ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Н. Н. Труш, Т. В. Соболева

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: TroushNN@bsu.by, Soboleva@bsu.by

В статье приводится определение устойчивых случайных величин и рассматриваются вопросы, связанные с использованием устойчивых распределений в учебном процессе.

Ключевые слова: устойчивое распределение, устойчивые случайные величины.

В настоящее время в некоторых областях техники, физики, астрономии и экономики появляются практические задачи, использующие устойчивые распределения. Среди устойчивых распределений только нормальное имеет конечную дисперсию и такие процессы исследованы достаточно хорошо. Изучение свойств устойчивых распределений является частью специальных и общих курсов, читаемых на факультете прикладной математики и информатики. Сложность практического применения этого распределения состоит в том, что устойчивое распределение не имеет явного выражения для плотностей и функций распределения (за исключением гауссовского, Коши и Леви распределений). Однако Дж. Нолану [3] удалось создать модуль StableDistribution в системе Mathematica 5.0, который позволяет вычислять значения плотности распределения и генерировать устойчивые случайные величины.

Как известно, Mathematica 5.0 представляет собой универсальный математический пакет, предназначенный для аналитических и численных расчетов. Система Mathematica 5.0 имеет большое количество функций, многофункциональный язык программирования, удобный интерфейс, текстовый редактор. Несмотря на то, что пакет Mathematica 5.0 предназначен для научных исследований, он широко используется в учебном процессе.

В данной статье остановимся на дополнительных возможностях применения математической системы Mathematica 5.0.

Приведем некоторые вспомогательные определения.

Определение. [1, 2]. Для того чтобы случайная величина ξ была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы логарифм ее характеристической функции $\varphi_\xi(t)$ имел представление

$$\ln \varphi_\xi(t) = i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha + i\sigma^\alpha t\omega(t, \alpha, \beta), \qquad (1)$$

где $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\sigma > 0$, $\mu \in R$, $t \in R$,

$$\omega(t,\alpha,\beta)=\begin{cases}|t|^{\alpha-1}\beta tg\dfrac{\pi}{2}\alpha, & \alpha\neq 1,\\ -\beta\dfrac{2}{\pi}\ln|t|, & \alpha=1.\end{cases}$$

Класс устойчивых распределений представляет собой четырехпараметрическое семейство с параметрами: α — характеристическим показателем; β — параметром асимметрии; σ — параметром масштаба; μ — параметром положения. Параметр α характеризует степень убывания плотности распределения устойчивого закона $p_\xi(x)$ при $|x|\to\infty$. Это связано с тем, что случайная величина ξ имеет моменты лишь порядка p, где $0<p<\alpha<2$, а при $\alpha = 2$ она является нормально распределенной случайной величиной с конечной дисперсией.

Параметр β характеризует степень асимметричности распределения. Если $\beta = 0$, то распределение симметрично. При $\beta>0$ $(\beta<0)$ распределение сдвинуто влево (вправо) и становится более асимметричным при $|\beta|\to 1$.

При $\alpha>1$ параметр μ совпадает с математическим ожиданием случайной величины ξ, а если $\alpha\leq 1$, то в этом случае $M\xi=\infty$, и параметр μ не имеет смысла математического ожидания. Однако, если в этом случае $\beta = 0$, то параметр μ совпадает с медианой распределения.

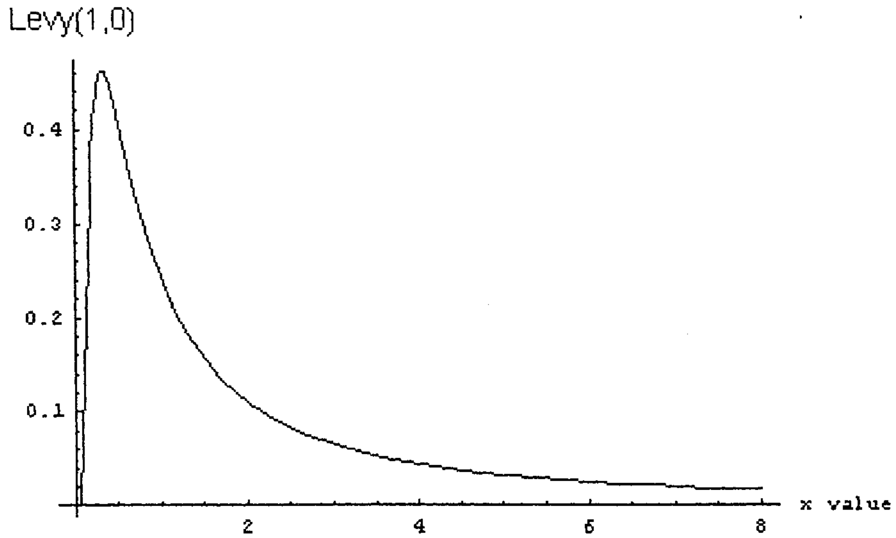
Параметр σ играет роль масштабного множителя. Это связано с тем, что любая устойчивая случайная величина ξ может быть представлена в виде $\xi=\sigma\xi_0$, где ξ_0 — случайная величина с теми же параметрами α, β, μ, что и ξ, но $\sigma=1$.

Для устойчивой случайной величины ξ, имеющей логарифм характеристической функции вида (1), будем использовать обозначение $\xi\sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)$.

Устойчивые случайные величины имеют явные выражения плотности распределения лишь при $\alpha=1/2$; 1; 2. Приведем их.

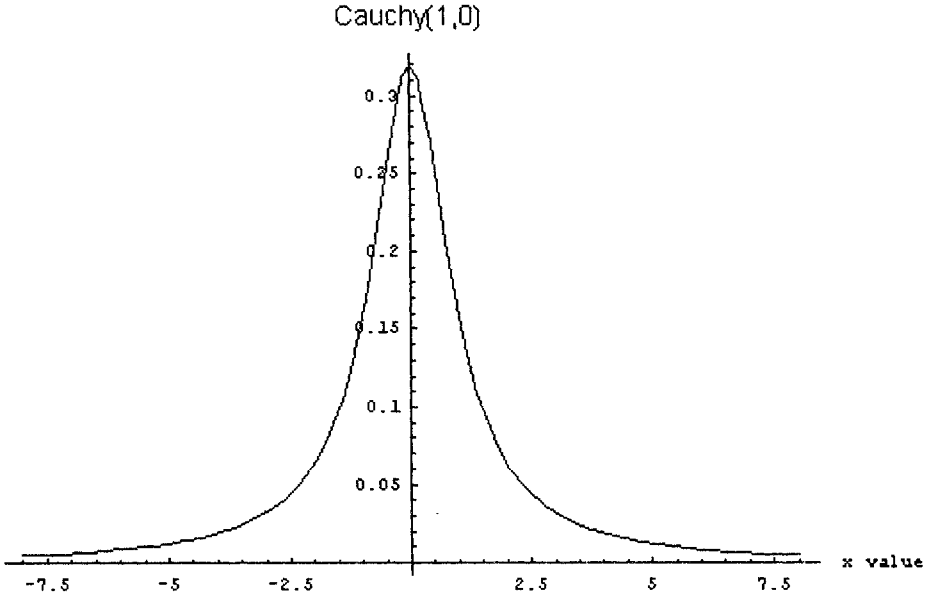
1. Распределение Леви ($S_{1/2}(1{,}0{,}1)$):

$$p(x)=\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}}\frac{1}{(x-\mu)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right),\quad \delta<x<\infty.$$



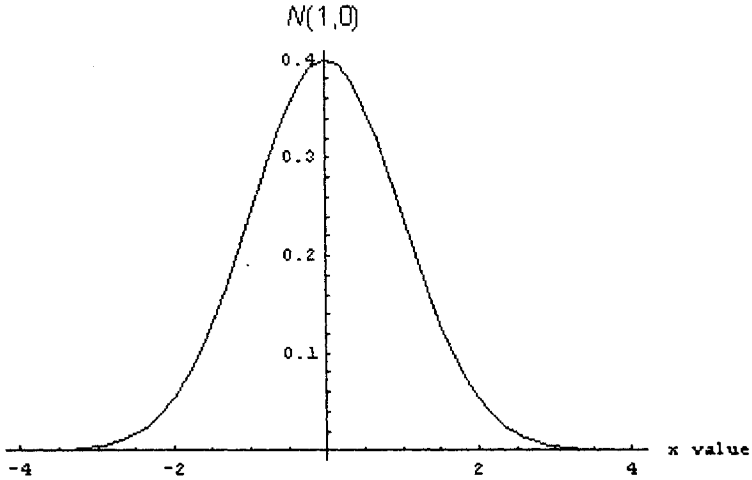
2. Распределение Коши ($S_1(0,1,0)$):

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}\right), \quad x \in R.$$



3. Распределение Гаусса ($S_2(0,1,0)$):

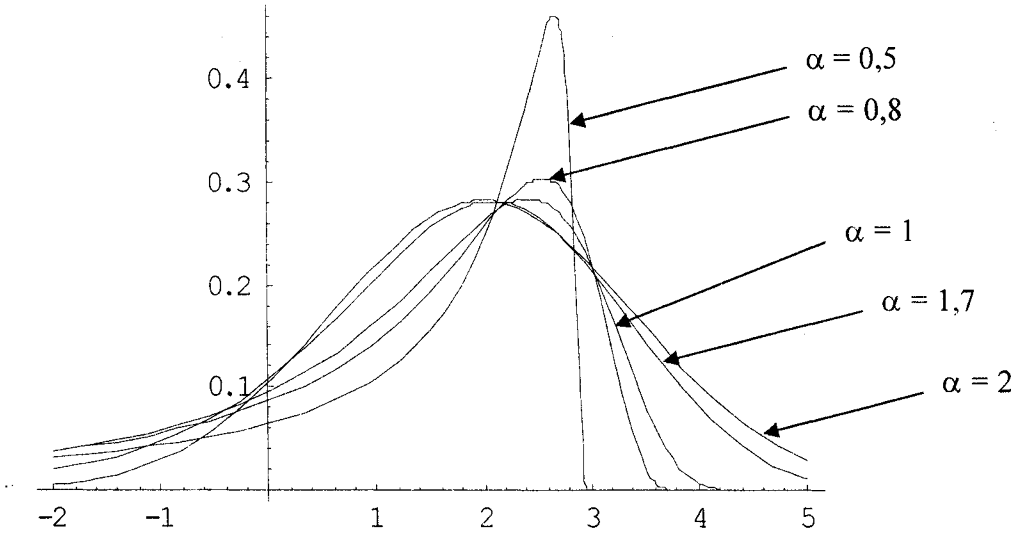
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in R.$$



Перейдем к рассмотрению некоторых функций модуля StableDistribution.

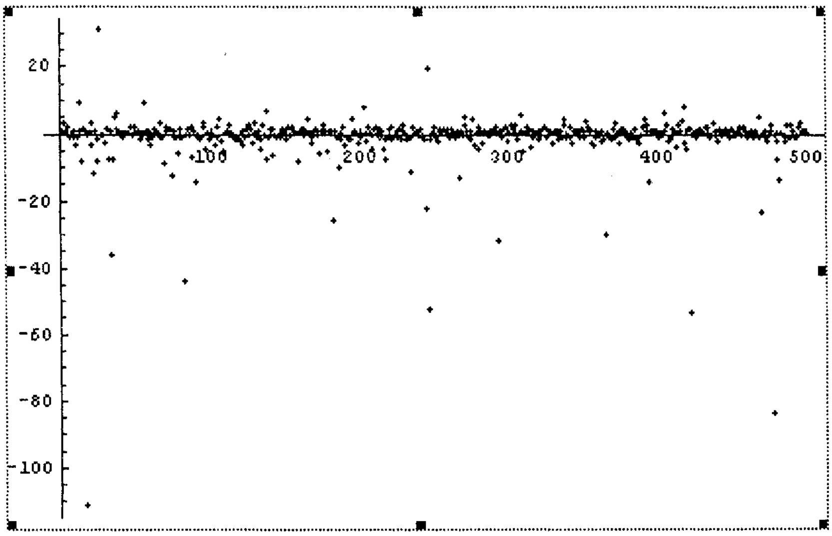
Функция SPDF[x, {α, β, σ, μ}] вычисляет значения плотности распределения для различных x. Приведем пример графиков плотностей устойчивых распределений для различных значений параметра α.

$S_\alpha(-1,1,2)$ для $\alpha = 0{,}5;\ 0{,}8;\ 1;\ 1{,}7;\ 2$.



Функция SRandom [n, {α, β, σ, μ}] генерирует n устойчивых случайных величин с параметрами α, β, σ, μ.

```
data = SRandom[500,{1.3, -0.5, 1, 0.4}, 0];
ListPlot[data,PlotRange->All];
```



ЛИТЕРАТУРА

1. *Золотарев, В. М.* Одномерные устойчивые распределения / В. М. Золотарев. – М. : Наука, 1983. – 304 с.
2. *Труш, Н. Н.* Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н. Н. Труш. – Минск : БГУ, 1999. – 217 с.
3. *Nolan, J.* Stable distributions / J. Nolan // Models for Heavy Tailed Data / Math. Stat Department Am. University. – 2002. – P. 1–23.