УДК 517.537.38:519.2

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ОБНАРУЖЕНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕЙВЛЕТ–ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

М. С. Абрамович, Е. А. Миротин

ВВЕДЕНИЕ

Для выявления локальных особенностей функций (разрывов функций и ее производных) широко применяется вейвлет - анализ [1-3]. Подход, основанный на применении вейвлет-анализа, заключается в том, что, согласно [1], абсолютные значения вейвлет-коэффициентов в силу свойства локальности вейвлет - преобразования имеют максимальные значения в момент, соответствующий разрыву функции или ее производных – в момент разладки. Отметим, что широкое распространение для обнаружения особенностей функций на основе вейвлет-анализа получил алгоритм, предложенный в работе [2]. Однако, в алгоритме обнаружен недостаток, который при определенных условиях не позволяет обнаруживать моменты разладок.

В работе предложен вариант корректировки алгоритма из [2] с использованием алгоритма, основанного на статистиках от спектральных плотностей. Проведено исследование эффективности модифицированного алгоритма методом статистического моделирования.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке [*0, 1*] и является α-непрерывной в смысле Гёльдера всюду за исключением окрестности неизвестной точки $\theta \in (0,1)$. Как известно [2], функция $f(\cdot)$ является непрерывной в смысле Гёльдера на отрезке [*a, b*] с показателем α, если существует константа *L*, что

$$\forall x, y \in [a,b] \left\| f(x) - f(y) \right\| \le L \left\| x - y \right\|^{\alpha}.$$

Пусть имеется выборка наблюдений значений функции на равномерной сетке при наличии случайного шума:

$$y_i = f\left(\frac{i}{n}\right) + \xi_i, i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где $\xi_i \sim N(0, \sigma^2)$ – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и постоянной дисперсией σ^2.

В соответствии с [2] определим дискретное вейвлет-преобразование выборки (1) следующим образом:

$$d_{j,k}^{(\psi)} = \sum_{i=1}^{n} y_i \psi_{j,k}(i), \tag{2}$$

где семейство вейвлетов

$$\psi_{j,k}(i) = 2^{j/2} \psi(2^j i - k) \tag{3}$$

получается из одной локализованной функции $\psi(i)$ (базисного вейвлета) путем дискретных масштабных преобразований $(1/2^j)$ и сдвигов $(k/2^j)$, $j -$ уровень разрешения, $k -$ величина сдвига, $j, k \in Z$

Необходимо по выборке (1) оценить момент разладки θ с использованием вейвлет-преобразования (2), (3).

ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНКИ МОМЕНТА РАЗЛАДКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Один из подходов для обнаружения разладок состоит в том, что если рассматриваемая выборка (1) их не содержит, то вейвлет-коэффициенты на каждом уровне разрешения не превосходят заданного порогового значения [5]. Чтобы не сравнивать значения вейвлет-коэффициентов с определенным порогом, будем рассматривать разности соседних коэффициентов на уровнях разрешения и определим величину сдвига k, для которой разность является максимальной. Эта величина сдвига и будет соответствовать моменту разладки.

Пусть $N=[\alpha]$. Как известно [1] , базисный (материнский) вейвлет удовлетворяет следующим условиям: 1) ψ имеет N нулевых моментов; 2) ψ имеет положительный N момент и конечный абсолютный N момент; 3) компактный носитель функции ψ содержится в отрезке [-*N*, *N*]. Первым двум условиям удовлетворяют вейвлеты Добеши порядка *D=2N*. Однако область компактного задания таких вейвлетов – отрезок [*0*, *D-1*]. Поэтому рассмотрим сдвиг классического вейвлета Добеши, в результате чего получим область компактного задания [-*N+1/2*, *N-1/2*].

Процедура определения момента разладки состоит из двух этапов: на первом этапе определяется приближенная оценка и на втором этапе происходит ее уточнение.

Вычисление приближенной оценки момента разладки на **первом этапе** состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Вычисляются следующие суммы:

$$\Delta_{j,k}^{(l)}=\frac{1}{n}\sum_{l}\psi_{j,k}^{(l)}(i/n)y_i, \tag{4}$$

где $\sum_{l}, l=1,2$ означает суммирование по выборке значений функции (1) с нечетными и четными индексами;

$$\psi_{j,k}^{(1)}=\psi_{j,\tau(k)}-\psi_{j,\tau(k+2)},\ \tau(k)=\begin{cases}2Nk+N,\ N>1,\\ k,\ N\le 1,\end{cases} \tag{5}$$

$$\psi_{j,k}^{(2)}=\psi_{j,m-\tau(k)}+\psi_{j,m+\tau(k)}. \tag{6}$$

Суммирование по нечетным и четным значениям временного ряда проводится для того, чтобы исключить зависимость статистик (4) между двумя этапами процедуры. Параметр m из (6) определяется на втором этапе.

Шаг 2. Выбирается такой уровень разрешения j_1, чтобы обеспечить достаточную точность оценивания момента разладки и определяется значение величины сдвига $\hat{k}_0$:

$$\hat{k}_0=\arg\max_{k}\left|\Delta_{j_1,k}^{(1)}\right|,\ k=0,\dots,K=(2^{j_1}-6N)/2N.$$

Шаг 3 . Определяется приближенная оценка момента разладки: $\hat{\theta}_0=\frac{\hat{k}_0}{2^{j_1}}$.

На **втором этапе** процедуры полученная оценка момента разладки $\hat{\theta}_0$ уточняется следующим образом.

Шаг 1. Задается уровень разрешения $j_2>j_1$. В данном случае k изменяется от *0* до $N_0=12N2^{j_2-j_1}$. Параметр m в (6) зависит от оценки момента разладки, найденной на первом этапе, и полагается равным $m=\left[2^{j_2}\hat{k}_0-6N2^{-j_1}\right]$.

Шаг 2. Строятся случайные величины:

$$\eta_k = 1\left\{\left|\Delta^{(2)}_{j_2,k}\right| > Cn^{-1/2}\right\},\ k = 0,...,N_0 - 1, \tag{7}$$

где параметр C рекомендуется выбирать следующим образом [2]:

$$C = \sigma\sqrt{(j_2 - j_1)\ln 2}. \tag{8}$$

Случайные величины η_k, $k = 0,...,N_0 - 1$, являются независимыми и имеют распределение Бернулли. Уровень разрешения j_2 с использованием точек $U_0,...,U_k,...,U_{N_0}$ разобьем на отрезки, где отрезок $[U_k, U_{k+1}]$ является областью компактного задания функции $\psi_{j_2,\tau(k)+m}$. Будем полагать, что искомый момент разладки попадает в полуинтервал $\left[U_{k_0}, U_{k_0+1}\right]$. Тогда до момента разладки значение случайной величины η_k будет равно 0, а после момента разладки – 1.

Шаг 3. Минимизируется следующее выражение:

$$\sum_{k=0}^{v}\eta_k + \sum_{k=v+1}^{N_0-1}(1-\eta_k). \tag{9}$$

Пусть оно достигает своего минимума при $v = \hat{k}_1$. В качестве уточненной оценки момента разладки принимается $\hat{\theta} = U_{\hat{k}_1}$. В случае применения вейвлетов Добеши оценка момента разладки определяется следующим образом:

$$\hat{\theta} = \frac{-N + 0.5 + \tau(\hat{k}_1) + m}{2^{j_2}}. \tag{10}$$

Однако, как показывает следующее утверждение, оценка момента разладки в алгоритме должна удовлетворять определенному условию, которое не отмечено в [2].

Утверждение. *Оценка момента разладки (10) при* $n \to \infty$ *удовлетворяет неравенству* $\hat{\theta} \le 1/2N$.

Доказательство. Рассмотрим два случая $N = 1$ и $N > 1$.

1. $N = 1$. С учетом (5), (10) последовательно имеем:

$\hat{\theta} = (-N + 0.5 + \tau(\hat{k}_1) + m)/2^{j_2} = (-0.5 + \hat{k}_1 + m)/2^{j_2} \le (0.5 + \hat{k}_1 + 2^{j_2}\hat{\theta}_0 - 62^{-j_1})/2^{j_2} =$

$= (0.5 + \hat{k}_1 + \hat{k}_0 2^{j_2 - j_1} - 62^{-j_1})/2^{j_2} \le (0.5 + N_0 + K2^{j_2 - j_1} - 62^{-j_1})/2^{j_2} =$

$= (0.5 + 12 \cdot 2^{j_2 - j_1} + (2^{j_1} - 6)2^{j_2 - j_1}/2 - 62^{-j_1})/2^{j_2} = 0.5/2^{j_2} + 12/2^{j_1} + 0.5 - 3/2^{j_1} -$

$-6/2^{j_2 + j_1} \le 0.5 + 12.5/2^{j_1}.$

2. $N > 1$. Тогда аналогично случаю 1) последовательно имеем:

$\hat{\theta} = (-N + 0.5 + \tau(\hat{k}_1) + m)/2^{j_2} = (-N + 0.5 + 2N\hat{k}_1 + N + m)/2^{j_2} \le$

$\le (1.5 + 2NN_0 + K2^{j_2 - j_1} - 6N2^{-j_1})/2^{j_2} = (1.5 + 12N^2 2^{j_2 - j_1} + (2^{j_1} - 6N)2^{j_2 - j_1}/2N -$

$-6N2^{-j_1})/2^{j_2} = 1.5/2^{j_2} + 12N^2/2^{j_1} + 1/2N - 3/2^{j_1} - 6N/2^{j_2 + j_1} < 1/2N +$

$+(12N^2 + 1.5)/2^{j_1} \le 1/2N + (12N^2 + 1.5)/2^{j_1}.$

При $n \to \infty$ $j_1 \to \infty$, поэтому правые части выражений, полученные для случаев $N = 1$ и $N > 1$ не превышают $1/2N$.

Таким образом, из утверждения следует, что значение уточненной оценки момента разладки не превышает $1/2N$. Если предположить, что $\theta < 1/2N$, то рассмотренный выше алгоритм позволяет получить оценку момента разладки θ. Нарушение этого условия не позволит оценить моменты разладок.

В связи с этим необходимо провести модификацию алгоритма, заключающуюся в предварительной обработке выборки (1), с целью локализации момента разладки в соответствии с утверждением.

АЛГОРИТМ ЛОКАЛИЗАЦИИ МОМЕНТА РАЗЛАДКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕКТРАЛЬНЫХ СТАТИСТИК

Для локализации момента разладки рассмотрим взвешенную статистику различия непараметрических оценок спектральных плотностей $\hat{S}_1(\lambda_s)$ и $\hat{S}_2(\lambda_s)$, вычисленных по первой и второй половинах фрагмента заданной длины M выборки (1) с серединой в точке η:

$$\hat{V}^2(\eta) = \frac{\sum_{s=1}^{l}\left(\hat{S}_1(\lambda_s) - \hat{S}_2(\lambda_s)\right)^2}{\sum_{s=1}^{l}\left(\hat{S}_1^2(\lambda_s) + \hat{S}_2^2(\lambda_s)\right)}, \quad (11)$$

где $\{\lambda_1,...\lambda_l\} \in [-\pi,\pi]$ – заданный набор l частот, такой что $\sum_{s=1}^{l}\left(S_1(\lambda_s) - S_2(\lambda_s)\right)^2 > 0$, $S_1(\lambda_s), S_2(\lambda_s)$ – истинные значения спектральных плотностей.

В [4] найдено распределение статистики (11) и построен следующий критерий обнаружения разладки:

$$\text{принимается гипотеза} \quad \begin{cases} H_0, \ \text{если} \ \hat{V}^2(\eta) < \delta_\varepsilon, \\ H_1, \ \text{если} \ \hat{V}^2(\eta) \ge \delta_\varepsilon, \end{cases} \quad (12)$$

где пороговое значение δ_ε для заданного уровня значимости ε приведено в [4].

Кроме того, в [4] доказано, что статистика (11) достигает максимума в момент разладки. На основании критерия (12) и свойства максимума статистики (11) рассмотрим следующий алгоритм обнаружения момента разладки.

Шаг 0. Задается длина скользящего окна *M*, величина сдвига окна d по выборке (1) и число частот l, для которых вычисляются оценки спектральных плотностей.

Шаг 1. Вычисляются оценки спектральных плотностей $\hat{S}_1(\lambda_s),\ \hat{S}_2(\lambda_s),\ s=1,...,l$ по первой и второй половинам скользящего окна $x_{\eta-u},...,x_\eta,...,x_{\eta+u}$ фиксированного объема $M = 2u+1$ (u – параметр) и статистика $\hat{V}^2(\eta)$ в соответствии с (11).

Шаг 2. Производится смещение скользящего окна по выборке значений последовательности (1) на величину сдвига d и, если скользящее окно не достигло конца выборки, то переход на Шаг 1, иначе на Шаг 3.

Шаг 3. Определяется значение $\eta_{\max} = \arg \max\limits_{\eta=\eta_-,...\eta_+} \hat{V}^2(\eta)$, где $1 < \eta_- < \eta < \eta_+ < n$–некоторые априорно заданные граничные значения.

Если $\hat{V}^2(\eta_{\max}) > \delta_\varepsilon$, то значение $\eta_{\max}$ позволяет локализовать момент разладки θ.

Рассмотрим случай локализации момента разладки для N = 1. Разобьем исходную выборку на 4 равные части. С помощью оконного алгоритма локализуем момент разладки θ в окне размера *n*/4. Если момент разладки θ находится в 1-й части, уменьшим выборку в два раза, оставив только 1-ю и 2-ю части. Аналогично поступим, если θ расположен во 2-й или 3-й частях. Если же θ расположен в 4-й части, выберем 3-ю и 4-ю части и совершим их инверсию. Очевидно, что такая операция не нарушает предположений относительно исходной выборки.

Таким образом, получим новую выборку, в которой момент разладки гарантированно находится в ее первой половине, т.е. выполняется условие $\theta < 1/2N$.

Если $N > 1$, то можно взяв разности соответствующего порядка для выборки (1), свести задачу к случаю $N = 1$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для исследования эффективности алгоритма из [2] и модифицированного алгоритма генерировались выборки состоящие из двух фрагментов, описываемых различными полиномами, до и после момента разладки θ.

$$y_i = \begin{cases} P_1(i/n) + \xi_i, i < \theta, \\ P_2(i/n) + \xi_i, i \geq \theta, \end{cases}$$

где $P_1(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 1,\ P_2(x) = x^4 + 3x^2 - 2x - 2,\ \xi_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Длина выборки значений функций полагалась равной $n = 1024$. Значение дисперсии $\sigma^2 = 0.2$. Моменты разладок принимали значения как из первой, так и из второй половины выборки. В качестве анализирующего вейвлета использовался вейвлет Добеши порядка $N = 1$ (вейвлета Хаара). Погрешность вычисления оценки момента разладки определялась по формуле $\delta = \dfrac{\theta - \hat{\theta}}{n}$.

В таблице приведены результаты тестирования алгоритма из [2] и модифицированного алгоритма.

Таблица

Момент разладки θ	**Алгоритм из [2]**		**Модифицированный алгоритм**	
	Оценка $\hat{\theta}$	**Погрешность δ**	**Оценка $\hat{\theta}$**	**Погрешность δ**
102	99	0.029412	99	0.002930
204	203	0.004902	201	0.002930
307	305	0.006515	307	0.000000
409	409	0.000000	407	0.001953
512	217	0.576172	511	0.000977
614	188	0.416016	615	0.000977
716	252	0.453125	715	0.000977
819	407	0.402344	817	0.001953
921	414	0.495117	921	0.000000

Как видно из таблицы, алгоритм, приведенный в работе [2], практически безошибочно оценивает моменты разладок только тогда, когда они расположены в первой половине выборки. Модифицированный алгоритм одинаково точно определяет моменты разладок вне зависимости от истинного положения момента разладки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. 20001. Т. 171. № 5, с. 465-501.
2. Raimondo M. Minimax estimation of sharp change points // The Annals of Statistics. 1998. Vol. 26. № 4, p. 1379-1397.
3. Wang Y. Jump and sharp cusp detection by wavelets// Biometrika. 1995. № 82, p. 385-397.
4. Kharin Yu.S., Abramovich M.S. Detection of spectral change-point in a two-dimensional time series // Optoelectronics, Instrumentations and Data Processing. 1999. №2, p. 45-53.
5. . Donoho D. L. and Johnstone I. M. Minimax Estimation via Wavelet shrinkage // Annals of Statistics. 1998. Vol. 26. № 3, p. 879-921.