1,n}$.

2.3. 1) $\begin{bmatrix} -1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$; 2) $\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 14 & 11\\ -2 & 7\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta\\ 2\alpha-2 & 2\beta+1\end{bmatrix}$, $\alpha,\beta\in R$; 4) не имеет решений; 5) $\begin{bmatrix} 2+\beta_1-2\alpha_1 & \beta_1\\ \beta_2+\alpha_1 & \beta_2\end{bmatrix}$, $\alpha_1,\beta_1,\beta_2\in R$; 6) $\begin{bmatrix} 24 & 13\\ -34 & -18\end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} -1 & 0\\ -2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$; 8) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{9}{2} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2}\end{bmatrix}$; 9) $\varnothing$; 10) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$; 11) $\begin{bmatrix} 1+\dfrac{\alpha}{2} & -1+\dfrac{\beta}{2}\\ -1-\dfrac{3\alpha}{2} & 2-\dfrac{3\beta}{2}\\ \alpha & \beta\end{bmatrix}$, $\alpha,\beta\in R$;

12) $\dfrac{1}{33}\begin{bmatrix} 9 & 21 & 0\\ 36 & -4 & -11\end{bmatrix}$; 13) $\dfrac{1}{450}\begin{bmatrix} 174+168i\\ -45+(-15)i\end{bmatrix}$;

14) $\dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} 6+2i & 22-2i & 24 \\ -2+8i & 8+6i & 40 \\ 30 & -10i & 0 \end{bmatrix}$.

2.4. $\begin{bmatrix} 7-3\alpha & \alpha & 5\alpha-9 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7-3\alpha & \alpha & 5\alpha-7 \end{bmatrix}$, $\alpha \in R$.

2.5. 1) Общее решение: $\left(\frac{6}{5}-\alpha+\frac{3}{5}\beta, -\frac{4}{5}+2\alpha-\frac{7}{5}\beta, \alpha, \beta\right)$, частное решение: $\left(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}, 0, 0\right)$; 2) общее решение: $(-7-9\beta, -13+3\alpha-13\beta, \alpha, \beta)$, частное решение: $(-7, -13, 0, 0)$; 3) система имеет единственное решение решение: $(-1, 0, 1)$; 4) система несовместна; 5) общее решение: $(-2\alpha+19\beta-14, \alpha, -3\alpha+23\beta-17, \beta)$, частное решение: $(-14, 0, -17, 0)$; 6) общее решение: $(-13\alpha+13\beta-13, -9\alpha-7, \alpha, \beta)$, частное решение: $(-13, -7, 0, 0)$; 7) общее решение: $(-8\alpha-4\beta-1, 0, 2\alpha-\beta+1, \alpha, \beta)$, частное решение: $(-1, 0, 1, 0, 0)$; 8) общее решение: $(\alpha, 2\beta-\frac{7}{2}, -2\alpha-\beta-\frac{9}{2}, 2\beta+\frac{3}{2}, \beta)$, частное решение: $\left(0, -\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$; 9) общее решение: $\left(\frac{13}{2}\alpha-\frac{19}{2}\beta+\frac{17}{2}, -\frac{5}{2}\alpha+\frac{7}{2}\beta-\frac{7}{2}\alpha, \beta\right)$, частное решение: $\left(\frac{17}{2}, -\frac{7}{2}, 0, 0\right)$; 10) общее решение: $\left(\frac{7}{5}\alpha-\frac{7}{15}\beta-\frac{4}{5}\gamma-\frac{9}{5}, \alpha, -2\alpha+2, \beta, \gamma\right)$, частное решение: $\left(-\frac{9}{5}, 0, 2, 0, 0\right)$; 11) общее решение: $\left(-\frac{19}{8}\alpha+\frac{21}{4}, \frac{21}{8}\alpha-\frac{27}{4}, \frac{13}{2}\alpha-16, \alpha\right)$, частное решение: $\left(\frac{21}{4}, -\frac{27}{4}, -16, 0\right)$; 12) общее решение: система имеет единственное решение: $(-1, 1, 0)$; 13) общее решение: $\left(\alpha, -\frac{5}{3}\alpha-\beta+\frac{8}{3}, \beta, -\frac{2}{3}\alpha+\beta-\frac{4}{3}\right)$, частное решение: $\left(0, \frac{)8}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right)$.

2.6. 1) Система совместна при любом значении λ, при $\lambda=8$ общее решение имеет вид $(-2\alpha+2\beta+4, -2\alpha+3, \alpha, \beta)$, при $\lambda \neq 8$ общее решение имеет вид $(-2\alpha+4, -2\alpha+3, \alpha, 0)$; 2) при $\lambda=1$ система несовместна, при $\lambda \neq 1$ она совместна и общее решение имеет вид $\left(\alpha, -\frac{9}{8}\alpha+\frac{43-8\lambda}{8-8\lambda}, \frac{5}{\lambda-1}, \frac{1}{4}\alpha+\frac{5}{4-4\lambda}\right)$; 3) при $\lambda \neq 3$ система несовместна, при $\lambda=3$ она совместна и общее решение имеет вид $\left(\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\alpha+\frac{1}{4}, \alpha\right)$; 4) при $\lambda \neq -3$ система несовместна, при $\lambda=-3$ она совместна и общее решение имеет вид $(9, -\alpha-13, \alpha)$; 5) при $\lambda \neq 0$ система несовместна, при $\lambda=0$ она совместна и общее решение имеет вид $\left(\frac{5}{8}\alpha+1, \alpha, -\frac{7}{4}\alpha\right)$; 6) при $\lambda=0$ система несовместна, при $\lambda \neq 0$ она имеет единственное решение: $\left(-3+\frac{3}{\lambda}, 2-\frac{6}{\lambda}, \frac{3}{\lambda}\right)$.

2.7. 1) Общее решение: $(-\frac{3}{2}\alpha, \alpha, \frac{1}{2}\alpha-\beta, \beta)$, базис подпространства решение: $((-3, 2, 1, 0), (0, 0, -1, 1))$; 2) общее решение: $(-3\alpha-30\beta, \alpha, 2\alpha+29\beta, 5\beta, 2\beta)$, базис подпространства решение: $((-3, 1, 2, 0, 0), (-30, 0, 29, 5, 2))$; 3) общее решение: $(-8\alpha-\beta,\alpha,-13\alpha+3\beta,\beta)$, базис подпространства решений: $((-8,1,-13,0),(-1,0,3,1))$; 4) общее решение: $(\alpha,0,\beta,-3\alpha-5\beta,2\alpha+3\beta)$, базис подпространства решений: $((1,0,0,-3,2),(0,0,1,-5,3))$; 5) общее решение: $(11\alpha,11\beta,3\alpha-10\beta-9\gamma,\alpha+4\beta-3\gamma,11\gamma)$, базис подпространства решений: $((11,0,3,1,0),(0,11,-10,4,0),(0,0,-9,-3,11))$; 6) общее решение: $(\alpha,-3\alpha,-3\alpha,7\alpha,\alpha)$, базис подпространства решений состоит из одного вектора $(1,-3,-3,7,1)$.

2.8. Четвертая строка вместе с любыми двумя из первых трех строк образуют базис подпространства решений, а остальные подсистемы строк не образуют базиса.

2.9. 1) Например, $\begin{cases} 5x_1-2x_2+2_3+x_4+2x_5=0, \\ -2x_1+2x_2+x_3=0; \end{cases}$ 2) чтобы получить ответ, можно к системе 1) дописать линейную комбинацию уравнений этой системы.

2.11. При условии, что сумма коэффициентов данной линейной комбинации равна единице.

2.12. 1) Общий вид решения: $\begin{bmatrix} 2+2\alpha & 4+2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$, где α и β — произвольные числа поля, над которым взята исходная матрица; 2) нет решений; 3) нет решений; 4) общий вид любого решения: $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, где $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$.

2.13. 1) $(2,0,0,6)+\left(\frac{1}{2},-1,0,\frac{3}{2}\right)\alpha+(2,0,-1,1)\beta$; 2) $(-3,0,2,-2)+(-2,1,1,-3)\alpha$; 3) $(5,0,2,0,1)+(0,0,-1,1,0)\alpha+(7,7,-3,0,3)\beta$; 4) $(1,0,\frac{3}{2},-6,5)+(1,1,0,1,-1)\alpha$, $\alpha,\beta\in R$.

2.14. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

2.15. $\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: "Наука 1967г., 575с.

2. Ильин В.А. Линейная алгебра. / Ильин В.А., Позняк Э.Г. М: "Наука 1981г., 294с

3. Милованов М.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. I. / Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. - Мн., "Выш. школа 1976г., 544с.

4. Милованов М.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. II. / Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Мн., "Выш. школа 1984г., 302с.

5. Размыслович Г.П. Геометрия и алгебра. / Размыслович Г.П., Феденя М.М., Ширяев В.М. Мн., "Университетское 1987г., 350с.

6. Размыслович Г.П. Сборник задач по геометрии и алгебре. / Размыслович Г.П., Феденя М.М., Ширяев В.М. Мн., "Университетское 1999г., 384с

8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: "Наука 1978г., 384с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Размыслович Георгий Прокофьевич

Геометрия и алгебра

В пяти частях

Часть 1

МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пособие
для студентов факультета
прикладной математики и информатики

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *Г. П. Размыслович*

Подписано в печать 27.10.2010 Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 4,42. Уч.-изд. л. 3,8
Тираж 50 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0056804 от 02.03.2010
Пр. Независимости, 4. 220030, Минск.

Отпечатано с оригинала – макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
Пр. Независимости, 4. 220030, Минск.