равна $v_0 = \Phi(-\Delta/2)$. Из рисунка видно, что учет «серийной» структуры временного ряда при его классификации приводит к существенному выигрышу в эффективности.

Решающие правила (12), (13) реализованы на ЕС ЭВМ, исследованы методом статистического моделирования и показали достаточную эффективность.

Список литературы

1. Харин Ю. С. // Проблемы передачи информации. 1985. Т. 21. Вып. 4. С. 64.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Основы диалогового программирования. Минск, 1975.
3. Миленький А. В. Классификация сигналов в условиях неопределенности. М., 1975.
4. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М., 1985.

Поступила в редакцию 06.06.86.

УДК 519.17

Л. Н. БАТУРИНА, Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ПУТЕЙ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА

Эффективность решения многих оптимизационных задач на графах и сетях зависит от способа представления требуемой информации о сети. Часто в качестве такой информации необходимо множество простых путей (ПП) графа. Для нахождения всех ПП между парой некоторых вершин связного графа $G=(X, A)$ можно использовать любой алгоритм (например, [1]) определения K кратчайших ПП с трудоемкостью $O(Kn^3)$. Однако при изложении этих алгоритмов способы эффективного представления информации о найденных ПП не обсуждаются.

Ниже предлагается алгоритм ТПП (таблица простых путей), с помощью которого сведения о множестве ПП между заданной парой вершин неориентированного графа представляются в виде специальных удобных для дальнейшего использования таблиц без предварительного определения этого множества. Одновременно классифицируются вершины графа по их удаленности в ПП от источника s.

Одним из практических применений таких таблиц является использование их при решении задач о максимальном динамическом потоке на простых путях неориентированного графа.

Пусть $X = \bigcup\limits_{x_j \in \Gamma(s)} X^j \cup \{s\}$, причем для каждого множества X^j справедливо условие $X^j = \bigcup\limits_{i=1}^{k_j} X_i$, где $\Gamma(x_i) = \{x_k \mid (x_i, x_k) \in A\}$; k_j — длина максимального ПП из s в t, проходящего через вершину $x_j \in \Gamma(s)$; X_i — подмножество, содержащее вершины, достижимые из x_j по всем ПП длины $i-1$. В общем случае $X_i \cap X_l \neq \varnothing$.

Каждое множество X^j представим в виде таблицы P_j размерности $(n-1) \times k_j$ (где n — число вершин графа), в которой l-я строка соответствует вершине $x_l \in X$ $(x_l \neq s)$, а k-й столбец — длине ПП из s в x_l. Элемент (l, k) таблицы является списком S_{lk} вершин, каждая из которых предшествует вершине x_l хотя бы в одном ПП из x_j в x_l длины $k-1$. Если в графе G не существует ПП из x_j в x_l длины $k-1$, то $S_{lk} = \varnothing$ и $x_l \notin X_k$.

Пусть $G=(X, A)$ — связный неориентированный граф с выделенными вершинами s и t, у которого каждое ребро имеет длину 1.

Алгоритм ТПП. Шаг 1. Выбираем некоторую непомеченную вершину $x_j \in \Gamma(s)$.

1.1. Полагаем $R_j = \{x_l \mid (x_j, x_l) \in A, x_l \neq s\}$, $N = \varnothing$. Для всех $x_i \in X$ $(x_i \neq s, x_j, t)$ полагаем $R_i = \{x_l \mid (x_i, x_l) \in A, x_l \neq x_j\}$.

1.2. Полагаем $S_{j1}=\{s\}$ и $S_{l1}=\varnothing$ для всех $x_l\neq x_j$; $S_{l2}=\{x_j\}$ для $x_l\in R_j$ и $S_{l2}=\varnothing$ для $x_l\notin R_j$. Тогда $X_1=\{x_j\}$ и $X_2=\{R_j\}$.

Шаг 2. Пусть найдены элементы $k-1$-го столбца таблицы P_j и, соответственно, определены множества $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$. Списки S_{lk} $(x_l\neq s, x_j)$ k-го столбца определяются просмотром вершин множества X_{k-1}. Полагаем $N_{pm}=\varnothing$ для всех $x_p\in X$ и $m=1, \ldots, k$. Выбираем некоторую непросмотренную вершину $x_r\in X_{k-1}$. Ее просмотр заключается в следующем.

2.1. Выбираем непомеченную вершину $x_l\in R_r$. Помещаем вершины x_r и x_l в список N и полагаем $p=x_r$, $q=1$, $\delta=0$.

2.2. Если $\delta=0$, то находим вершину $x\in S_{p(k-q)}$, для которой справедливо условие $x\notin N$, и переходим к п. 2.3. Если условие не выполняется, то переходим к п. 2.4.

Если $\delta=1$, то находим вершину $x\in S_{p(k-q)}$, для которой справедливо условие $x\notin N$ и $x\notin N_{p(k-q)}$, полагаем $\delta=0$ и переходим к п. 2.3. В противном случае переходим к п. 2.4.

2.3. Помещаем x в начало списка N и в список $N_{p(k-q)}$, увеличиваем q на единицу и полагаем $p=x$. При $k-q\leqslant 2$ вносим вершину x_r в список S_{lk} и тогда $x_l\in X_k$. Вершина x_l становится помеченной, переходим к п. 2.5. При $k-q>2$ повторяем п. 2.2.

2.4. Если $k-q=k-1$, то вершина x_l становится помеченной и переходим к п. 2.5. Если $k-q<k-1$, то полагаем $\delta=1$, уменьшаем q на единицу, удаляем x из списка N. Полагаем p равным первому элементу списка N и повторяем п. 2.2.

2.5. Полагаем $N=\varnothing$ и $N_{pm}=\varnothing$ для всех $x_p\in X$ и $m=1, \ldots, k$. Переходим к п. 2.1 для следующей непомеченной вершины. Если помечены все вершины $x_l\in R_r$, то вершина x_r становится просмотренной. Удаляем старые метки и переходим к п. 2.1 для следующей непросмотренной вершины $x_r\in X_{k-1}$. Если просмотрены все вершины $x_r\in X_{k-1}$, то списки S_{lk} (и соответственно множество X_k) определены. Удаляем старые метки и переходим к следующему шагу, считая все вершины $x_l\in X_k$ непросмотренными.

Шаг 3. Если $X_k\neq\varnothing$, то увеличиваем k на единицу и переходим к шагу 2. В противном случае таблица P_j построена. Максимальный номер столбца, для которого $S_{tk_j}\neq\varnothing$, определяет длину максимального ПП из s в t, проходящего через вершину $x_j\in\Gamma(s)$. Теперь вершина x_j считается просмотренной. Переходим к шагу 1 для следующей непросмотренной вершины $x_j\in\Gamma(s)$. Если просмотрены все вершины $x_j\in\Gamma(s)$, то длина максимального ПП из s в t равна $K=\max\limits_{x_j\in\Gamma(s)}\{k_j\}$ и алгоритм закончен.

Нетрудно видеть, что шаг 2 алгоритма основан на процедуре поиска в ширину [2].

Утверждение 1. Любой простой путь графа G из s в t, проходящий через вершину $x_j\in\Gamma(s)$, восстанавливается по таблице P_j.

Доказательство. Из действий шага 2 алгоритма вытекает, что в любое множество X_k включаются те и только те вершины x_l, которые достижимы из x_j по ПП длины $k-1$. Следовательно, $S_{lk}=\varnothing$ в том и только в том случае, когда в графе G нет простого пути из x_j в x_l длины $k-1$. Пусть существует ПП из x_j в t длины $k-1$, тогда $S_{tk}\neq\varnothing$. Из вышесказанного следует, что в этом случае найдется вершина $x\in S_{tk}$, для которой $S_{x(k-1)}\neq\varnothing$, а в списке $S_{x(k-1)}$ есть вершина $y\neq t$, x. Продолжая эту процедуру, найдем вершину $z\in S_{j2}$, не совпадающую с ранее выделенными вершинами. Присоединив к этим вершинам s, получим ПП из s в t длины k. Утверждение доказано.

Замечание. Таблицы P_j содержат в совокупности сведения о всех ПП из s в t графа G.

В самом деле, если дуга (x_{j_1}, x_l) вошла в таблицу P_{j_1}, то в некоторую таблицу P_{j_m} ребро (x_{j_1}, x_l) войдет (при условии существования ПП, содержащего дугу (x_l, x_{j_1})), ориентированным от x_l к x_{j_1}.

Нетрудно показать, что трудоемкость построения таблицы P_j оценивается величиной $O(n^4)$.

Часто (например, при решении потоковых задач) требуется найти ПП из s в t, начиная с вершины s. В этом случае таблицы P_j преобразуются в таблицу P, содержащую сведения о всех ПП из s в t графа G. В таблице P размерности $(n-1)\times K$ каждая l-я строка соответствует вершине $x_l \in X$ $(x_l \neq t)$, а номер k-го столбца — длине ПП из s, включающего дугу, инцидентную вершине x_l, в качестве последней. Элемент (l, k) таблицы P представлен списком S'_{lk} вершин $x_r \in X_k$ таблиц P_j, которым предшествует вершина x_l в ПП из s в x_r длины k. Если дуга (x_l, x_r) не является k-й дугой хотя бы одного ПП из s в t, то $x_r \notin S'_{lk}$. Для каждой вершины $x_r \in S'_{lk}$ определена метка M_r. Номер j вершины $x_j \in \Gamma(s)$ заносится в метку M_r только в том случае, если существует ПП из s в t, проходящий через эту вершину x_j, k-й вершиной которого является вершина x_r.

Назовем Π_{st}-подграфом подграф, построенный на множестве всех ПП из s в t графа G.

Построим по таблице P неориентированный граф $G^* = (X^*, A^*)$, придерживаясь следующей процедуры.

Ребра графа G^* находятся просмотром списков S'_{lk} столбцов таблицы P. Пусть просмотрен k-й столбец. Просмотр $k+1$-го столбца состоит в следующем. К вершине x_l присоединяем ребро (x_l, x_p), если $x_p \in S'_{l(k+1)}$ и это ребро еще не вошло в множество A^*. Граф G^* построен, если просмотрен последний столбец таблицы P.

Утверждение 2. Граф G^* является Π_{st}-подграфом графа G.

Доказательство. Пусть ребро $(x_l, x_p) \in A$ не вошло в граф G^*. Из способа организации таблицы P и процедуры построения графа G^* вытекает, что в этом случае $x_l \notin S_{pk}$ и $x_p \notin S_{lk}$ для любой таблицы P_j при всех $k=1, \ldots, k_j$. Тогда из доказательства утверждения 1 следует, что в графе G нет ни одного ПП из s в t, содержащего либо дугу (x_l, x_p), либо (x_p, x_l). Утверждение доказано.

Процедура нахождения по таблице P ПП из s в t, проходящего через данную вершину $x_j \in \Gamma(s)$, состоит в следующем. Включаем в путь вершину s. Пусть найдено k вершин $s, x_i, \ldots, x_p$ (где $x_p \neq t$), метка каждой из которых содержит значение j. Для определения $k+1$-й вершины ПП просматриваем список $S'_{p(k+1)}$ и включаем в путь вершину $x_r \in S'_{p(k+1)}$, для которой $j \in M_r$. Путь построен, если в него включена вершина t.

Обоснование процедуры следует из способа организации таблицы P и утверждения 2.

Список литературы

1. Shier D. // Networks. 1976. N. 6. P. 205.
2. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М., 1980.

Поступила в редакцию 26.06.86.

УДК 517.9:535.4

Памяти А. М. Родова

В. Т. ЕРОФЕЕНКО

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В предлагаемой работе выводятся некоторые теоремы сложения для потенциалов Дебая и векторов Герца в сферических, цилиндрических и декартовых координатах.