УДК 539.12.04

ЛЕ ТЬЕН ХАЙ, И. В. ПОЛИКАРПОВ

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ УГЛЕ ПАДЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ К ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

При прохождении равномерно движущейся ультрарелятивистской заряженной частицы через кристалл возникает параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) [1, 2], обусловленное тем, что при дифракции квантов в кристалле показатель преломления фотона в рентгеновской области частот может быть больше единицы и соответственно выполняется условие для излучения Вавилова — Черенкова.

Спектрально-угловые, а также интегральные характеристики параметрического рентгеновского излучения при нормальном прохождении заряженной частицы через кристаллическую пластинку рассмотрены в [1—3] (см. также [4, 5]). В данной работе получены спектрально-угловые и интегральные характеристики этого излучения в случае произвольного угла падения заряженной частицы к плоско-параллельной кристаллической пластинке. Показано, что интегральное число квантов ПРИ в его боковом пике, составляющем большой угол с направлением движения частицы, в случае наклонного падения частицы к пластинке может быть существенно больше, чем при ее нормальном падении.

Пусть скорость частицы $\vec{v}$ составляет некоторый угол с нормалью $\vec{N}$ к внешней стороне задней грани пластинки. Тогда направление бокового пика ПРИ определяется вектором $\vec{v}_\tau = \vec{v} + \dfrac{\vec{\tau}}{\omega_Б}$ [2], где $\omega_Б$ — частота, при которой выполняется условие Брэгга; $\vec{\tau}$ — вектор обратной решетки, определяющий семейство плоскостей, на которых происходит дифракция квантов. В дальнейшем для определенности рассмотрим геометрию дифракции по Лауэ ($\vec{v}\vec{N} > 0$, $\vec{v}_\tau\vec{N} > 0$).

Для нахождения спектрально-углового распределения излучения (см. [4, § 16]) необходимо знать точное решение однородных уравнений Максвелла $\vec{E}_{ks}^{(-)}$ при рассеянии на кристалле плоской электромагнитной волны $\vec{e}_s \exp\{i\vec{k}\vec{r}\}$ с вектором поляризации $\vec{e}_s$, имеющее асимптотику типа падающая плоская плюс сходящаяся сферическая волна. Выражение $\vec{E}_{ks}^{(-)}$ для фотона, излученного в боковой пик (вблизи направления $\vec{v}_\tau$), имеет вид [4, 5]:

$$\vec{E}_{ks}^{(-)*} = \vec{e}_s e^{-i\vec{k}\vec{r}}\Theta(z-T) + \sum_{\mu=1}^{2}[\vec{e}_s e^{-i\vec{k}\vec{r}}\xi_{\mu s}^{(0)} e^{i\omega\delta_{\mu s}(T-z)} +$$
$$+ \vec{e}_{\tau s} e^{-i(\vec{k}-\vec{\tau})\vec{r}}\xi_{\mu s}^{(\tau)} e^{i\omega\delta(T-z)}]\,\Theta(z)\,\Theta(T-z) +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{2}[\vec{e}_s \xi_{\mu s}^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}+i\omega\delta_{\mu s}T} + \xi_{\mu s}^{(\tau)}\vec{e}_{\tau s} e^{-i\vec{k}_g\vec{r}+i\omega T\delta_{\mu s}}]\,\Theta(-z),$$

где $\vec{k}_g$ — волновой вектор дифрагированного фотона в вакууме; $|\vec{k}_g| = |\vec{k}| = \omega$. Подчеркнем, что $\vec{k}_g \neq \vec{k} - \vec{\tau}$, а из условия непрерывности поля на границе пластинки вытекает только равенство $\vec{k}_{g\perp} = (\vec{k} - \vec{\tau})_\perp$, где знак $\perp$ означает проекцию вектора на плоскости—границе пластинки: $\vec{e}_{\tau\sigma} = \vec{e}_\sigma \| [\vec{k} \times \vec{\tau}]$, $\vec{e}_\pi \| [\vec{e}_\sigma \times \vec{k}]$, $\vec{e}_{\tau\pi} \| \vec{e}_\sigma \times [\vec{k} - \vec{\tau}]$ — векторы поляризации фотонов:

$$\xi_{\mu s}^{(0)} = (-1)^{3-\mu} \frac{2\gamma_1 \delta_{(3-\mu)s} - \chi_{00}}{2\gamma_1 (\delta_{2s} - \delta_{1s})}; \quad \xi_{\mu s}^{(\tau)} = (-1)^{\mu} \frac{\chi_{01}^{s}}{2\gamma_0 (\delta_{2s} - \delta_{1s})};$$

$$\delta_{\mu s} = \frac{1}{4\gamma_0\gamma_1} \{-\alpha_1\gamma_1 + \chi_{00}(\gamma_0 + \gamma_1) \pm \sqrt{[\gamma_1\alpha_1 - \chi_{00}(\gamma_1 - \gamma_0)]^2 + 4\gamma_0\gamma_1\chi_{01}^{s}\chi_{10}^{s}}\}; \tag{1}$$

$$\gamma_0 = (\vec{v}\vec{N}); \quad \gamma_1 = (\vec{v}_\tau\vec{N});$$

$\chi_{ij}^{s}(i,\ j = 0,\ 1)$ — коэффициенты разложения диэлектрической проницаемости кристалла по векторам обратной решетки; $\alpha_1 = (\tau^2 - 2\vec{k}\vec{\tau})/\omega^2$ — величина, характеризующая отклонение от точного условия Брэгга; T — толщина пластинки по направлению нормали $\vec{N}$.

Спектрально-угловое распределение фотонов в боковом пике излучения имеет вид ($\hbar = c = 1$):

$$N_{ks}^{\tau} = \frac{\omega e^2}{4\pi^2} (\vec{e}_{2s}\vec{v})^2 \left| \xi_{\mu s}^{(\tau)} \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_{\mu s}^{\tau}} \right) \left(\exp\left\{ -iq_{\mu s}^{\tau} \frac{T}{\gamma_0} \right\} - 1 \right) \right|^2,$$

где $q_0 = \omega - \vec{k}_g v = \frac{\omega}{2}(\gamma^{-2} + \vartheta_\tau^2)$; $q_{\mu s}^{\tau} = \omega - (\vec{k} - \vec{\tau})\vec{v} - \omega\delta_{\mu s}\gamma_0 = \frac{\omega}{2}(\gamma^{-2} + \vartheta_\tau^2 - \alpha - 2\delta_{\mu s}\gamma_0)$ — обратные величины длин когерентности излучения фотонов в вакууме и среде соответственно; ϑ_τ — угол между векторами $\vec{k}$ и $\vec{v}_\tau$; γ — Лоренц-фактор частицы.

На плоскости $(\omega,\ \vartheta_\tau)$ линия ПРИ имеет вид:

$$\mathrm{Re}\, q_{\mu s}^{\tau} = 0 \quad \text{или} \quad \gamma^{-2} + \vartheta_\tau^2 - \mathrm{Re}\,(\alpha_1 + 2\delta_{\mu s}\gamma_0) = 0. \tag{2}$$

Условие (2) в рассматриваемой геометрии Лауэ может выполняться только для одной ветви $\mu = 1$, соответствующей знаку $+$ перед квадратным корнем в (1). (В дальнейшем будем интересоваться именно этой ветвью). В конечной пластинке с учетом поглощения квантов длина формирования ПРИ обрезается меньшей из длин: T/γ_0 — длина мишени в направлении скорости частицы и $L_{\text{погл.}}(x_\tau) = -(\omega\,\mathrm{Im}\, q_{1s}^{\tau}(x_\tau))^{-1}$ — длина поглощения фотонов на точной линии ПРИ (x_τ). Соответственно линия ПРИ (6) как бы размывается, и область ее уширения определяется из условия $|\mathrm{Re}\, q_{1s}^{\tau}| \lesssim L_{\text{эф.}}^{-1}$, где

$$L_{\text{эф.}} = L_{\text{погл.}}(x_\tau)\left(1 - \exp\left[-\frac{T}{\gamma_0 L_{\text{погл.}}}\right]\right); \tag{3}$$

$L_{\text{погл.}}(x_\tau)$ находится аналогично [5]:

$$L_{\text{погл.}}(x_\tau) = \frac{2}{\omega_{\text{Б}}\chi_{00}''\beta} \frac{(\vartheta_\tau^2 + \vartheta_{\text{ф.}}^2)^2 + \beta r_s'}{((\vartheta_\tau^2 + \vartheta_{\text{ф.}}^2 + \delta_s)^2 + r_s' - \delta_s^2}; \tag{4}$$

$\beta = \gamma_0/\gamma_1$; $\vartheta_{\text{ф.}}^2 = \gamma^{-2} + |\chi_{00}'|$; $\delta_s = \frac{r_s''}{2\chi_{00}'}$; $r_s' = \mathrm{Re}\,(\chi_{01}^{s}\chi_{10}^{s})$; $v_s'' = \mathrm{Im}\,(\chi_{01}^{s}\chi_{10}^{s})$; $\chi_{00} = \chi_{00}' + i\chi_{00}''$; все величины χ_{ij}^{s} в (4) берутся в точке $\omega_{\text{Б}}$.

Выпишем выражения для ширины линии ПРИ x_τ по частотам и его углового распределения:

$$(\Delta\omega)|_{\vartheta_\tau = \text{const}} = \frac{1}{\omega_{\text{Б}} L_{\text{эф.}} \sin^2\Theta_{\text{Б}}} \cdot \frac{(\vartheta_\tau^2 + \vartheta_{\text{ф.}}^2)^2 + \beta r_s'}{(\vartheta_\tau^2 + \vartheta_{\text{ф.}}^2)^2}; \tag{5}$$

$$\frac{dN_s^{\tau}}{d\Omega_\tau} = \frac{e^2\omega_{\text{Б}}L_{\text{эф.}}}{4\pi\sin^2\Theta_{\text{Б}}} (\vec{e}_{\tau s}\vec{v})^2 \frac{|\chi_{01}|^2}{((\vartheta_\tau^2 + \vartheta_{\text{ф.}}^2)^2 + \beta r_s')} \cdot \frac{\left(1 + \Theta\left(L_{\text{погл.}} - \frac{T}{\gamma_0}\right)\right)}{2}. \tag{6}$$

В (5), (6) все величины χ_{ij}^{s} берутся в точке $\omega_{\text{Б}}$; $\Theta_{\text{Б}}$ — угол между $\vec{v}$ и плоскостью отражения.

Интегрируя (6) по углам, найдем полное число квантов, попадающих в боковой пик ПРИ, в двух предельных случаях:

а) тонкой мишени

$$\frac{T}{\gamma_0} < L_{\text{погл.}}(x_\tau); \tag{7}$$

$$N_s^\tau = \frac{e^2 |\chi_{01}^s|^2 \omega_Б T}{2\gamma_0 \sin^2 \Theta_Б} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(\vartheta_D^2 + \vartheta_{ф.}^2)^2 + \beta r_s'}{\vartheta_{ф.}^4 + \beta r_s'} \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\vartheta_{ф.}^2}{\sqrt{\beta r_s'}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\vartheta_{ф.}^2 + \vartheta_D^2}{\sqrt{\beta r_s'}} - \operatorname{arctg} \frac{\vartheta_{ф.}^2}{\sqrt{\beta r_s'}} \right] \right\}. \tag{8}$$

б) толстой мишени

$$\frac{T}{\gamma_0} > L_{\text{погл.}}(x_\tau); \tag{9}$$

$$N_s^\tau = \frac{e^2 |\chi_{01}^s|^2}{8\chi_{00}'' \sin^2 \Theta_Б \beta} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(\vartheta_D^2 + \vartheta_{ф.}^2 + \delta_s)^2 + r_s' - \delta_s^2}{(\vartheta_{ф.}^2 + \delta_s)^2 + r_s' - \delta_s^2} \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\vartheta_{ф.}^2 + \delta_s}{\sqrt{r_s' - \delta_s^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\vartheta_D^2 + \vartheta_{ф.}^2 + \delta_s}{\sqrt{r_s' - \delta_s^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\vartheta_{ф.}^2 + \delta_s}{\sqrt{r_s' - \delta_s^2}} \right] \right\}; \tag{10}$$

ϑ_D — угловая ширина детектора, определяемая коллимацией фотонов.

Формулы (5)—(10), а также (3)—(4) позволяют сравнивать характеристики параметрического рентгеновского излучения бокового пика при нормальном и наклонном падении частицы к пластинке:

а) нормальное падение частицы к пластинке — $\gamma_0 = 1$; $\gamma_1 = \cos 2\Theta_Б$.

б) наклонное падение — скорость частицы $\vec{v}$ составляет угол $2\Theta_Б < \pi/2$ с нормалью $\vec{N}$. Тогда направление $\vec{v}_\tau$ совпадает с $\vec{N}$, $\gamma_0 = \cos 2\Theta_Б$, $\gamma_1 = 1$.

Отражение фотонов происходит от плоскостей (h, k, l) и $(\bar{h}, \bar{k}, \bar{l})$.

С учетом (3)—(10) получим следующие соотношения.

1. Для тонкой пластинки:

$$T < \frac{2\cos^2 \Theta_Б}{\chi_{00}'' \omega_Б}; \quad (\Delta\omega)^{\text{нак.}} \simeq \cos 2\vartheta_Б (\Delta\omega)^{\text{нор.}}; \tag{11}$$

$$\left(\frac{dN_s^\tau}{d\Omega_\tau} \right)^{\text{нак.}} \simeq \frac{1}{\cos 2\Theta_Б} \left(\frac{dN_s^\tau}{d\Omega} \right)^{\text{нор.}}; \quad (N_s^\tau)^{\text{нак.}} \simeq \frac{1}{\cos 2\Theta_Б} (N_s^\tau)^{\text{нор.}}. \tag{12}$$

Если выполняется условие (11), формирование ПРИ для нормального и наклонного падения происходит на всей длине прохождения частицы через пластинку. Эта длина при наклонном падении в $(\cos 2\Theta_Б)^{-1}$ раз превышает длину при нормальном падении.

2. Для толстой пластинки:

$$T > \frac{2}{\chi_{00}'' \omega_Б}; \quad (\Delta\omega)^{\text{нак.}} \simeq \cos^2 2\Theta_Б (\Delta\omega)^{\text{нор.}}; \tag{13}$$

$$\left(\frac{dN_s^\tau}{d\Omega_\tau} \right)^{\text{нак.}} \simeq \frac{1}{\cos^2 2\Theta_Б} \left(\frac{dN_s^\tau}{d\Omega_\tau} \right)^{\text{нор.}}; \quad (N_s^\tau)^{\text{нак.}} \simeq \frac{1}{\cos^2 2\Theta_Б} (N_s^\tau)^{\text{нор.}}. \tag{14}$$

Соотношения (13) и (14) также имеют ясную физическую интерпретацию: длина формирования ПРИ в обоих случаях ограничена длиной поглощения квантов $L_{\text{погл.}}(x_\tau)$, а из (4) видно, что

$$(L_{\text{погл.}}(x_\tau))^{\text{нак.}} \simeq \frac{1}{(\cos 2\Theta_Б)^2} (L_{\text{погл.}}(x_\tau))^{\text{нор.}}. \tag{15}$$

Заметим, что в асимметричной геометрии дифракции от плоскостей (h, k, l) и $(\bar{h}, \bar{k}, \bar{l})$ коэффициенты отражения рентгеновских лучей также различны (см. [6]).

3. Случай промежуточной длины:

$$\frac{2\cos 2\Theta_Б}{\chi''_{00}\omega_Б} < T < \frac{2}{\chi''_{00}\omega_Б}.$$

Здесь соотношения характеристик бокового пика параметрического рентгеновского излучения при нормальном и наклонном падении имеют промежуточный характер между выражениями (12) и (14). Отметим, что мы пренебрегли зеркально-отраженными волнами рентгеновских лучей от кристаллической пластинки, поэтому условие применимости формул (5), (6) и соотношений (12), (14) будет:

$$\max\left\{\frac{1}{\gamma_0};\ \frac{1}{\gamma_1}\right\} \ll |\chi'_{00}(\omega_Б)|^{-1/2}. \tag{16}$$

Кроме того, в данной работе не учитывалось влияние многократного рассеяния заряженной частицы внутри пластинки на генерацию ПРИ. Это справедливо, если длина формирования тормозного излучения T_s гораздо больше $L_{эф.}$, определямой в (3), где $T_s = (\omega q)^{-1/2}$; $q = \left(\frac{E_s}{2E}\right)\frac{1}{L_R}$ — одна четверть среднеквадратичного угла многократного рассеяния частицы на единицу пути; $E_s = 21$ МэВ, E — полная энергия электрона, L_R — радиационная единица длины [7]. Из условия $T_s \gg L_{эф.}$ следует

$$E \gg \frac{E_s}{2}\sqrt{\frac{\omega L^2_{эф.}}{L_R}}.$$

Как видно из (16), соотношения (12) и (14) применимы вплоть до значения $(\cos 2\Theta_Б)^{-1} \sim 1 \div 100$. Таким образом, $(N^s_\tau)^{нак.}$ может в $10^2 \div 10^4$ раз превосходить $(N^\tau_s)^{нор.}$.

Аналогичная ситуация имеет место и для генерации ПРИ по геометрии Брэгга ($\vec{v}\vec{N} > 0$, $\vec{v}_\tau\vec{N} < 0$): остаются в силе соотношения (16)—(20) с заменой $\cos 2\Theta_Б$ на $|\cos 2\Theta_Б|$.

Авторы выражают благодарность В. Г. Барышевскому, А. О. Грубичу, И. Д. Феранчуку за интерес к работе и плодотворное обсуждение.

Список литературы

1. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. Вып. 9. С. 944. Там же. 1973. Т. 64. Вып. 2. С. 760.
2. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1973. № 2. С. 102.
3. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. // Phys. Lett. 1976. V. 57A. N 2. P. 183.
4. Барышевский В. Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. Минск, 1982.
5. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. // Journ. de Phys. 1983. V. 44. N 8. P. 913.
6. Пинскер З. Г. Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах. М., 1974.
7. Тер-Микаелян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван, 1969.

Поступила в редакцию 20.04.87.

УДК 530.12+530.145

Г. В. ШИШКИН, В. ВИЛЬЯЛЬБА

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ ДИРАКА ВО ВНЕШНИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЯХ. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

1. Уравнение Дирака во внешних векторных полях изучалось многими авторами (см., например, [1—4], в том числе обширную библиогра-