
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 539.3

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЭНДВИЧ-ПАНЕЛИ С ЭЛЕКТРОРЕОЛОГИЧЕСКИМ СЛОЕМ НА ОСНОВЕ ДВУХ МОДЕЛЕЙ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

Г. И. МИХАСЕВ¹⁾, М. Г. БОТОГОВА¹⁾, А. П. МИХИЕВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

На основе двух моделей слоистых оболочек исследуются свободные низкочастотные колебания трехслойной цилиндрической панели с внутренним слоем, изготовленным из электрореологического композита. Рассматриваемые модели приводят к одинаковым разрешающим уравнениям, учитывающим сдвиги в слоях, но различаются соотношениями для вычисления эффективного параметра сдвига, который зависит от напряженности электрического поля и температуры композита. В случае шарнирного опирания всех краев в явном виде получена формула для комплексной собственной частоты колебаний. Исследовано влияние напряженности электрического

Образец цитирования:

Михасев ГИ, Ботогова МГ, Михиевич АП. Анализ свободных колебаний сэндвич-панели с электрореологическим слоем на основе двух моделей слоистых оболочек. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;3:51–59.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-51-59>

For citation:

Mikhasev GI, Botogova MG, Mikhievich AP. Analysis of free vibrations of sandwich panel with electrorheological layer based on two models of laminated shells. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;3:51–59. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-51-59>

Авторы:

Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой био- и наномеханики механико-математического факультета.
Марина Георгиевна Ботогова – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.
Арнольд Павлович Михиевич – аспирант кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета. Научный руководитель – Г. И. Михасев.

Authors:

Gennadi I. Mikhasev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
mikhasev@bsu.by
Marina G. Botogova, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
botogova@tut.by
Arnold P. Mikhievich, postgraduate student at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
fakel.arnold@gmail.com

поля и температуры электрореологического композита на наименьшие собственные частоты и соответствующие декременты колебаний. Установлено, что используемые модели дают очень близкие результаты для нагретого композита при напряженности электрического поля более 1,5 кВ/мм. Также показано, что частота собственных колебаний электрореологической панели является монотонно возрастающей функцией напряженности электрического поля, в то время как кривая *декремент – напряженность* показывает наличие локального максимума, соответствующего наилучшему затуханию вязкоупругих колебаний.

Ключевые слова: сэндвич-панель; электрореологический композит; собственные частоты; декремент колебания.

ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF SANDWICH PANEL WITH ELECTORRHEOLOGICAL LAYER BASED ON TWO MODELS OF LAMINATED SHELLS

G. I. MIKHASEV^a, M. G. BOTOGOVA^a, A. P. MIKHIEVICH^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: G. I. Mikhasev (mikhasev@bsu.by)

Based on two models of laminated shells, free low frequency vibrations of a three-layered cylindrical panel with the internal layer fabricated of an electrorheological composite are studied. Both models lead to the same governing equations accounting for shears in layers, but differ in equations for calculating the reduced shear parameter which depends on the electric field strength and the temperature of a composite. In the case of a simple support of all edges, the formula for the complex natural frequency is obtained explicitly. The influence of the electric field strength and the temperature of the electrorheological composite on the lowest natural frequencies and associated vibration decrements is investigated. It was detected that both models give very close results for the heated composite at an electric field strength of more than 1.5 kV/mm. It is also shown that the frequency of natural vibrations of the electrorheological panel is a monotonically increasing function of the electric field strength, while the *decrement – strength* curve shows the presence of a local maximum corresponding to the best damping of viscoelastic vibrations.

Keywords: sandwich panel; electrorheological composite; natural frequencies; decrement of vibrations.

Введение

Электрореологические композиты (ЭРК), в частности электрореологические композитные жидкости, наряду с магнитореологическими эластомерами (МРЭ) относятся к классу интеллектуальных материалов [1]. Под действием приложенного электрического поля они практически мгновенно меняют свои упругие и реологические характеристики, переходя из вязкоупругого состояния (высококонцентрированной суспензии) с низким модулем накопления в состояние псевдотвердого тела с высокими значениями модулей накопления и потерь [2]. Благодаря этим уникальным свойствам МРЭ и ЭРК находят широкое применение при проектировании тонкостенных слоистых конструкций с адаптивными (настраиваемыми) жесткостными и демпфирующими характеристиками [3–6]. Примером такой умной конструкции является трехслойная оболочка или цилиндрическая панель (сэндвич), внутренний слой которой изготовлен из ЭРК [6] либо МРЭ [7]. В частности, в работе [7] показано, что сигнал магнитного поля позволяет значительно смещать вправо амплитудно-частотную характеристику тонкостенной сэндвич-панели, содержащей МРЭ, с одновременным уменьшением амплитуды резонансных пиков.

Одной из проблем, возникающих при динамических расчетах слоистых тонкостенных элементов, содержащих чередующиеся жесткие и «мягкие» (например, МРЭ или ЭРК) слои, является выбор соответствующей математической модели, которая, с одной стороны, была бы проста в инженерных расчетах, а с другой стороны, правильно отражала кинематику составляющих слоев. Следует отметить, что к настоящему времени накопилось огромное количество работ, посвященных высокоточным теориям слоистых оболочек, которые учитывают различные уточняющие эффекты, в том числе эффекты сдвигов, вызванных градиентным распределением упругих свойств по толщине оболочки (см. обзор литературы, например, в [4]). Среди обилия подобных теорий подходы, базирующиеся на замене исходной слоистой оболочки на «эквивалентную» однослойную трансверсально-изотропную оболочку, представляются наиболее простыми и эффективными. Так, в монографии [8] Э. И. Григолоком и Г. М. Куликовым предложена

модель многослойных упругих цилиндрических оболочек, основанная на введении обобщенных кинематических гипотез Тимошенко, которые учитывают сдвиги интегрально для всего слоистого пакета оболочки. Впоследствии данная модель была обобщена на случай слоистой оболочки, содержащей вязкоупругие магнитоупругие материалы [9], а в недавно вышедшей работе [7] использована для детального анализа низкочастотных колебаний цилиндрической сэндвич-панели с МРЭ-ядром. В качестве второй, альтернативной, модели «эквивалентной» однослойной оболочки укажем модель типа Тимошенко – Рейсснера, развитую П. Е. Товстиком [10; 11] для случая градиентного распределения механических свойств по толщине пластины (оболочки). Назовем также математическую модель неоднородных пластин, предложенную Ю. А. Устиновым [12] и основанную на предельном переходе от 3D-задач теории упругости к двумерным задачам.

Очевидно, что все модели, включая упомянутые, имеют свой диапазон применимости, о чем подробнее будет сказано ниже. Здесь отметим, что модель Устинова [12] предназначена в основном для решения статических задач – определения НДС пластин, упругие свойства которых описываются кусочно-непрерывными функциями поперечной координаты. Модель Григолюка – Куликова [8] хорошо зарекомендовала себя для решения задач устойчивости и колебаний упругих и вязкоупругих слоистых цилиндрических оболочек средней длины, когда поверхность оболочки покрывается большим количеством волн хотя бы в одном направлении [13], а также в случае, когда жесткостные характеристики слоев различаются незначительно (что имеет место, например, если слоистую МРЭ-оболочку поместить в сильное магнитное поле [4]). Если же демпфирующим элементом в сэндвич-оболочке является электрореологическая композитная жидкость, то погрешность модели Григолюка – Куликова [8] сильно возрастает. В данном случае для исследования динамики слоистой оболочки представляется целесообразным использовать модель типа Тимошенко – Рейсснера, которая верифицирована путем сравнения с точным решением 3D-задачи теории упругости [10; 11].

Целью настоящей работы является сравнительный анализ двух моделей на примере свободных низкочастотных колебаний цилиндрической сэндвич-панели, содержащей ЭРК в качестве среднего слоя. Актуальность исследования обусловлена тем, что модель Григолюка – Куликова, в отличие от модели типа Тимошенко – Рейсснера, может быть использована для любого варианта граничных условий на кромках панели.

Разрешающие уравнения

Рассмотрим трехслойную круговую цилиндрическую оболочку длиной L_1 , которая не замкнута в окружном направлении (цилиндрическая сэндвич-панель) и имеет ширину L_2 (рис. 1). Верхний и нижний слои с толщинами h_1 и h_3 соответственно изготовлены из упругого изотропного материала, механические свойства которого (модули Юнга $E_{1,3}$ и коэффициенты Пуассона $\nu_{1,3}$) не зависят от электрического поля, а внутренний слой (ядро) толщиной h_2 – из ЭРК, вязкоупругие свойства которого (модуль Юнга E_2 , модуль сдвига G_2 и коэффициент Пуассона ν_2) есть функции напряженности приложенного электрического поля \mathcal{E} и температуры T . Выбор исходной поверхности и системы координат зависит от принятой модели слоистой оболочки. Здесь мы рассмотрим две модели: модель Григолюка – Куликова (далее – модель 1) слоистых трансверсально-изотропных оболочек, основанную на принятии обобщенных кинематических гипотез Тимошенко для тангенциальных перемещений и учитывающую поперечные сдвиги в слоях [8], и модель типа Тимошенко – Рейсснера (далее – модель 2), предложенную П. Е. Товстиком [10] для оболочек с произвольным распределением упругих свойств по толщине. В рамках модели 1 в качестве исходной поверхности принимается срединная поверхность внутреннего слоя, для модели 2 – внешняя поверхность, а оси криволинейной системы координат $O\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ с ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ ориентированы для обеих моделей так, как показано на рис. 1. Здесь $\alpha_1, \alpha_2, z = \alpha_3$ – координаты, отсчитываемые в осевом, окружном и нормальном направлениях соответственно, при этом $0 \leq \alpha_1 \leq L_1, 0 \leq \alpha_2 \leq L_2$ и $-\frac{h_2}{2} - h_1 \leq z \leq \frac{h_2}{2} + h_3$ (для модели 1), $0 \leq z \leq h = \sum_{k=1}^3 h_k$ (для модели 2).

Согласно принимаемым моделям исходная слоистая оболочка заменяется «эквивалентной» однослойной трансверсально-изотропной оболочкой толщиной h с приведенными модулями Юнга E и сдвига G , а также коэффициентом Пуассона ν , которые, однако, вводятся по-разному в зависимости от конкретной модели.

Модель 1. В соответствии с данной моделью [8] приведенные модули

$$E = \frac{1 - \nu^2}{h} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \right), \quad \nu = \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k \nu_k}{1 - \nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1}.$$

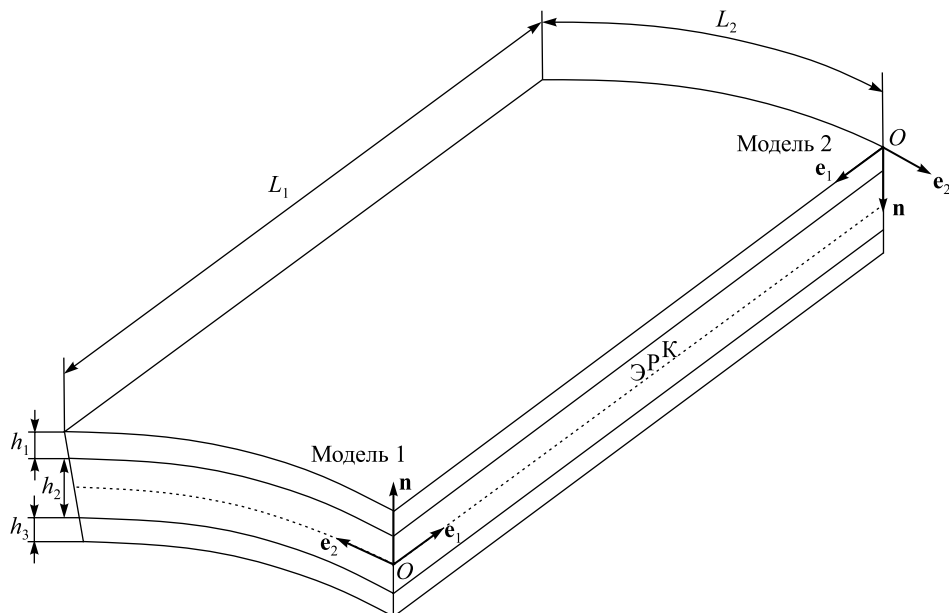


Рис. 1. Цилиндрическая сэндвич-панель с внутренним слоем, изготовленным из электрореологического композита (ЭРК).

Криволинейная система координат с ортами e_1, e_2, n для моделей 1 и 2

Fig. 1. Cylindrical sandwich panel with the internal layer made of electrorheological composite (ERC).
 Curvilinear coordinate system with the unit vectors e_1, e_2, n for models 1 and 2

Также введем в рассмотрение приведенные цилиндрическую жесткость D , жесткость каждого слоя γ_k и параметры сдвига β и θ :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \eta_3, \quad \gamma_k = \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}, \quad \beta = \frac{12(1-\nu^2)q_{44}}{Eh\eta_1}, \quad \theta = 1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1\eta_3}, \quad (1)$$

где

$$q_{44} = \frac{\left[\sum_{k=1}^3 \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{kk} \right) \right]^2}{\sum_{k=1}^3 \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{kk} \right) G_k^{-1}} + \sum_{k=1}^3 \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} G_k, \quad \lambda_k = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0^2(z) dz, \quad (2)$$

$$\lambda_{kn} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(z) f_n(z) dz \quad (n=0, k), \quad \eta_1 = \sum_{k=1}^3 \frac{\pi_{1k} \gamma_k}{\xi_k} - 3c_{12}^2, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^3 \frac{\pi_{2k} \gamma_k}{\xi_k} - 3c_{12}c_{13},$$

$$\eta_3 = 4 \sum_{k=1}^3 \left(\xi_k^2 + 3\zeta_{k-1} \zeta_k \right) \gamma_k - 3c_{13}^2, \quad h\xi_k = h_k, \quad h\zeta_n = \delta_n \quad (n=0, k),$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^3 \xi_k^{-1} \pi_{3k} \gamma_k, \quad c_{13} = \sum_{k=1}^3 \left(\zeta_{k-1} + \zeta_k \right) \gamma_k,$$

$$\pi_{1k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g^2(z) dz, \quad \pi_{2k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} zg(z) dz, \quad \pi_{3k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g(z) dz.$$

Здесь $G = \frac{q_{44}}{h}$ – приведенный модуль сдвига [4]; $f_n(z)$ – непрерывные на каждом слое функции, которые в принимаемых гипотезах задают закон распределения касательных напряжений, непрерывных по толщине оболочки [4, формула (2.2)]. В нашем случае

$$f_0(z) = \frac{1}{h^2} (z - \delta_0)(\delta_3 - z), \quad \text{если } z \in [\delta_0, \delta_3],$$

$$f_k(z) = \frac{1}{h_k^2}(z - \delta_{k-1})(\delta_k - z), \text{ если } z \in [\delta_{k-1}, \delta_k],$$

$$f_k(z) = 0, \text{ если } z \notin [\delta_{k-1}, \delta_k],$$

а δ_n – координаты внешних и интерфейсных поверхностей, отсчитываемые от исходной поверхности (срединной поверхности внутреннего слоя): $\delta_0 = -h_1 - \frac{1}{2}h_2$, $\delta_1 = -\frac{1}{2}h_2$, $\delta_2 = \frac{1}{2}h_2$, $\delta_3 = h_3 + \frac{1}{2}h_2$. Заметим, что функции $f_n(z)$ могут быть введены иначе, например через полиномы Лежандра. Однако данное представление, внося дополнительные сложности в расчеты, не приводит к заметному уточнению результатов для тонких оболочек [8]. Попутно лишь укажем, что введение полиномов более высокого порядка представляется целесообразным для оболочек средней толщины при наличии дополнительных усложняющих факторов, таких как сильное различие механических свойств слоев, действие торцевых сил, градиентно распределенных по толщине оболочки, и др.

Пусть w – нормальный прогиб оболочки (в направлении оси Oz); F – функция напряжений Эйри; $\rho_0 = \sum_{k=1}^3 \rho_k \xi_k$ – приведенная плотность всего пакета сэндвича; t – время, а R – радиус срединной поверхности внутреннего слоя. Будем далее исследовать колебания панели средней длины ($R \sim L$), сопровождающиеся образованием большого количества волн хотя бы в одном направлении. Тогда уравнения движения сэндвич-панели в принятых обозначениях имеют вид [8]

$$D \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \Delta \right) \Delta^2 \chi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1^2} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

$$\Delta^2 F - \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} = 0, \quad w = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi,$$

$$\frac{1 - \nu^2}{2} \frac{h^2}{\beta} \Delta \varphi = \varphi, \quad (4)$$

где Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат α_1, α_2 , а χ, φ – функции перемещения и сдвига соответственно. Если слои оболочки изготовлены из упругого материала, все коэффициенты в уравнениях (3), (4) являются вещественными и фиксированными параметрами. В нашем случае, т. е. для электрореологического сэндвича, $E_2 = E'_2 + iE''_2$, $G_2 = G'_2 + iG''_2$ – комплексные модули ($i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица), зависящие от напряженности электрического поля \mathcal{E} . Таким образом, как следует из соотношений (1), (2), приведенные цилиндрическая жесткость D , модуль Юнга E и параметры β, θ , содержащиеся в разрешающих уравнениях (3), (4), есть комплекснозначные функции аргумента \mathcal{E} . Обоснование использования данных уравнений с комплексными коэффициентами для слоистых оболочек, содержащих магнито- или электрореологический композит, было дано в работе [9].

Заметим, что уравнение (4) определяет интегралы краевого эффекта – функции, описывающие сдвиги у краев панели и быстро затухающие при удалении от них [4]. Как видно, данное уравнение не связано с основными уравнениями (3). Вопрос учета его интегралов при построении общего решения зависит от варианта граничных условий. В частности, если все кромки защемлены и есть диафрагмы, препятствующие относительно сдвигу слоев, или если имеются шарнирно опертые края без диафрагм, уравнения (3), (4) решаются совместно [14].

Здесь рассматриваем случай, когда все кромки шарнирно оперты и имеют диафрагму. Соответствующие граничные условия задаются выражениями [8]

$$\chi = \Delta \chi = \Delta^2 \chi = 0, \quad F = \Delta F = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_j} = 0 \text{ при } \alpha_j = 0, L_j \quad (j = 1, 2). \quad (5)$$

Тогда уравнение (4) можно опустить. Заметим, что учет краевых эффектов для данного варианта граничных условий в рамках модели 1 может быть осуществлен с использованием полной системы пяти уравнений относительно трех компонентов вектора перемещений и двух параметров, описывающих сдвиги в «эквивалентной» однослойной оболочке [4; 7].

Модель 2. В этой модели приведенные параметры «эквивалентной» однослойной оболочки определяются следующим образом [10; 11]:

$$K_0 = \int_0^h E(z) dz, \quad D = \int_0^h E_*(z)(z-a)^2 dz, \quad K = \int_0^h E_*(z) dz,$$

$$E_*(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}, \quad g = \frac{1}{R^2 D} \int_0^h \frac{\Theta^2(z)}{G(z)} dz, \quad \Theta(z) = \int_0^z E_*(\zeta)(\zeta-a) d\zeta,$$

$$a = \frac{1}{K} \int_0^h E_*(z) z dz, \quad \rho_0 = \frac{1}{h} \int_0^h \rho(z) dz.$$

Здесь $E(z)$, $G(z)$, $\nu(z)$, $\rho_0(z)$ – заданные кусочно-непрерывные функции, определяемые на каждом слое сэндвича своим значением. Например,

$$E(z) = \begin{cases} E_1, & 0 \leq z \leq h_1, \\ E_2, & h_1 < z < h_1 + h_2, \\ E_3, & h_1 + h_2 \leq z \leq h. \end{cases}$$

Движение оболочки описывается уравнениями [11]

$$D\Delta^2\chi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1^2} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{6}$$

$$\Delta^2 F + \frac{K_0}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} = 0, \quad w = (1 - gR^2\Delta)\chi.$$

Как видно, первое из уравнений (3) в модели 1 имеет более высокий порядок, чем первое уравнение системы (6), и содержит член с коэффициентом θ , который мал. Так, для однослойной изотропной оболочки [8] $\theta = \frac{1}{85}$. С точностью до данного слагаемого и вплоть до способа вычисления безразмерных параметров сдвига $\frac{h^2}{\beta R^2}$ и g в моделях 1 и 2 соответственно указанные системы уравнений совпадают.

Следует отметить, что рамки применимости обеих моделей ограничены. Модель 1 может использоваться для оболочек с любыми граничными условиями и позволяет учитывать краевые эффекты, порождаемые дополнительными граничными условиями, которые обусловлены повышением порядка уравнений по сравнению с уравнениями (6). Недостатком модели 1 является то, что она применима для случая, когда механические свойства слоев, составляющих оболочку, различаются незначительно. Напротив, модель 2 справедлива для цилиндрических оболочек, сильно неоднородных в направлении толщины, с произвольным (градиентным) распределением модулей упругости. Однако разрешающие уравнения (6) были выведены для пластин и оболочек, у которых кромки подчиняются условиям шарнирного опирания (условия типа (5)), и, таким образом, их применимость для других вариантов граничных условий, различающихся, например, наличием или отсутствием диафрагм, необоснованна.

Собственные частоты и декременты колебаний

Рассмотрим задачу о собственных низкочастотных колебаниях электрореологической сэндвич-панели в рамках вышеописанных моделей. В случае принятия модели 1 уравнением (4) можно пренебречь, и решение разрешающих уравнений (для обеих моделей), удовлетворяющее граничным условиям (5), ищется в виде

$$(\chi, F) = (\chi^\circ, F^\circ) \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L_1} \sin \frac{\pi m \alpha_2}{L_2} e^{-i\Omega t}. \tag{7}$$

Здесь χ° , F° – амплитуды функций перемещения и напряжений; n , m – число волн в осевом и окружном направлениях соответственно; $\Omega = \omega + i\alpha$, где ω – собственная частота, а α – соответствующий декремент вязкоупругих колебаний.

Подстановка (7) в уравнения (3) и (6) приводит к следующим соотношениям для комплексного собственного значения краевой задачи:

$$\Omega = \Omega(n, m) = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 R^2}} \sqrt{\frac{\pi^4 \eta_3 h^2}{12 R^2 (1 - \nu^2)} \frac{(1 + \theta \kappa \delta_{nm}) \delta_{nm}^2}{1 + \kappa \delta_{nm}} + \frac{n^4}{l^4 \delta_{nm}^2}} \quad (\text{модель 1}),$$

$$\Omega = \Omega(n, m) = \sqrt{\frac{K_0}{\rho_0 h R^2}} \sqrt{\frac{\pi^4 D}{R^2 K_0} \frac{\delta_{nm}^2}{1 + g \delta_{nm}} + \frac{n^4}{l^4 \delta_{nm}^2}} \quad (\text{модель 2}),$$

где $\kappa = \frac{\pi^4 h^2}{\beta R^2}$; $l = \frac{L_1}{R}$; $\delta_{nm} = \frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{\varphi_2^2}$; $\varphi_2 = \frac{L_2}{R}$ – угол раствора панели.

Заметим, что параметры E , η_3 , κ , D , K_0 , а также приведенный коэффициент Пуассона ν (для модели 1) являются комплекснозначными функциями комплексного модуля сдвига G_3 ЭРК, свойства которого, в свою очередь, зависят от напряженности электрического поля \mathcal{E} и температуры T композита [4; 9]. Таким образом, меняя параметры \mathcal{E} и T , мы можем «настраивать» вязкоупругие свойства «интеллектуальной» панели и, как следствие, смещать спектр частот вправо и увеличивать ее демпфирующие свойства.

Далее найдем наименьшую частоту и соответствующий декремент как функции \mathcal{E} и T :

$$\omega_* = \min_{n, m} \operatorname{Re} \Omega(n, m) = \omega(n_*, m_*), \quad \alpha_* = \operatorname{Im} \Omega(n_*, m_*).$$

Численный анализ

Расчеты выполнены для панели, внешние слои которой изготовлены из АБС-пластика SD-0170. Здесь последний трактуется как упругий материал с характеристиками $E_1 = E_3 = 1,5 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_1 = \nu_3 = 0,4$; $\rho_1 = \rho_3 = 1,4 \cdot 10^3$ кг/м³. Геометрические размеры сэндвич-панели: $L = R = 1$ м; $h_1 = h_3 = 0,5$ мм; $h_2 = 10$ мм; $\varphi_2 = \pi$. Ядро сэндвича изготовлено из высококонцентрированной электрореологической жидкости, состоящей из частиц гётита (45 %), трансформаторного масла (51 %) и глицерина моноолеата (4 %). Вещественная и мнимая части модуля сдвига, G'_2 и G''_2 соответственно, как функции напряженности электрического поля и температуры, приведены в работе [4, рис. 2.13]. На рис. 2 показаны зависимости наименьшей собственной частоты ω_* от напряженности \mathcal{E} при температуре ЭРК 0; 60 и 100 °С, а на рис. 3 – аналогичные зависимости для декремента α_* . Сплошные линии соответствуют данным, полученным с использованием модели 1, а пунктирные – результатам в рамках модели 2. При расчетах влияние температуры на упругие свойства пластика, равно как и дополнительные напряжения в оболочке, обусловленные нагревом, во внимание не принималось.

Видно, что для ненагретого ЭРК (при $T = 0$ °С) кривые *частота – напряженность* и *декремент – напряженность* имеют явно выраженные максимумы. В частности, при напряженности электрического поля $\mathcal{E} \approx 1,1$ кВ/мм ЭРК обладает наибольшей способностью демпфировать низкочастотные колебания рассматриваемой сэндвич-панели. В случае нагретого композита рост напряженности приводит к ожидаемому эффекту – увеличению частоты собственных колебаний и уменьшению демпфирования.

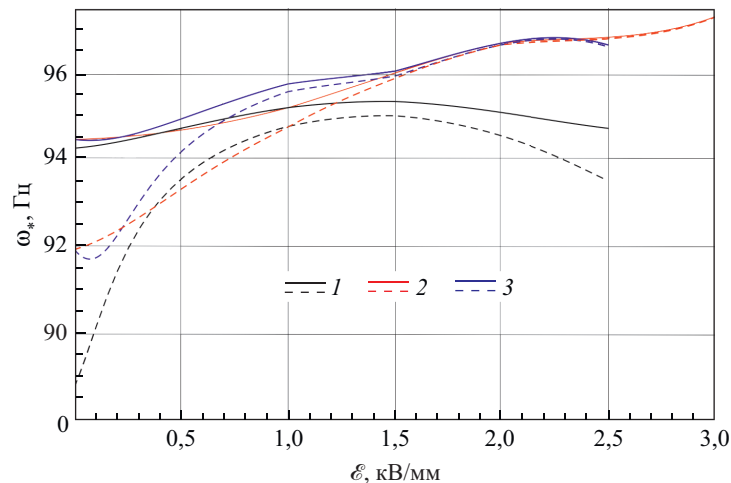


Рис. 2. Зависимость наименьшей собственной частоты от напряженности электрического поля при различных температурах композита: 1 – 0 °С; 2 – 60 °С; 3 – 100 °С.

Сплошные линии соответствуют модели 1, пунктирные – модели 2

Fig. 2. The lowest natural frequency versus electric field strength for different temperatures of the composite: 1 – 0 °С; 2 – 60 °С; 3 – 100 °С. Solid lines – model 1, dash lines – model 2

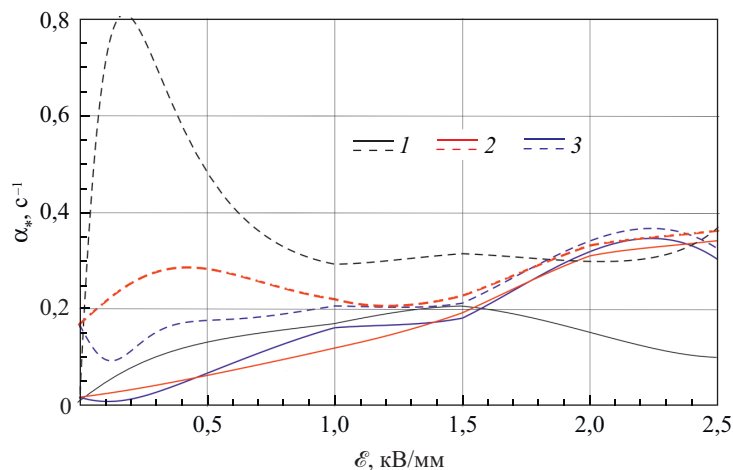


Рис. 3. Зависимость декремента от напряженности электрического поля при различных температурах композита: 1 – 0 °С; 2 – 60 °С; 3 – 100 °С. Сплошные линии соответствуют модели 1, пунктирные – модели 2

Fig. 3. The logarithmic decrement versus electric field strength for different temperatures of the composite: 1 – 0 °С; 2 – 60 °С; 3 – 100 °С. Solid lines – model 1, dash lines – model 2

Анализ кривых также свидетельствует, что модель 1 дает завышенную оценку наименьшей частоты при любой температуре по сравнению с моделью 2, которая ранее показала хорошее совпадение результатов с точными решениями для слоистых пластин [10]. И наоборот, логарифмический декремент, определяемый по модели 1, оказывается ниже декремента, найденного в рамках модели 2. Данные расхождения в результатах, полученных на основе этих двух моделей, оказываются значительными при малых величинах напряженности электрического поля, но для нагретого композита при напряженности $E > 1,5$ кВ/мм модели 1 и 2 дают практически одинаковые результаты. Указанный эффект объясняется тем, что с ростом температуры и напряженности электрического поля жесткостные характеристики упругого материала внешних слоев сэндвича и электрореологического ядра сближаются, что приводит к увеличению точности модели 1.

Заключение

В работе рассмотрены две модели слоистых оболочек, учитывающие сдвиги: модель Григolloка – Куликова [8], основанная на введении обобщенных кинематических гипотез Тимошенко, и модель типа Тимошенко – Рейсснера, развитая П. Е. Товстиком [10] для оболочек, неоднородных в направлении толщины. На основе этих моделей, замещающих слоистую оболочку «эквивалентной» однослойной трансверсально-изотропной оболочкой, исследованы низкочастотные вязкоупругие колебания трехслойной цилиндрической панели средней длины, внутренний слой которой изготовлен из ЭРК. Показано, что температура и приложенное электрическое поле сильно влияют на вязкоупругие свойства электрореологической панели и, как следствие, на ее динамические характеристики. В частности, установлено, что частота собственных колебаний нагретой электрореологической панели является монотонно возрастающей функцией напряженности электрического поля, в то время как кривая *декремент – напряженность* показывает наличие локального максимума, соответствующего наилучшему затуханию вязкоупругих колебаний.

Выполненный сравнительный анализ собственных частот и декрементов колебаний, найденных на основе двух моделей, позволяет сделать вывод о том, что модель 1, предполагающая рассмотрение любого варианта граничных условий, может быть использована для расчета низкочастотного спектра вязкоупругих колебаний сэндвич-оболочки только в случае близости жесткостных характеристик слоев. При расчете сэндвич-панели, содержащей ЭРК, данное требование выполняется, если композит хорошо нагрет и приложено электрическое поле большой напряженности (более 1,5 кВ/мм).

Библиографические ссылки

1. Yalcintas M, Dai H. Magnetorheological and electrorheological materials in adaptive structures and their performance comparison. *Smart Materials and Structures*. 1999;8(5):560–573. DOI: 10.1088/0964-1726/8/5/306.
2. Hao T, Kawai A, Ikazaki F. Mechanism of electrorheological effect: evidence from the conductive, dielectric, and surface characteristics of water-free electrorheological fluid. *Langmuir*. 1998;14(5):1256–1262. DOI: 10.1021/la971062e.

3. Eshaghi M, Sedaghati R, Rakheja S. Dynamic characteristics and control of magnetorheological/electrorheological sandwich structures: a state-of-the-art review. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2016;27(15):2003–2037. DOI: 10.1177/1045389X15620041.
4. Mikhasev GI, Altenbach H. Equivalent single layer model for thin laminated cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Cham: Springer; 2019. p. 29–84. (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_2.
5. Yeh J-Y. Vibration and damping analysis of orthotropic cylindrical shells with electrorheological core layer. *Aerospace Science and Technology*. 2011;15(4):293–303. DOI: 10.1016/j.ast.2010.08.002.
6. Mohammadi F, Sedaghati R. Nonlinear free vibration analysis of sandwich shell structures with a constrained electrorheological fluid layer. *Smart Materials and Structures*. 2012;21(7):075035. DOI: 10.1088/0964-1726/21/7/075035.
7. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.
8. Григолюк ЭИ, Куликов ГМ. *Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин*. Москва: Машиностроение; 1988. 288 с.
9. Mikhasev G, Botogova M, Korobko E. Theory of thin adaptive laminated shells based on magnetorheological materials and its application in problems on vibration suppression. In: Altenbach H, Eremeyev V, editors. *Shell-like structures*. Heidenberg: Springer; 2011. p. 727–750. (Advanced structured materials; volume 15). DOI: 10.1007/978-3-642-21855-2_48.
10. Tovstik PE, Tovstik TP. Generalized Timoshenko – Reissner model for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2017;97(3):296–308. DOI: 10.1002/zamm.201600052.
11. Mikhasev GI, Tovstik PE. *Localized dynamics of thin-walled shells*. Boc Raton: CRC Press; 2020. 349 p. (Chapman & Hall/CRC monographs and research notes in mathematics).
12. Устинов ЮА. *Математическая теория поперечно-неоднородных плит*. Ростов-на-Дону: ЦВВР; 2006. 257 с.
13. Mikhasev GI, Seeger F, Gabbert U. Comparison of analytical and numerical methods for the analysis of buckling and vibrations of composite shell structures. In: *Proceedings of the 5th Magdeburg days of mechanical engineering; 2001 September 19–20; Magdeburg, Germany*. Berlin: Logos; 2001. p. 175–183.
14. Mikhasev GI, Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Cham: Springer; 2019. p. 157–198. (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.

References

1. Yalcintas M, Dai H. Magnetorheological and electrorheological materials in adaptive structures and their performance comparison. *Smart Materials and Structures*. 1999;8(5):560–573. DOI: 10.1088/0964-1726/8/5/306.
2. Hao T, Kawai A, Ikazaki F. Mechanism of electrorheological effect: evidence from the conductive, dielectric, and surface characteristics of water-free electrorheological fluid. *Langmuir*. 1998;14(5):1256–1262. DOI: 10.1021/la971062e.
3. Eshaghi M, Sedaghati R, Rakheja S. Dynamic characteristics and control of magnetorheological/electrorheological sandwich structures: a state-of-the-art review. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2016;27(15):2003–2037. DOI: 10.1177/1045389X15620041.
4. Mikhasev GI, Altenbach H. Equivalent single layer model for thin laminated cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Cham: Springer; 2019. p. 29–84. (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_2.
5. Yeh J-Y. Vibration and damping analysis of orthotropic cylindrical shells with electrorheological core layer. *Aerospace Science and Technology*. 2011;15(4):293–303. DOI: 10.1016/j.ast.2010.08.002.
6. Mohammadi F, Sedaghati R. Nonlinear free vibration analysis of sandwich shell structures with a constrained electrorheological fluid layer. *Smart Materials and Structures*. 2012;21(7):075035. DOI: 10.1088/0964-1726/21/7/075035.
7. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.
8. Grigolyuk EI, Kulikov GM. *Mnogosloynye armirovannye obolochki. Raschet pnevmaticheskikh shin* [Multilayer reinforced shells. Calculation of pneumatic tires]. Moscow: Mashinostroenie; 1988. 288 p. Russian.
9. Mikhasev G, Botogova M, Korobko E. Theory of thin adaptive laminated shells based on magnetorheological materials and its application in problems on vibration suppression. In: Altenbach H, Eremeyev V, editors. *Shell-like structures*. Heidenberg: Springer; 2011. p. 727–750. (Advanced structured materials; volume 15). DOI: 10.1007/978-3-642-21855-2_48.
10. Tovstik PE, Tovstik TP. Generalized Timoshenko – Reissner model for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2017;97(3):296–308. DOI: 10.1002/zamm.201600052.
11. Mikhasev GI, Tovstik PE. *Localized dynamics of thin-walled shells*. Boc Raton: CRC Press; 2020. 349 p. (Chapman & Hall/CRC monographs and research notes in mathematics).
12. Ustinov YuA. *Matematicheskaya teoriya poperechno-neodnorodnykh plit* [Mathematical theory of transversely heterogeneous plates]. Rostov-on-Don: CVVR; 2006. 257 p. Russian.
13. Mikhasev GI, Seeger F, Gabbert U. Comparison of analytical and numerical methods for the analysis of buckling and vibrations of composite shell structures. In: *Proceedings of the 5th Magdeburg days of mechanical engineering; 2001 September 19–20; Magdeburg, Germany*. Berlin: Logos; 2001. p. 175–183.
14. Mikhasev GI, Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Cham: Springer; 2019. p. 157–198. (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.