УДК 517.955

А.А. ВОРОШИЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

The Cauchy problem for the linear differential equation with the Caputo partial derivative of fractional order $\alpha > 0$ with respect to time is investigated. The equation under consideration generalizes the convection equation and the fractional diffusion-wave equation. Using direct and inverse Laplace and Fourier transforms, a solution in closed form of the above problem is established.

В последние годы возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений с частными дробными производными, обобщающих классические уравнения в частных производных, такие как уравнение теплопроводности, волновое уравнение и др. Это обусловлено их обширными применениями в задачах физики, химии и других прикладных наук, в частности, приложениями к процессам субдиффузии и супердиффузии (см. историческую справку и обзор результатов в [1, гл. 7]).

В настоящей работе рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\left({}^{c}D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\lambda^{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\qquad\left(x\in\mathbb{R},\ t>0,\ \alpha>0,\ \lambda>0,\ \mu\in\mathbb{R}\right),\tag{1}$$

где $\left({}^{c}D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)$ – частная дробная производная Капуто порядка $\alpha > 0$ от функции $u(x,t)$ по второй переменной

$$\left({}^{c}D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\left(D^{\alpha}_{0+,t}\left[u(x,t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k}}{k!}\frac{\partial^{k}u}{\partial t^{k}}(x,0)\right]\right)(x,t)\qquad\left(x\in\mathbb{R},\ t>0,\ \alpha>0,\ n=-[-\alpha]\right),\tag{2}$$

определяемая через частную дробную производную Римана – Лиувилля [2, с. 342]

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{u(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\qquad\left(x\in\mathbb{R},\ t>0,\ \alpha>0,\ n=-[-\alpha]\right).$$

Для натуральных значений $\alpha = n\in\mathbb{N}$ дробная производная Капуто совпадает с обычной производной n-го порядка. Так, если $\alpha = 1$, то

$$\left({}^{c}D^{1}_{0+,\,t}u\right)(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

и уравнение (1) при $\alpha = 1$ совпадает с уравнением конвекции [3, (1.1.4)]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\lambda^{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\qquad\left(x\in\mathbb{R},\quad t>0\right).\tag{3}$$

Поэтому уравнение (1) называют дробным уравнением конвекции.

Если параметр μ равен нулю, уравнение (1) совпадает с дробным диффузионно-волновым уравнением

$$\left({}^{c}D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\lambda^{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\qquad\left(x\in\mathbb{R},\ t>0,\ \alpha>0,\lambda>0\right),\tag{4}$$

которое было исследовано в работах [4–6].

В [7] получен алгоритм решения нелинейного дробного уравнения конвекции с дробной производной Капуто

$${}^{c}D^{\alpha}_{0+,t}u=\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}-c\frac{\partial u}{\partial x}+\Psi(u)+f(x,t)\qquad\left(0<x<1,\ 0<\alpha\le 1,\ t>0\right).$$

Настоящая работа посвящена решению задачи Коши для уравнения (1) произвольного положительного порядка α с начальными условиями

$$\frac{\partial^{k}u}{\partial t^{k}}(x,0+)=f_{k}(x)\qquad\left(k=0,\ldots,n-1;\ n=-[-\alpha],\ x\in\mathbb{R}\right).\tag{5}$$

Для решения рассматриваемой задачи применяется метод интегральных преобразований. Используем преобразование Лапласа функции $u(x,t)$ по переменной t

$$\left(L_{t}u\right)(x,s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}u(x,t)\,dt\quad\left(x\in\mathbb{R},\ s\in\mathbb{C}\right)\tag{6}$$

и преобразование Фурье по переменной x

$$\left(F_x u\right)(\sigma,t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}u(x,t)dx \ \ (\sigma\in\mathbb{R},\ t>0), \tag{7}$$

а также их обратные преобразования относительно $s\in\mathbb{C}$ и $\sigma\in\mathbb{R}$

$$\left(L_s^{-1}u\right)(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}u(x,s)ds \ \ (x\in\mathbb{R},\ t>0), \tag{8}$$

$$\left(F_\sigma^{-1}u\right)(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}u(\sigma,t)d\sigma \ \ (x\in\mathbb{R},\ t>0), \tag{9}$$

где $\gamma\in\mathbb{R}$ – фиксированное действительное число. Свойства прямых и обратных преобразований Лапласа и Фурье и описание классов основных и обобщенных функций $u(x,t)$, для которых эти преобразования определены, можно найти в [8, гл. 1, 2], [9, § 3, 4], [10, гл. 1, § 1]. В частности, операторы (6), (8) и (7), (9) взаимно обратны на «достаточно хороших» функциях $u(x,t)$.

Пусть функции $f_k(x)$ ($k=0, \dots, n-1$) из начального условия (5) таковы, что существуют их преобразования Фурье $\left(F_x f_k\right)(\sigma)$. Применяя к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа (6), учитывая начальные условия (5) и формулу преобразования Лапласа частной дробной производной Капуто [11, (2. 253)]

$$\left(L_t\,{}^cD^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,s)=s^{\alpha}\left(L_t u\right)(x,s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0+),$$

получим соотношение

$$s^{\alpha}\left(L_t u\right)(x,s)=\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f_k(x)+\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(L_t u\right)(x,s)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(L_t u\right)(x,s).$$

К обеим частям этого равенства применим преобразование Фурье (7). Учитывая формулы преобразования Фурье производных

$$\left(F_x\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)(\sigma,s)=-\sigma^2\left(F_x\omega\right)(\sigma,s),$$

$$\left(F_x\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)(\sigma,s)=-i\sigma\left(F_x\omega\right)(\sigma,s),$$

приходим к уравнению

$$\left(F_x L_t u\right)(\sigma,s)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha}+\lambda^2\sigma^2+\mu i\sigma}\left(F_x f_k\right)(\sigma) \quad \left(\sigma\in\mathbb{R},\ s\in\mathbb{C}\right). \tag{10}$$

Применяя к этому соотношению обратные преобразования Лапласа (8) и Фурье (9), получим решение $u(x,t)$ исходной задачи (1), (5) в виде

$$u(x,t)=\left(L_s^{-1}F_\sigma^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha}+\lambda^2\sigma^2+\mu i\sigma}\left(F_x f_k\right)(\sigma)\right]\right)(x,t). \tag{11}$$

Выразим решение (11) в квадратурах. Для этого применим к соотношению (10) обратное преобразование Фурье и используем теорему о свертке Фурье. По формулам преобразования Фурье равенство (10) примет вид

$$\left(L_t u\right)(x,p)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^{\alpha-k-1}}{\sqrt{4\lambda^2 s^{\alpha}+\mu^2}}e^{-\frac{1}{2\lambda^2}\left(\mu x+|x|\sqrt{4\lambda^2 s^{\alpha}+\mu^2}\right)} *_x f_k(x),$$

где $*_x$ – свертка Фурье по переменной x.

Таким образом, по формуле обратного преобразования Лапласа

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{s^{\alpha-k-1}}{\sqrt{4\lambda^2 s^{\alpha}+\mu^2}}e^{st-\frac{1}{2\lambda^2}\left(\mu x+|x|\sqrt{4\lambda^2 s^{\alpha}+\mu^2}\right)}ds *_x f_k(x), \tag{12}$$

где $\gamma\in\mathbb{R}$ – фиксированное действительное число.

Тем самым доказана

Теорема 1. *Пусть существуют преобразования Фурье* $(F_x f_k)(\sigma)$ *функций* $f_k(x)$ ($k = 0, \ldots, n-1$) *и интегралы в правой части* (12) *сходятся. Тогда задача Коши* (1), (5) *разрешима и ее решение дается формулой* (12).

Решение (11) можно выразить в терминах специальной функции Миттаг – Лёффлера [12, 18.1(18)]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \qquad (z \in \mathbb{C},\ \alpha,\beta > 0),$$

являющейся целой функцией переменной z. Для этого применим обратное преобразование Лапласа к обеим частям формулы (10). Получим

$$(F_x u)(\sigma,t) = \sum_{k=0}^{n-1} L_s^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + \lambda^2\sigma^2 + \mu i\sigma}\right)(t)(F_x f_k)(\sigma) \qquad (\sigma \in \mathbb{R},\ t > 0). \tag{13}$$

Лемма. *Имеет место следующая формула обратного преобразования Лапласа:*

$$L_s^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + \lambda^2\sigma^2 + \mu i\sigma}\right)(t) = t^k E_{\alpha,k+1}\left(\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)\, t^\alpha\right). \tag{14}$$

Доказательство. Известна формула преобразования Лапласа [2, (1.93)] функции Миттаг – Лёффлера:

$$\left(L_z\left[z^{b-1}E_{a,b}\left(z^a\right)\right]\right)(s) = \frac{s^{a-b}}{s^a - 1} \qquad (\mathrm{Re}(z) > 1). \tag{15}$$

Применяя формулу (15) с параметрами $a = \alpha$, $b = k+1$, получаем соотношение

$$\left(L_z\left[z^k E_{\alpha,k+1}\left(z^\alpha\right)\right]\right)(s) = \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - 1}. \tag{16}$$

По свойству умножения аргумента на число

$$L_z\left(f(qz)\right)(s) = \frac{1}{q}(Lf)\left(\frac{s}{q}\right). \tag{17}$$

Используя соотношение (17) с параметром $q = \left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)^{1/\alpha}$ и учитывая формулу (16), получим формулу преобразования Лапласа

$$L_t\left(t^k E_{\alpha,k+1}\left(\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)\, t^\alpha\right)\right)(s) =$$

$$= \left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)^{(k-\alpha)/\alpha} L_t\left(\left(\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)^{1/\alpha} t\right)^k E_{\alpha,k+1}\left(\left(\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)^{1/\alpha} t\right)^\alpha\right)\right)(s) =$$

$$= \left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)^{(k-\alpha)/\alpha} \cdot \frac{1}{\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)^{1/\alpha}} \cdot \frac{\left(\dfrac{s}{\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)^{1/\alpha}}\right)^{\alpha-k-1}}{\left(\dfrac{s}{\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)^{1/\alpha}}\right)^{\alpha} - 1} =$$

$$= \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + \lambda^2\sigma^2 + \mu i\sigma},$$

что доказывает лемму.

Используя утверждение леммы, перепишем уравнение (13) в виде

$$(F_x u)(\sigma,t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\alpha,k+1}\left(\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)\, t^\alpha\right)(F_x f_k)(\sigma),$$

откуда можно записать представление решения задачи (1), (5) в виде обратного преобразования Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{2\pi} \int_R E_{\alpha,k+1}\left(\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right)t^\alpha\right)(F_x f_k)(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma. \tag{18}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Пусть существуют преобразования Фурье* $(F_x f_k)(\sigma)$ *функций* $f_k(x)$ ($k = 0, \ldots, n-1$). *Задача типа Коши* (2), (5) *имеет решение* $u(x,t)$, *представленное формулой* (18) *при условии, что интегралы в* (18) *сходятся.*

Как уже отмечалось, при $\alpha = 1$ уравнение (1) представляет собой уравнение конвекции. В этом случае $n = 1$, $k = 0$ и решение (18) задачи Коши (3), (5) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_R E_{1,1}\left(\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right) t\right)(F_x f_0)(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_R \exp\left(\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma\right) t\right)(F_x f_0)(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma = \tag{19}$$

$$= F_\sigma^{-1}\left(F_x\left(\frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x+\mu t)^2}{4\lambda^2 t}\right]\right)(\sigma)\cdot(F_x f_0)(\sigma)\right)(x).$$

В соответствии с теоремой о свертке Фурье из формулы (19) получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x+\mu t)^2}{4\lambda^2 t}\right] *_x f_0(x), \tag{20}$$

что совпадает с известным решением уравнения конвекции (3) [3, (1.1.4)].

Если же $\mu = 0$, то решение (18) принимает вид

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{2\pi}\int_R E_{\alpha,k+1}\left(-\lambda^2\sigma^2 t^\alpha\right)(F_x f_k)(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma$$

и совпадает с решением дробного диффузионно-волнового уравнения (4), полученным в работе [4, (20)].

1. Kilbas A. A., Trujillo J. J. // Appl. Anal. 2002. Vol. 81. № 2. P. 435.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.
3. Polianin A. D. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists. Boca Raton, 2002.
4. Ворошилов А. А., Килбас А. А. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 599.
5. Ворошилов А. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 2. С. 27.
6. Ворошилов А. А., Килбас А. А. // Докл. Академии наук. 2007. Т. 414. № 4. С. 451.
7. Momani S. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2007. Vol. 12. Iss. 7. P. 1283.
8. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1974.
9. Снеддон И. Преобразование Фурье. М., 1955.
10. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.
11. Podlubny I. Fractional differential equations. Mathematics in Sciences and Engineering. San Diego, 1999.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., 1967.

Поступила в редакцию 10.02.11.

Александр Александрович Ворошилов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций.