

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям
О.Н.Здрок
2020__ г.
Регистрационный № УД-1864/уч.



ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 80 03 Математика и компьютерные науки

Профилизация: Математика

Профилизация: Математика и дидактика математика

2020 г.

Учебная программа составлена на основе¹ ОСВО 1- 31 80 03-2019 и учебных планов рег. № G31-017/уч., рег. № G31з-018/уч., рег. № G31-088/уч., рег. № G31з-089/уч., от 11.04.2019.

СОСТАВИТЕЛИ:

Лебедев Андрей Владимирович, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

РЕЦЕНЗЕНТЫ

Пыжкова Ольга Николаевна, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 12 от 04.06.2020);

Научно-методическим Советом БГУ

(протокол № 5 от 17.06.2020)

Зав. кафедрой ФАиАЭ, профессор



А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цель учебной дисциплины «*Вариационное исчисление*» является подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований, повышение уровня профессиональной компетентности в решении проблем оптимизации в различных сферах трудовой деятельности.

Задачи учебной дисциплины:

- ознакомление с основными типами экстремальных задач;
- изучения необходимых и достаточных условий существования решений различных типов экстремальных задач;
- усвоение алгоритмов и методов решения различных экстремальных задач.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием (магистра).

Учебная дисциплина относится к модулю «Функциональный анализ и теория вероятностей» компонент учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Изучение дисциплины базируется на знаниях дисциплин «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Вариационное исчисление» должно обеспечить формирование следующих **специализированных компетенций**:

СК-3. Быть способным применять методы функционального анализа при решении задач естественных наук и экономики.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- теоремы о существовании точек минимума (максимума) для функций на подмножествах метрических пространств;
- необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для точек локального минимума функций на подмножествах конечномерного векторного пространства;
- основы выпуклого анализа и методы исследования выпуклых задач оптимизации;
- теорию выпуклого и линейного программирования;
- теорию нелинейного программирования;
- основы теории дифференцирования функций и отображений, определенных на бесконечномерных нормированных пространствах;

- необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для точек локального минимума (максимума) дифференцируемых функций, определенных на бесконечномерных нормированных пространствах;
- теорию простейшей и изопериметрической вариационных задач;
- принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории, а также для задачи

уметь:

- находить точки минимума и максимума для функций, определенных на конечномерных векторных пространствах;
- с помощью дифференциальных критериев выпуклости проверять является ли заданная функция выпуклой или нет;
- использовать условия оптимальности и критерий Куна-Таккера для решения задач выпуклого программирования;
- использовать условия оптимальности первого и второго порядка для решения задач нелинейного программирования;
- дифференцировать интегральные функционалы;
- составлять и решать дифференциальное уравнение Эйлера – Лагранжа для простейшей вариационной задачи;
- составлять присоединенное уравнение Якоби и находить сопряженные точки для экстремалей простейшей вариационной задачи;
- использовать необходимое условие Вейерштрасса для исследования допустимых кривых, доставляющих сильный локальный минимум в простейшей вариационной задаче;
- использовать принцип максимума Понтрягина для исследования на оптимальность допустимых управлений в задачах оптимального управления с целевым функционалом терминального типа.

владеть:

- методами решения основных конечномерных задач оптимизации;
- методами решения вариационных и изопериметрических задач.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 3 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «*Вариационное исчисление*» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 216 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 36 часов.

– для заочной формы получения высшего образования – 16 аудиторных часов, из них лекции – 8 часов, лабораторные занятия – 8 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Введение.

Тема 1.1. *Общая задача оптимизации.* Задача оптимизации с ограничениями. Нахождение минимумов и максимумов функций в конечномерных пространствах. Принцип множителей Лагранжа.

Тема 1.2. *Выпуклые задачи оптимизации.* Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования. Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна – Таккера.

Раздел 2. Классическая вариационная задача.

Тема 2.1. *Задачи оптимизации в бесконечномерных пространствах.* Интегральные функционалы, классическая вариационная задача. Сильный и слабый экстремумы в простейшей вариационной задаче.

Тема 2.2. *Дифференцирование.* Дифференцирование функций и отображений, определенных на нормированных пространствах. Вариация Лагранжа, производные Гато и Фреше. Дифференциальные свойства интегральных функционалов.

Тема 2.3. *Необходимые условия локального экстремума в вариационной задаче.* Теория первой вариации. Дифференциальное уравнение Эйлера – Лагранжа. Теория второй вариации. Необходимое условие Лежандра. Необходимое условие Якоби

Тема 2.4. *Достаточное условие слабого локального экстремума в вариационной задаче.* Использование достаточного условия Якоби слабого локального экстремума в вариационных задачах.

Тема 2.5. *Необходимое условие Вейерштрасса сильного экстремума в вариационной задаче.* Применение необходимого условия Вейерштрасса для проверки допустимой экстремали на наличие на ней экстремума интегрального функционала.

Тема 2.6. *Достаточное условие сильного локального экстремума в вариационной задаче.* Обоснование наличия или отсутствия сильного экстремума с помощью достаточного условия экстремума.

Раздел 3. Различные вариационные задачи.

Тема 3.1. *Изопериметрическая задача.* Локальный минимум в изопериметрической вариационной задаче. Необходимое условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.

Тема 3.2. *Достаточное условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.* Применение достаточного условия минимума к простейшим изопериметрическим задачам.

Тема 3.3. *Вариационная задача с незакрепленными концами.* Необходимые условия первого порядка для локального минимума в вариационной задаче с незакрепленными концами. Условие трансверсальности. Вариационная задача со старшими производными. Уравнения Эйлера-Пуассона в вариационной задаче со старшими производными.

Тема 3.4. *Дифференциальное исчисление в векторных пространствах.* Касательное пространство. Теорема Люстерника.

Тема 3.5. *Общая теория экстремальных задач в бесконечномерных пространствах.* Экстремальные задачи с ограничениями. Общий принцип множителей Лагранжа.

Раздел 4. Задачи оптимального управления

Тема 4.1. *Постановка задачи оптимального управления.* Общее понятие системы управления. Системы управления, заданные обыкновенными дифференциальными уравнениями. Линейные системы управления. Множество достижимости системы управления. Задачи оптимального управления как неклассические вариационные задачи. Различные типы целевого функционала в задачах оптимального управления, их эквивалентность. Задача оптимального управления со свободным правым концом траектории.

Тема 4.2. *Необходимые условия оптимальности в задачах оптимального управления.* Необходимое условие Эйлера для оптимальных процессов задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории. Игольчатые вариации допустимых процессов (допустимых управлений и допустимых траекторий) в задачах оптимального управления.

Тема 4.3. *Принцип максимума Понтрягина.* Принцип максимума Понтрягина — необходимое условие оптимальности процессов в нелинейных задачах оптимального управления. Достаточность принципа максимума Понтрягина в линейных задачах оптимального управления.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов						Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	Количество часов УСР	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Введение	4			4			
1.1	<i>Общая задача оптимизации. Принцип множителей Лагранжа.</i>	2			2			Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
1.2	<i>Выпуклые задачи оптимизации. Критерий оптимальности Куна – Таккера.</i>	2			2			Контрольная работа.
2.	Классическая вариационная задача	12			12			
2.1.	<i>Задачи оптимизации в бесконечномерных пространствах. Классическая вариационная задача.</i>	2			2			Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
2.2	<i>Дифференцирование. Вариация Лагранжа, производные Гато и Фреше.</i>	2			2			Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
2.3	<i>Необходимые условия локального экстремума в вариационной задаче. Уравнение Эйлера – Лагранжа.</i>	2			2			Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
2.4	<i>Достаточное условие слабого локального экстремума в вариационной задаче. .</i>	2			2			Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
2.5	<i>Необходимое условие Вейеритрасса сильного минимума в вариационной задаче.</i>	2			2			Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с

							их устной защитой
2.6	<i>Достаточное условие сильного локального минимума в вариационной задаче.</i>	2			2		Контрольная работа
3	Различные вариационные задачи.	12			12		
3.1	<i>Изопериметрическая задача. Необходимое условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.</i>	2			2		Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
3.2	<i>Достаточное условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.</i>	2			2		Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
3.3	<i>Вариационная задача с незакрепленными концами. Вариационная задача со старшими производными.</i>	2			2		Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
3.4	<i>Дифференциальное исчисление в векторных пространствах. Теорема Люстерника</i>	2			2		Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
3.5	<i>Общая теория экстремальных задач в бесконечномерных пространствах. Экстремальные задачи с ограничениями. Общий принцип множителей Лагранжа.</i>	4			4		Контрольная работа
4	Задачи оптимального управления	8			8		
4.1	<i>Постановка задачи оптимального управления. Системы управления. Множество достижимости системы управления.</i>	2			2		Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
4.2	<i>Необходимые условия оптимальности в задачах оптимального управления.. Игольчатые вариации допустимых процессов.</i>	2			2		Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
4.3	<i>Принцип максимума Понтрягина.</i>	4			4		Контрольная работа
	Всего	36			36		

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	8
1.	Введение	2			2		
1.1	<i>Общая задача оптимизации. Выпуклые задачи оптимизации.</i>	2			2		Контрольная работа.
2.	Классическая вариационная задача.	2			2		
2.1.	<i>Классическая вариационная задача. Сильный и слабый экстремумы. Необходимые условия локального экстремума. Достаточные условия локального экстремума</i>	2			2		Контрольная работа.
3	Различные вариационные задачи.	2			2		
3.1	<i>Изопериметрическая вариационная задача. Общая теория экстремальных задач в бесконечномерных пространствах. Общий принцип множителей Лагранжа.</i>	2			2		Контрольная работа.
4	Задачи оптимального управления	2			2		
4.1	<i>Постановка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина.</i>	2			2		Контрольная работа.
	Всего	8			8		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – Москва: Изд-во МГУ, 1989.
2. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. – Минск: 2006.
3. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. – Москва: КомКнига, 2006.
4. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач управление – Москва: РХД, 2003.
5. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С.В. Оптимальное управление – Москва: Наука, 1979.
6. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учебное пособие. – Москва: Наука, 1984.
7. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. – Минск: Изд-во БГУ, 1981.
8. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление: Задачи и примеры с подробными решениями Изд. стереотип. Вариационное исчисление: Задачи и примеры с подробными решениями URSS. 2020. 168 с. ISBN 978-5-397-07717-0.

Перечень дополнительной литературы

1. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. – М.: Высшая школа, 2005.
2. Понтрягин Л.С., Болянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – Москва: Наука, 1976.
3. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – Москва: Наука, 1974.
4. Тер-Киркоров А.М. Оптимальное управление и математическая экономика. – Москва: Наука, 1977.
5. Болянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – Москва: Наука, 1969.
6. Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления. – Москва: Наука, 1968.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формой текущей аттестации по дисциплине «Вариационное исчисление» учебным планом предусмотрен экзамен.

Контроль работы магистранта проходит в форме собеседования, контрольной работы в аудитории или выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Экзамен по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь №53 от 29.05.2012 г.).

2. ПОЛОЖЕНИЕ о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020

3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса могут быть использованы следующие подходы и методы: *эвристический подход, практико-ориентированный подход, метод проектного обучения, метод учебной дискуссии, методы и приемы развития критического мышления, метод группового обучения*, которые предполагают:

- осуществление студентами значимых открытий;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;

- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;
- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;
- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- анализ ситуации, используя профессиональные знания, собственный опыт, дополнительную литературу и иные источники;
- способ организации учебной деятельности студентов, развивающий актуальные для учебной и профессиональной деятельности навыки планирования, самоорганизации, сотрудничества и предполагающий создание собственного продукта;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Все результаты и достижения группируются на основе основных видов деятельности студентов: учебной, научно-исследовательской и иной. Методы обеспечивают появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим семинарским занятиям;

- научно-исследовательские работы;
- анализ статистических и фактических материалов по заданной теме, проведение расчетов, составление схем и моделей на основе статистических материалов;
- подготовка и написание рефератов, докладов, эссе и презентаций на заданные темы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Общая задача оптимизации. Принцип множителей Лагранжа.
2. Выпуклые задачи оптимизации. Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна – Таккера.
3. Задача о брахистохроне. Формулировка простейшей вариационной задачи. Определение сильного и слабого локальных экстремумов.
4. Дифференцирование функций и отображений, определенных на нормированных пространствах. Определения вариации по Лагранжу, производных Гато и Фреше.
5. Дифференциальные свойства интегральных функционалов.
6. Необходимые условия первого порядка для локального экстремума простейшей вариационной задачи в терминах вариаций целевого функционала.
7. Теория первой вариации. Интегральное и дифференциальное уравнения Эйлера – Лагранжа.
8. Теория второй вариации. Условия неотрицательности (положительности) квадратичного интегрального функционала на пространствах вектор-функций.
9. Необходимое условие Лежандра.
10. Необходимое условие Якоби.
11. Достаточное условие Якоби слабого локального минимума в простейшей вариационной задаче.
12. Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума в простейшей вариационной задаче (без доказательства).
13. Формулировка изопериметрической вариационной задачи. Необходимые условия первого порядка для локального минимума в изопериметрической вариационной задаче.
14. Достаточное условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.
15. Необходимые условия первого порядка для локального минимума в вариационной задаче с незакрепленными концами. Условие трансверсальности.
16. Уравнения Эйлера-Пуассона в вариационной задаче со старшими производными.
17. Дифференциальное исчисление в векторных пространствах. Касательное пространство. Теорема Люстерника.
18. Общая теория экстремальных задач в бесконечномерных пространствах. Экстремальные задачи с ограничениями. Общий принцип множителей

Лагранжа.

19. Задачи оптимального управления как неклассические вариационные задачи. Различные типы целевого функционала в задачах оптимального управления, их эквивалентность.
20. Игольчатые вариации допустимых процессов (допустимых управлений и допустимых траекторий) в задачах оптимального управления.
21. Принцип максимума Понтрягина — необходимое условие оптимальности процессов в нелинейных задачах оптимального управления.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Машинное обучение и анализ данных	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Изменений не требуется, протокол № 12 от 04.06.2020

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 201_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
