

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

10 июня 2024 г.

Регистрационный №УД-13111/уч.

БАЗИСЫ ГРЕБНЕРА

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности:

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021 и учебных планов № G31-1-003/уч. от 25.05.2021, № G31-1-061/уч. ин. от 31.05.2021, № G 31-1-207/уч. от 22.03.2022, №G 31-1-243/уч. ин. от 27.05.2022.

СОСТАВИТЕЛИ:

Тихонов Сергей Викторович, заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович, заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Курсов Валерий Владимирович, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Васильев Денис Владимирович, заведующий отделом теории чисел и дискретной математики Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации БГУ
(протокол № 12 от 29.05.2024);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол №8 от 31.05.2024)

Заведующий кафедрой высшей алгебры
и защиты информации, доцент

С.В. Тихонов

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

В последние десятилетия базис Гребнера идеала стал играть важную роль во многих исследованиях по абстрактной алгебре, компьютерной алгебре, алгебраической геометрии, теории выпуклых многогранников, дискретной геометрии и других областях математики.

Образовательная цель: ввести понятие базиса Гребнера идеала и алгоритм его построения и показать, насколько сильные алгоритмические методы — это понятие предоставляет как для решения общих систем алгебраических уравнений, так и для решения различных вопросов, связанных с идеалами в кольцах полиномов.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления; знакомство с методами математических доказательств; изучение алгоритмов решения конкретных математических задач; привитие студентам умения самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Базисы Гребнера»:

- ознакомить студентов с понятиями идеала, аффинного многообразия, базиса Гребнера;
- изучить ряд важнейших свойств идеалов и многообразий, в частности познакомиться с теоремами Гильберта о базисе и о нулях;
- познакомиться с приложениями полученных результатов как к решению систем алгебраических уравнений, так и к решению различных вопросов, связанных с идеалами в кольцах полиномов;
- развить у студентов аналитическое мышление и общую математическую культуру;
- привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к дисциплинам специализации компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Базисы Гребнера» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

базовые профессиональные компетенции:

БПК. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира.

БПК. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

Специализированные компетенции:

СК. Применять ключевые методы защиты информационных систем при реализации криптоприложений.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия и результаты теории базисов Гребнера
- методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках учебной дисциплины «Базисы Гребнера»;
- алгоритмы решения основных задач, связанных с системами алгебраических уравнений и с идеалами в кольцах полиномов;

уметь:

- строить базис Гребнера идеала;
- применять критерий Бухбергера S -пар;
- строить базис пересечения идеалов;
- решать задачу о принадлежности идеалу и о принадлежности радикалу идеала;
- решать задачу о совместности системы и о конечности числа решений системы;
- уметь решать алгоритмические задачи по курсу «Базисы Гребнера»;

владеть:

- основными навыками решения задач теории базисов Гребнера;
- методами доказательств основных теорем, встречающихся в курсе «Базисы Гребнера»;
- навыками самообразования и способами использования аппарата теории базисов Гребнера для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 7 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Базисы Гребнера» отведено:

- в очной форме получения высшего образования: 108 часов, в том числе 54 аудиторных часа, из них: лекции – 48 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Идеалы и аффинные многообразия.

Полиномы и аффинное пространство. Аффинные многообразия. Идеалы и их связь с аффинными многообразиями. Системы алгебраических уравнений и их связь с идеалами.

Тема 2. Базисы Гребнера.

Мономиальные порядки. Алгоритм деления многочлена на систему многочленов в кольце многочленов от нескольких переменных. Мономиальные идеалы и лемма Диксона. Теорема Гильберта о базисе и базисы Гребнера. Свойства базисов Гребнера. S -полиномы, критерий Бухбергера S -пар. Алгоритм Бухбергера. Минимальный и редуцированный базис Гребнера. Критерий принадлежности идеалу. Критерий равенства идеалов.

Тема 3. Теория исключения.

Исключающие идеалы. Теорема об исключении, ее применение к системам алгебраических уравнений. Теорема о продолжении.

Тема 4. Теорема Гильберта о нулях.

Слабая и сильная теоремы Гильберта о нулях. Критерий совместности системы алгебраических уравнений. Радикал идеала. Критерий принадлежности радикалу идеала. Критерий равенства радикалов двух идеалов. Критерий эквивалентности систем алгебраических уравнений.

Тема 5. Применения базисов Гребнера.

Суммы, произведения и пересечения идеалов. Алгоритм построения базиса пересечения идеалов. НОД и НОК многочленов, алгоритм их нахождения. Частное идеалов. Алгоритм построения базиса частного идеалов. Нормальная форма полиномов в факторкольце, операции в факторкольце. Критерий конечномерности факторкольца. Критерий конечности числа решений системы алгебраических уравнений.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением
дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1.	Идеалы и аффинные многообразия	8						Устный опрос.
2.	Базисы Гребнера	14					2	Устный опрос. Контрольная работа 1.
3.	Теория исключения	4						Устный опрос.
4.	Теорема Гильберта о нулях	8					2	Устный опрос. Коллоквиум.
5.	Применения базисов Гребнера	14					2	Устный опрос. Контрольная работа 2.
	Итого	48					6	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Прасолов В.В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2014.
2. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.
3. Аржанцев И.В. Лекции о базисах Гребнера. М., 2002.
4. Аржанцев И.В. Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений. М.: МЦНМО, 2003.

Дополнительная литература

1. W.W. Adams, P. Loustaunau. An introduction to Gröbner bases. AMS, 1994.
2. J. von zur Gathen, J. Gerhard. Modern computer algebra. Cambridge University Press, 1999.
3. Т. Becker, V. Weispfenning. Gröbner bases. A computational approach to commutative algebra. Springer-Verlag, 1993.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Контроль работы студента проходит в форме устных опросов, коллоквиума, выполнения контрольных и самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории. Задания к самостоятельным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Базисы Гребнера» учебным планом предусмотрен **зачет**.

Зачет по дисциплине выставляется в случае сдачи всех контрольных работ и коллоквиума.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 2. Базисы Гребнера. (2 ч.)

Примерный перечень заданий.

1. Разделить многочлен $f = x^7 y^2 + x^3 y^2 - y + 1$ на системы многочленов (f_1, f_2) и (f_2, f_1) , где $f_1 = xy^2 - x$, $f_2 = x - y^3$, используя различные мономиальные порядки.
2. С помощью алгоритма Бухбергера найти базис Гребнера идеала $(x^2 y + z, xz + y)$, используя мономиальный порядок *deglex* и упорядочение $x > y > z$. Из найденного базиса построить минимальный и редуцированный базис Гребнера.
3. Найти базис Гребнера идеала $(x^2 + y^2 + 1, x^2 y + 2xy + x) \subset \mathbb{Z}_5[x, y]$, используя мономиальный порядок *lex* и упорядочение $x > y$. Из найденного базиса построить минимальный и редуцированный базис Гребнера.

4. Найти базис Гребнера идеала $I = (xy^2 - 2z - z^2, x^2y - 2y)$, мономиальный порядок lex, $x > y > z$.

Форма контроля – контрольная работа №1.

Тема 4. Теорема Гильберта о нулях. (2 ч.)

Примерный перечень заданий.

1. Показать, что функция $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)z + z^3 + x + y$ не имеет вещественных критических точек (т.е. точек, в которых все три частных производные обращаются в 0).
2. Пусть $I = (x^4y^2 + z^2 - 4xy^3z - 2y^5z, x^2 + 2xy^2 + y^4)$ и $f = yz - x^3$. Показать, что $f \in \sqrt{I}$. Найти наименьшее k , такое, что $f^k \in I$.
3. Докажите, что $\sqrt{(x^2, y^2)} = (x, y)$.
4. Пусть f, g – различные непостоянные многочлены в $k[x, y]$, и пусть $I = (f^2, g^3)$. Верно ли, что $\sqrt{I} = (f, g)$?
5. Верно ли, что $x + y \in \sqrt{(x^3, y^3, xy(x + y))}$? Если да, то найдите наименьшую степень полинома, принадлежащую исходному идеалу.

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 5. Применения базисов Гребнера. (2 ч.)

Примерный перечень заданий.

1. Пусть $I = (x^2 + z, xy + y^2 + z, xz - y^3 - 2yz, y^4 + 3y^2z + z^2)$, $J = (x^2 + z, xy + y^2 + z, x^3 - yz)$ – идеалы в $\mathbb{Q}[x, y, z]$. а) Определить, что верно: $I \subset J, J \subset I, I = J$. б) Найти базис пересечения $I \cap J$.
2. Найти НОД и НОК многочленов $f = x^2y^2 - y^2 + x^2 - 1, g = xy^2 - y^2 - x + 1$.
3. Определить, принадлежит ли многочлен $f = xy^3 - z^2 + y^5 - z^3$ идеалу $I = (-x^3 + y, x^2y - z)$.
4. Определить, конечно ли аффинное многообразие и если да, то найти его точки: $V(x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2x, 2x - 3y - z)$.
5. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2y - z^3 = 0, \\ 2xy - 4z - 1 = 0, \\ z - y^2 = 0, \\ x^3 - 4zy = 0. \end{cases}$$

Форма контроля – контрольная работа №2.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа 1.

1. Найти остаток от деления полинома $f = x^7 y^2 + x^3 y^2 - y + 1$ на упорядоченный набор $F = (xy^2 - x, x - y^3)$, используя лех-упорядочивание.

2. Вычислить $S(f, g)$, используя лех-упорядочивание: а) $f = 4x^2 - 7y^2$, $g = xyz^2 + 3xz^4$; б) $f = x^4 y - z^2$, $g = 3xz^2 - y$; в) $f = x^7 y^2 z - 2xyz$, $g = 2x^7 y^2 z + 4$.

3. Является ли G базисом Грёбнера соответствующей системы: а) $G = \{x^2 - y, x^3 - z\}$ grlex-упорядочивание; б) $G = \{x^2 - y, x^3 - z\}$, invlex-упорядочивание.

4. Вычислить базисы Грёбнера следующих идеалов: а) $I = \langle x^2 y - 1, xy^2 - x \rangle$; б) $I = \langle x^2 y - 1, xy^2 - x \rangle$, grlex-упорядочивание.

5. Определить, принадлежит ли полином $f = xy^3 - z^2 + y^5 - z^3$ идеалу $I = \langle -x^3 + y, x^2 y - z \rangle$.

Контрольная работа 2.

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + z^2 = y, \\ x = z. \end{cases}$$

в C^3 . Эти уравнения задают идеал $I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + z^2 - y, x - z \rangle \subset C[x, y, z]$. Найти все точки многообразия $V(I)$.

2. Найдите минимальные редуцированные базисы Грёбнера для следующих идеалов:

а) $I = \langle x^2 y - 1, xy^2 - x \rangle$; б) $I = \langle x^2 + y, x^4 + 2x^2 y + y^2 + 3 \rangle$;

в) $I = \langle x - z^4, y - z^5 \rangle$. Используйте лех-упорядочение.

3. Является ли аффинное многообразие конечным: $V(x^2 y - z^3, 2xy - 4z - 1, z - y^2, x^3 - 4zy)$.

4. Найдите базис пересечения идеалов $I = \langle x^2 + yz + 1, xy - 1 \rangle$ и $J = \langle x^3 + y^2 + xyz, xz - 2 \rangle$.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

– использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;

– выполнение домашних заданий;

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Базисы Гребнера» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к зачету

На зачете по дисциплине «Базисы Гребнера» студент должен продемонстрировать умение решать следующие задачи и объяснять свои действия с точки зрения теории.

1. Мономиальные порядки. Примеры: lex , $grlex$, $grevlex$. Доказать, что каждое из них является мономиальным порядком.
2. Мономиальные идеалы. Критерий принадлежности монома и полинома мономиальному идеалу.
3. Лемма Диксона.
4. Теорема Гильберта о базисе. Следствие об обрыве возрастающих цепей идеалов в $k[x_1, \dots, x_n]$. Определение базиса Гребнера идеала.
5. S -полиномы. Критерий Бухбергера S -пар (без доказательства).
6. Алгоритм Бухбергера построения базиса Гребнера и обоснование корректности его работы.
7. Минимальный базис Гребнера идеала. Редуцированный базис Гребнера идеала – определение, существование и единственность.
8. Исключающие идеалы. Теорема об исключении.
9. Слабая теорема Гильберта о нулях.
10. Теорема Гильберта о нулях.
11. Радикал идеала и его свойства.
12. Применение базисов Гребнера:
 - Критерий принадлежности полинома идеалу.

- Критерий равенства идеалов.
- Критерий принадлежности полинома радикалу идеала.
- Критерий равенства радикалов идеалов.
- Алгоритм нахождения базиса пересечения идеалов.
- Алгоритм нахождения базиса частного идеалов.
- НОК и НОД многочленов от нескольких неизвестных.
- Критерий конечности числа решений системы алгебраических уравнений.
- Критерий эквивалентности двух систем алгебраических уравнений.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой высшей алгебры
и защиты информации, кандидат
физико-математических, доцент



С.В. Тихонов

29.05.2024 г.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей алгебры и защиты информации (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой

_____ (ученая степень, ученое звание)

_____ (подпись)

_____ (И.О. Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

_____ (ученая степень, ученое звание)

_____ (подпись)

_____ (И.О.Фамилия)