УДК 519.62

В. В. БОБКОВ, Н. А. БОБКОВА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

A new class of explicit methods for numerical solution of systems of ordinary differential equations (including stiff systems) is proposed. These methods are oriented to the procedure of linearization of autonomous systems at each step of integration. In this class a degree of approximating matrix polynomial for a given step of integration is controlling parameter.

При разработке методов численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u' = f(u), \tag{1}$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)^T$, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, $f_i = f_i(u)$, $u_i = u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, определяющим фактором (особенно в случае жестких [1] систем) часто является не столько достижение высокого порядка аппроксимации дифференциальной задачи разностной, сколько обеспечение должного уровня согласованности в качественном поведении решений этих задач (см., напр., [2]). При этом обычно условия такой согласованности формулируются применительно к системе

$$u' = Au + a \tag{2}$$

с постоянными матрицей A и вектором a. Такой выбор обусловлен не только наличием богатой информации о структуре решений, но, главным образом, тем, что системы именно такого типа возникают при пошаговой линеаризации (1), что часто кладут в основу стратегии разработки вычислительного алгоритма. Актуальность численных методов, ориентированных на системы вида (2), обусловливается, кроме того, и прямым выходом таких методов через идею установления на основные задачи линейной алгебры, имеющие в вычислительной практике наиболее широкое распространение.

Учитывая, что на шаге $\tau > 0$ значения точного решения системы (2) связаны соотношением

$$u(t+\tau) = \exp(A\tau)u(t) + \int_0^\tau \exp(Ax)dx a, \tag{3}$$

приближенное решение можно искать в виде

$$\hat{y} = E(A, \tau)y + S^*(A, \tau)a, \tag{4}$$

где $y \approx u(t)$, $\hat{y} \approx u(t+\tau)$, а матрицы $E(A, \tau)$ и $S^*(A, \tau)$ являются некоторыми аппроксимациями соответственно матричной экспоненты и интеграла от нее из (3). Однако даже при очень высоких порядках погрешностей таких аппроксимаций метод (4) может оказаться ущербным [3]. Чтобы предопределить более высокий уровень качественной согласованности разностного решения с точным, обратим внимание на локальную (на отрезке между соседними узлами сетки) согласованность дифференциальной и разностной задач. Для этого рассмотрим связанную с разностным решением (4) дифференцируемую функцию $z(x) = y(t+x)$ непрерывного аргумента $x \in [0, \tau]$ $(z(0) = y(t) = y,\ z(\tau) = y(t+\tau) = \hat{y})$:

$$y(t+x) = E(A, x)y + S^*(A, x)a, \quad E(A, 0) = I, \quad S^*(A, 0) = 0. \tag{5}$$

Здесь через 0 и I обозначены соответственно нулевая и единичная матрицы порядка n. Введем и понятие «локальной» производной $z'(x) = y'(t+x)$ (производной на шаге), которую в соответствии с соотношением

$$u'(t+x) = \exp(Ax)[Au(t) + a] \tag{6}$$

можно искать в виде:

$$y'(t+x) = E^*(A, x)(Ay + a), \quad E^*(A, 0) = I, \tag{7}$$

где $E^*(A, x)$, как и $E(A, x)$ в (5), является некоторым приближением к $\exp(Ax)$. Потребовав по аналогии с (3), (6) совпадения векторов, задаваемых по правилам (5), (7), приходим к следующим связям в пределах шага сетки между порождающими рассматриваемый метод операторами:

$$E(A, x) = I + S^*(A, x)A, \quad S^*(A, x) = \int_0^x E^*(A, \xi)d\xi. \tag{8}$$

Очевидно, что кажущееся на первый взгляд естественным (см. (3), (4)) соотношение

$$S^*(A, \tau) = \int_0^\tau E(A, x)dx$$

совместимо с (8) лишь в тривиальном случае $E(A,x) = \exp(Ax)$.

С учетом (8) при условии коммутативности $AE^*(A, x) = E^*(A, x)A$, что при аппроксимации $\exp(Ax)$ не является обременительным ограничением, можно в дополнение к (7) получить равенство

$$Ay(t+x) + a = E(A, x)(Ay + a). \tag{9}$$

Это позволяет для невязки $\delta(t+x) = Ay(t+x) + a - y'(t+x)$ приближенного решения $y(t+x)$ на исходной системе (2) записать:

$$\delta(t+x) = [E(A, x) - E^*(A, x)](Ay + a). \tag{10}$$

Равенства (7), (9), (10) дают достаточно информативное представление о локальном процессе искажения с ростом τ исходной системы (2) на приближенном решении (4) при выполнении требований (8). Этим же по построению закладывается и правильное положение равновесия в разностную аппроксимацию исходной системы (см. [4]). Дальнейшее повышение уровня согласованности дифференциальной и разностной задач (скажем, в рамках требований из [2]) может быть связано с выбором оператора $E^*(A, x)$. Один из вариантов такого выбора, ориентированный на случай отрицательных собственных значений $\lambda_i(\lambda_n < \lambda_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, недефектной матрицы A, и будет рассмотрен ниже. Он базируется на процедуре выделения из матричной экспоненты спектральной составляющей с многочленной аппроксимацией оставшегося множителя:

$$\begin{aligned} E^*(A, x) &= E^*_m(A, x) = \\ &= \left[I + \frac{x}{1!}(A + \mu I) + \ldots + \frac{x^m}{m!}(A + \mu I)^m\right]\exp(-\mu x), \quad \mu > 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Конкретное значение постоянной μ при этом может задаваться по-разному в зависимости от поставленной цели.

По построению (см. (11)) при любых фиксированных значениях μ и x

$$E^*_m(A, x) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \exp(Ax). \tag{12}$$

В соответствии с (8) по заданному (см. (11)) $E^*_m(A, x)$ строим

$$E_{m+1}(A, x) = I + S^*_m(A, x)A, \tag{13}$$

где

$$S^*_m(A, x) = \int_0^x E^*_m(A, \xi)d\xi. \tag{14}$$

Полученное при этом семейство методов (см. (4)) принимает вид:

$$\hat{y}^m = \hat{y} = y + S^*_m(A, \tau)(Ay + a). \tag{15}$$

Из (13), (14) с учетом (12) следует, что при любых фиксированных μ и x

$$S^*_m(A, x) \to \int_0^x \exp(A\xi)d\xi, \tag{16}$$

$$E_{m+1}(A, x) \to \exp(Ax), \tag{17}$$

когда $m \to \infty$, тем самым (см. (3), (4), (15)) и $y^m \to u(t+x)$, если $y = u(t)$.

Локальные свойства типа (12), (16), (17) еще не гарантируют высокий уровень согласованности даже в качественном поведении решений дифференциальной и соответствующей разностной задач. Как отмечено в [3], одной из наиболее важных характеристик такой согласованности применительно к (2), (15) является уровень спектральной согласованности $E_{m+1}(A, x)$ и $\exp(Ax)$. Для облегчения анализа такой согласованности введем понятие спектральной функции $E(\lambda, x)$ оператора $E(A, x)$. Функция $E(\lambda, x)$ как скалярная функция двух переменных λ и x должна удовлетворять условиям

$$E(A, x)\xi^i = E(\lambda_i, x)\xi^i, \; i = 1, 2 \ldots, n,$$

где ξ^i есть собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_i.

В рассматриваемом нами случае выбора (11) при любом фиксированном $x > 0$ и $\lambda \in [-\mu, 0]$ очевидны следующие утверждения:

$$0 < E^*_{m-1}(\lambda, x) \leqslant E^*_m(\lambda, x) \leqslant \exp(\lambda x), \; m \geqslant 1, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^i E^*_m(\lambda, x)}{\partial \lambda^i} = x^i E^*_{m-i}(\lambda, x), \; i = 0, 1, \ldots, m. \tag{19}$$

Из (18) следует монотонный характер процесса (12) на спектральном уровне. Равенства же (19) гарантируют положительность и монотонность спектральной функции $E^*_m(\lambda, x)$ и всех ее производных по $\lambda \in [-\mu, 0]$ при любом фиксированном $x > 0$, что является одной из наиболее важных характеристик уровня согласованности операторов $E^*_m(A, x)$ и $\exp(Ax)$.

С учетом (8), (18) для спектральной функции $E_{m+1}(\lambda, x)$ матрицы $E_{m+1}(A, x)$ можно записать (в прежних границах для λ и x):

$$\exp(\lambda x) \leqslant 1 + \lambda \int_0^x E^*_m(\lambda, \xi)\, d\xi = E_{m+1}(\lambda, x) \leqslant E_m(\lambda, x), \; m \geqslant 0. \tag{20}$$

На основании (18), (20) можно констатировать монотонный и двусторонний характер приближения при $m \to \infty$ спектральной функции оператора $\exp(Ax)$ функциями $E^*_m(\lambda, x)$ и $E_{m+1}(\lambda, x)$. Исходя из (8), (19) непосредственными вычислениями можно проверить также, что функция $E_{m+1}(\lambda, x)$ и все ее производные по λ (при любом фиксированном $x > 0$) на концах отрезка $[-\mu, 0]$ принимают положительные значения, откуда на основании теоремы Бюдана — Фурье (см., напр., [5]) можно сделать вывод об их монотонности по λ на данном отрезке.

Приведенная выше информация относительно метода (15) обеспечивает (см. [2]) (скажем, при выборе $\mu = \| A \| \alpha$, $\alpha \geqslant 1$) высокий уровень согласованности в поведении решений исходной дифференциальной и соответствующей разностной задач, при этом заложенная конструктивно свобода в выборе величины шага τ и степени m многочлена (11) позволяет, например, с учетом (10) адаптировать, как и в [6], вычислительный алгоритм к численно наблюдаемой траектории. Значение параметра μ при необходимости также можно изменять вдоль разностной траектории.

Не останавливаясь здесь на детальной проработке подобных вычислительных алгоритмов, отметим лишь, что им можно придать рекурсивный характер, при этом вычислительный процесс нетрудно организовать так, что в отличие, скажем, от [4] он не будет связан с процедурой умножения квадратных матриц, а может базироваться, как и в [6], лишь на операции умножения матрицы на вектор, что особенно важно в случае задач большой размерности.

По построению оператор (13) лучше аппроксимирует $\exp(Ax)$ в «жесткой» части спектра матрицы A, чем в «мягкой». Для повышения качества подобной аппроксимации при малых по абсолютной величине λ_i по (13) сформируем новый оператор

$$\tilde{E}(A, x) = \tilde{E}_{m+2}(A, x) = I + S_{m+1}(A, x)A, \tag{21}$$

где

$$S_{m+1}(A, x) = \int_0^x E_{m+1}(A, \xi)d\xi. \tag{22}$$

При этом в дополнение к свойству аппроксимации $\tilde{E}_{m+2}(0, x) = 1$ для «мягкой» части спектра матрицы A будем иметь (см. (13), (14), (21), (22)):

$$\frac{\partial\tilde{E}_{m+2}(0, x)}{\partial\lambda} = S_{m+1}(0, x) = \int_0^x E_{m+1}(0, \xi)d\xi = x. \tag{23}$$

Тем самым на основе (15) получаем семейство методов

$$\hat{y}^{m+1} = \hat{y} = y + S_{m+1}(A, \tau)(Ay + a), \tag{24}$$

характеризующихся улучшенными свойствами аппроксимации (см. (23)) спектральной функции $\exp(\lambda x)$ посредством $\tilde{E}_{m+2}(\lambda, x)$ при малых по абсолютной величине значениях λ. Монотонность по $\lambda\in[-\lambda_n, 0]$ функции $\tilde{E}_{m+2}(\lambda, x)$ при любом фиксированном $x>0$ обеспечивается в этом случае выбором степени m многочлена (11).

На основе (24) с использованием процедуры типа (21), (22) рекурсивно можно строить методы с повышением порядка гладкости приближения при $\lambda = 0$ спектральной функции $\exp(\lambda x)$ посредством $\tilde{E}(\lambda, x)$.

1. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. М., 1979.

2. Бобков В. В., Мандрик П. А., Репников В. И. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 4. С. 689.

3. Бобков В. В. // Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Сб. науч. тр. / Под ред. С. С. Филиппова. М., 1988. С. 96.

4. Бобков В. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1987. № 2. С. 72.

5. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ: Справоч. пособие. Киев, 1986. С. 474.

6. Бобков В. В., Бобкова Н. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 3. С. 60.

Поступила в редакцию 07.06.93.

УДК 517.925

ЧИНЬ ЗАНЬ ДАНГ (ВЬЕТНАМ)

О ЧАСТНОЙ ИЗОХРОННОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ КОШИ — РИМАНА

Necessary and sufficient coefficient conditions of a particular isochronism of the two-dimensional holomorphic autonomous systems of the ordinary differential equations satistying Coshy — Reman's conditions are obtained.

Рассмотрим вещественную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x - b_1y + \sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij}x^iy^j \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= b_1x + a_1y + \sum_{i+j=2}^{\infty} b_{ij}x^iy^j \equiv Q(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

в предположении, что $b_1\neq0$, точка O(0, 0) является изолированной особой точкой для системы (1), а правые части последней — голоморфные в некоторой окрестности начала координат фазовой плоскости функции. Пусть система (1) имеет в точке O(0, 0) центр или фокус и удовлетворяет условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

В [1] для системы (1) при условиях (2) указаны необходимые и