

Н.Н. Гринчик, В.Т. Ерофеев, И.С. Козловская, Ю.В. Пулко

МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Решена задача о распространении высокочастотного электромагнитного поля в полупространстве, заполненном средой с запаздыванием электрической и магнитной поляризаций и токов проводимости при взаимодействии на полупространство произвольной комбинации TE - и TH - поляризованных плоских полей, а также поверхностных токов и зарядов, распределенных по поверхности полупространства. Рассмотрена модель нагрева среды полупространства в результате преобразования электромагнитной энергии в тепловую и наоборот. Проведено численное исследование нагрева в зависимости от времен запаздывания.

При создании элементов техники широко используется индуцированный нагрев деталей, что позволяет изменять свойства материала и поверхностного слоя детали до необходимого качества [1]. Для простых материалов теория взаимодействия электромагнитных и тепловых полей хорошо разработана. В последнее время большое внимание уделяется разработке математических моделей взаимодействия в композитных и других сложных материалах [2]. В частности, в работе [3] строится модель электромагнитного поля в материалах с запаздыванием поляризации относительно внешнего электромагнитного поля и магнитными релаксационными процессами.

В данной работе разрабатывается модель диссипации электромагнитной энергии плоской монохроматической волны в материалах с одновременным запаздыванием электрической и магнитной поляризаций, а также токов проводимости с учетом уравнений [4, с. 20], поверхностных зарядов и токов. При этом предполагается, что электрофизические свойства среды не изменяются при повышении температуры. Предполагается также, что при $t < 0$ среда не нагревается, а процесс включения электромагнитного поля не учитывается.

Сформулируем математическую модель в виде краевой задачи, описывающей взаимодействие плоской электромагнитной волны с полупространством среды с запаздыванием.

Постановка задачи. Рассмотрим плоскую границу раздела Γ $z = 0$ двух однородных сред, заполняющих полупространства D_1 $z < 0$ и D_2 $z > 0$. Среда D_1 определяется диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_1 и μ_1 , а среда D_2 является средой с запаздыванием. В области D_1 распространяется первичное плоское монохроматическое электромагнитное поле с комплексными амплитудами $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$, колеблющееся с круговой частотой ω . Обозначим через $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1$ комплексные амплитуды отраженного поля в области D_1 , а через $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ – поле в области D_2 , $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_1$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'_1$ – суммарное поле в D_1 .

Как известно поле в области D_1 подчиняется уравнениям Максвелла для комплексных амплитуд

$$\text{rot } \mathbf{H}_1 = -i\omega\varepsilon_1\mathbf{E}_1, \quad \text{rot } \mathbf{E}_1 = i\omega\mu_1\mathbf{H}_1. \quad (1)$$

Для реального поля \mathbf{E}, \mathbf{H} в области D_2 выполняются уравнения Максвелла для среды с запаздыванием

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2)$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mathbf{m}$, $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E} - \mathbf{t}_0$, $\mathbf{P} = \varepsilon_0\kappa\mathbf{E} - \mathbf{t}_1$, $\mathbf{m} = \mu_0\chi\mathbf{H} - \mathbf{t}_2$, \mathbf{P} – электрическая поляризация, \mathbf{m} – магнитная поляризация, \mathbf{J} – плотность токов проводимости, t_0, t_1, t_2 – времена запаздывания среды в области D_2 ; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, κ – диэлектрическая восприимчивость, χ – магнитная восприимчивость, γ – удельная электрическая проводимость среды.

Запишем уравнения (2), преобразовав их к уравнениям для комплексных амплитуд монохроматического поля $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ в виде [4]:

$$\text{rot } \mathbf{H}_2 = -i\omega\varepsilon_2\mathbf{E}_2, \quad \text{rot } \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_2\mathbf{H}_2, \quad (3)$$

где $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \left(1 + \kappa \exp i\omega t_1 + i\frac{\gamma}{\omega} \exp i\omega t_0 \right)$, $\mu_2 = \mu_0 \left(1 + \chi \exp i\omega t_2 \right)$,

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re } \mathbf{E}_2(t) \exp -i\omega t, \quad \mathbf{H}(t) = \text{Re } \mathbf{H}_2(t) \exp -i\omega t. \quad (4)$$

Предположим, что на поверхности Γ индуцируются поверхностные заряды с поверхностной комплексной плотностью σ и поверхностные токи с поверхностной комплексной плотностью токов \mathbf{j} . В связи с этим на плоскости Γ выполняются граничные условия:

$$\left[\mathbf{n}, \left[\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1, \mathbf{n} \right] \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad \left[\mathbf{n}, \left[\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1, \mathbf{n} \right] \right] \Big|_{z=0} = \mathbf{j}, \mathbf{n} \quad (5)$$

$$\mu_2 \mathbf{H}_2, \mathbf{n} \Big|_{z=0} = \mu_1 \mathbf{H}_1, \mathbf{n} \Big|_{z=0}, \quad \varepsilon_2 \mathbf{E}_2, \mathbf{n} \Big|_{z=0} = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{n} \Big|_{z=0} + \sigma, \quad (6)$$

$$i\omega\sigma = \operatorname{div} \mathbf{j}, \quad (7)$$

где вектор \mathbf{j} касателен к плоскости Γ , $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ – нормаль к поверхности Γ .

Электромагнитные поля, определяющие решение задачи (1), (3), (5) – (7), должны удовлетворять условиям на бесконечности. Условия на бесконечности сводятся к тому, что поля \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 должна затухать в положительном направлении оси Oz , а энергия отраженного поля \mathbf{E}_1' , \mathbf{H}_1' распространяться в отрицательном направлении.

Аналитическое представление решения задачи. В качестве первичного плоского поля выберем линейную комбинацию E -поляризованных и H -поляризованных полей, падающих под углом к плоскости раздела сред Γ , и выразим их через базисные плоские поля [5] в среде D_1 в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= A \mathbf{W}^{-1} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_1 + B \mathbf{W}^{-2} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_1, \\ \mathbf{H}_0 &= \frac{k_1}{i\omega\mu_1} \left[A \mathbf{W}^{-2} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_1 + B \mathbf{W}^{-1} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_1 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где по определению

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{\mp 1} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k &= \frac{i}{\lambda} \mathbf{e}_1 \exp i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp v z, \\ \mathbf{W}^{\mp 2} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k &= \frac{1}{k} \left(\mp \frac{iv}{\lambda} \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{e}_z \right) \exp i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp v z, \end{aligned} \quad (9)$$

$\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{e}_1 = \alpha_2 \mathbf{e}_x - \alpha_1 \mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_2 = \alpha_1 \mathbf{e}_x + \alpha_2 \mathbf{e}_y$, $\lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, $v = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, $0 \leq \arg \lambda$, $k < \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg v < \frac{\pi}{2}$; A , B – заданные комплексные постоянные амплитуды, а комплексные величины α_1 , α_2 определяют наклон первичного поля по отношению к плоскости Γ .

Отраженное и прошедшее через плоскость Γ поле имеют такую же структуру [6], как и первичное поле, поэтому представим их также через базисные плоские поля (9) в виде линейных комбинаций, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла (1) и (3). Имеем представления

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_1 &= x_1 \mathbf{W}^{-1} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_1 + y_1 \mathbf{W}^{+2} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_1, \\ \mathbf{H}'_1 &= \frac{k_1}{i\omega\mu_1} \left[x_1 \mathbf{W}^{+2} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_1 + y_1 \mathbf{W}^{-1} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_1 \right], z < 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= x_2 \mathbf{W}^{-1} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_2 + y_2 \mathbf{W}^{-2} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_2, \\ \mathbf{H}_2 &= \frac{k_2}{i\omega\mu_2} \left[x_2 \mathbf{W}^{-2} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_2 + y_2 \mathbf{W}^{-1} \mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_2 \right], z > 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где постоянные $x_j, y_j, j = 1, 2$ подлежат определению.

Заметим, что структура полей (10), (11) выбрана таким образом, что условия на бесконечности выполнены автоматически.

Наведенные первичным полем заряды и токи на плоскости Γ имеют экспоненциальную зависимость по координатам x и y , так как поля (10), (11) определяющие решение задачи, экспоненциально зависят от пространственных координат. Поэтому

$$\sigma = \sigma_0 \Phi, \quad \Phi = \exp i\alpha_1 x + i\alpha_2 y. \quad (12)$$

Вектор плотности токов разделим на потенциальную и соленоидальную части, представив в виде $\mathbf{j} = \text{grad}\psi + \text{rot}\Psi$, где $\psi = j_p \Phi$, $\Psi = j_s \Phi \mathbf{e}_z$; $j_p, j_s = \text{const}$.

В результате

$$\mathbf{j} = i j_s \mathbf{e}_1 + j_p \mathbf{e}_2 \Phi, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_z = i j_p \mathbf{e}_1 - j_s \mathbf{e}_2 \Phi. \quad (13)$$

Подставим (12), (13) в условие (7) и найдем зависимость $j_p = \frac{\omega}{i\lambda^2} \sigma_0$.

Вычисление амплитуд полей. Удовлетворим граничным условиям (5), предварительно вычислив тангенциальные составляющие полей (8) – (11) на плоскости $z = 0$. Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{1\tau} &= \frac{i}{\lambda} \left(x_1 \mathbf{e}_1 + \frac{v_1}{k_1} y_1 \mathbf{e}_2 \right) \Phi, \quad \mathbf{H}'_{1\tau} = \frac{k_1}{\omega \mu_1 \lambda} \left(y_1 \mathbf{e}_1 + \frac{v_1}{k_1} x_1 \mathbf{e}_2 \right) \Phi; \\ \mathbf{E}_{2\tau} &= \frac{i}{\lambda} \left(x_2 \mathbf{e}_1 - \frac{v_2}{k_2} y_2 \mathbf{e}_2 \right) \Phi, \quad \mathbf{H}_{2\tau} = \frac{k_2}{\omega \mu_2 \lambda} \left(y_2 \mathbf{e}_1 - \frac{v_2}{k_2} x_2 \mathbf{e}_2 \right) \Phi; \\ \mathbf{E}_{0\tau} &= \frac{i}{\lambda} \left(A \mathbf{e}_1 - \frac{v_1}{k_1} B \mathbf{e}_2 \right) \Phi, \quad \mathbf{H}_{0\tau} = \frac{k_1}{\omega \mu_1 \lambda} \left(B \mathbf{e}_1 - \frac{v_1}{k_1} A \mathbf{e}_2 \right) \Phi. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставим выражения (14), (13) в граничные условия (5) и приравняем коэффициенты при линейно независимых векторах \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 . Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов x_j , y_j :

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 = A, \quad \frac{\mu_1 v_2}{\mu_2 v_1} x_2 + x_1 = A + \frac{i\omega\mu_1\lambda}{v_1} j_s; \\ \frac{k_1 v_2}{k_2 v_1} y_2 + y_1 = B, \quad \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} y_2 - y_1 = B + \frac{i\omega\mu_1\lambda}{k_1} j_p. \end{aligned}$$

Разрешая системы, получим значения коэффициентов для сумм (10), (11):

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{2A + g_1 j_s}{\mu_2 v_1 + \mu_1 v_2}, \quad x_1 = \frac{\mu_2 v_1 - \mu_1 v_2}{\mu_2 v_1 + \mu_1 v_2} A + \frac{\mu_2 v_1 g_1 j_s}{\mu_2 v_1 + \mu_1 v_2}, \\ y_2 = \frac{2B + f_1 \sigma_0}{\mu_1 v_1 k_2^2 + \mu_2 v_2 k_1^2}, \quad y_1 = \frac{\mu_1 v_1 k_2^2 - \mu_2 v_2 k_1^2}{\mu_1 v_1 k_2^2 + \mu_2 v_2 k_1^2} B - \frac{f_1 k_1^2 v_2 \mu_2 \sigma_0}{\mu_1 v_1 k_2^2 + \mu_2 v_2 k_1^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $f_1 = \frac{k_1}{\lambda \varepsilon_1}$, $g_1 = \frac{i\omega\mu_1\lambda}{v_1}$, $v_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg v_j < \frac{\pi}{2}$, $\lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$,
 $k_j = \omega \sqrt{\varepsilon_j \mu_j}$, $0 \leq \arg k_j, \lambda < \pi$, $j = 1, 2$.

Заметим, что граничные условия (6) выполняются автоматически, так как являются следствием соотношений (5), (7).

Формулы (15), задающие решение (10), (11), показывают, что взаимодействие плоского поля с плоской границей раздела сред определяется амплитудами первичного поля A и B , поверхностными зарядами σ_0 и амплитудой поверхностных вихревых токов $I_s = i\lambda j_s$, λ – действительное. Комплексные величины A , B , σ_0 , j_s считаются заданными.

Для вычисления реальных полей в области D_2 используются формулы (4).

Индукционный нагрев полупространства. Выделим действительную и мнимую части диэлектрической и магнитной проницаемостей $\varepsilon_2 = \varepsilon' + i\varepsilon''$, $\mu_2 = \mu' + i\mu''$, тогда плотность мощности поглощаемой электромагнитной энергии и превращаемой в тепло и наоборот в полупространстве D_2 определяется через поля (4) формулой

$$\begin{aligned} \Pi = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \mathbf{E} \mathbf{J} = \frac{1}{2} \varepsilon' - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mu' - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial t} + \\ + \omega \varepsilon'' \mathbf{E}^2 + \mu'' \mathbf{H}^2, \quad z > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Процесс тепловыделения описывается уравнением теплопроводности

$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t} - K_T \Delta u = \Pi, \quad (17)$$

где C – удельная теплоемкость вещества среды, ρ – плотность вещества среды, $u = u(M, t)$ – температура среды в точке $M \in D_2$, K_T – коэффициент теплопроводности вещества среды, Π – плотность тепловых источников.

Для высоких частот тепловой процесс не успевает за изменением электромагнитного поля, поэтому упростим модель, усреднив функцию (16) по периоду поля $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Получим [4, 8]

$$F = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi \, dt = \frac{\omega}{2} \varepsilon'' |\mathbf{E}_2|^2 + \mu'' |\mathbf{H}_2|^2.$$

Учитывая (11), для действительных величин поля α_1 и α_2 определим

$$F = F(z) = f \exp(-gz), \quad g = 2\operatorname{Re} v_2, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} f = \frac{\omega}{2} \left\{ \frac{1}{\lambda^2} \left[\varepsilon'' \left(\left| \alpha_2 x_2 - \alpha_1 y_2 \frac{v_2}{k_2} \right|^2 + \left| \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 \frac{v_2}{k_2} \right|^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu''}{\omega^2 |\mu_2|^2} \left(|k_2 \alpha_2 y_2 - \alpha_1 v_2 x_2|^2 + |\alpha_1 k_2 y_2 + \alpha_2 v_2 x_2|^2 \right) + \lambda^2 \left(\varepsilon'' \frac{|y_2|^2}{|k_2|^2} + \frac{\mu'' |x_2|^2}{\omega^2 |\mu_2|^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Рассматривая уравнение теплопроводности (17) для усредненных источников тепла (18), сформулируем следующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{F z}{\rho C}, \quad 0 < z < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad (19)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad z \geq 0; \quad K_T \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = p, \quad t \geq 0,$$

где $a = \sqrt{\frac{K_T}{\rho C}}$, p – заданный поток тепла через поверхность $z = 0$
 $p = const$.

Решение задачи (19) представим аналитически:

$$u(z, t) = -G \exp(-gz) + \frac{G}{2} Q(z, t) + Q(-z, t) + \frac{P}{K_T} \left(z \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2a\sqrt{t}} \right) - 2a\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp \left(-\frac{z^2}{2a^2 t} \right) \right), \quad (20)$$

где $Q(z, t) = \exp(gz + a^2 g^2 t) \operatorname{erfc} \left(ag\sqrt{t} + \frac{z}{2a\sqrt{t}} \right)$, $G = \frac{f}{\rho a^2 g^2 C}$, $P = p - K_T G g$,
 $\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z$, $\operatorname{erf} z$ – интеграл вероятностей [7, с. 120].

Вычисление усредненной температуры u . Зададим параметры среды D_1 , положив $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\gamma_1 = 0$, $k_1 = k_0 = \frac{\omega}{c}$. Для первичного поля (8)
 $A = 5 \cdot 10^3 \text{ В/м}$, $B = 0 \text{ В/м}$, $\omega = 2\pi \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_1 = k_0 \cos \varphi_0 \sin \theta_0$,
 $\alpha_2 = k_0 \sin \varphi_0 \sin \theta_0$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_0 = \frac{\pi}{5}$; $\mathbf{l} = \cos \varphi_0 \sin \theta_0, \sin \varphi_0 \sin \theta_0, \cos \theta_0$ – направление распространения первичного поля. Как видно вектор \mathbf{E}_0 параллелен плоскости Γ . Для среды в полупространстве D_2 рассмотрим различные варианты времени запаздывания для токов проводимости, а также для электрической и магнитной поляризаций. Графически исследуем нагрев полупространства D_2 под воздействием первичного поля, учитывая формулу (20) (см. рис. 1 – рис. 2).

Правая часть уравнения теплопроводности (19) моделирует плотность усредненных источников тепла, создаваемых монохроматическим электромагнитным полем. Знак правой части определяется знаком коэффициента f в формуле (18). В случае $f > 0$ уравнение (19) описывает нагрев среды в по-

лупространстве D_2 , в случае же $f < 0$ – охлаждение среды. Как видно, знак вещественного коэффициента f определяется знаком мнимых частей

$$\varepsilon'' = \varepsilon_0 \kappa \sin 2\pi\xi_1 + \frac{\gamma}{\omega} \cos 2\pi\xi_0, \quad \mu'' = \mu_0 \chi \sin 2\pi\xi_2 \quad (21)$$

комплексных характеристик среды ε_2, μ_2 . При этом рассматриваются времена запаздывания, соизмеримые с периодом поля T : $t_m = \xi_m T$ $0 \leq \xi_m < 1$. Для пассивных сред при $\varepsilon'' > 0, \mu'' > 0$ [8, с. 34 (9.11)] следует $f > 0$, т.е. уравнение (19) моделирует преобразование электромагнитной энергии в тепловую. Анализ формул (21) показывает, что всегда $\varepsilon'' > 0, \mu'' > 0$ при $0 < t_m < \frac{1}{4}T$.

В случае активных сред при $\varepsilon'' < 0, \mu'' < 0$ [8, с. 34] получаем $f < 0$ и тепловая энергия преобразуется в электромагнитную. При $\varepsilon'' > 0, \mu'' < 0$ ($\varepsilon'' < 0, \mu'' > 0$) нагрев и остывание зависят от параметров системы.

На рисунках представлены графики температуры u пассивных сред в зависимости от $z = mh$ в момент времени t , где $h = \frac{1}{\text{Re}v_2}$ – глубина скин-слоя в D_2 .

На рис. 1а) приведены графики для различных значений времени запаздывания магнитной поляризации t_2 в пределах $0 \leq \xi_2 \leq \frac{1}{2}T$, $\xi_0 = 0, \xi_1 = 0$; на рис. 1б) представлены графики для времен запаздывания токов проводимости при $0 \leq \xi_0 < \frac{1}{4}T$, $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$. При увеличении времени t_0 нагрев ослабевает.

На рис. 2а) рассмотрены графики для различных вариантов времен запаздывания при наличии на поверхности зарядов, колеблющихся вдоль поверхности Γ в такт первичному полю: $\sigma_r = \text{Re } \sigma_0 \Phi \exp -i\omega t$. Наличие зарядов существенно усиливает нагрев среды. На рис. 2б) представлены графики нагрева среды при оттоке тепла через поверхность Γ .

Список обозначений

A – комплексная амплитуда напряженности электрической компоненты первичного TE -поля, В/м; B – комплексная амплитуда напряженности электрической компоненты первичного TH -поля, В/м; \mathbf{B} – магнитная индукция, $\frac{\text{кг}}{\text{с}^2\text{А}}$; C – удельная теплоемкость среды в D_2 , $\frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кг}}$; \mathbf{D} – электрическая индукция, $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; \mathbf{E} – напряженность электрического поля, В/м; \mathbf{E}_j – комплексные амплитуды электрического поля, В/м; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – декартовы орты; $F, G, Q, f_j, g_j, g, \lambda$ – вспомогательные функции и постоянные; \mathbf{H} – напряженность магнитного поля, А/м; \mathbf{H}_j – комплексные амплитуды магнитного поля, А/м; h – глубина скин-слоя, м; \mathbf{j} – поверхностная плотность токов, А/м; j_s, j_p – комплексные параметры токов \mathbf{j} , А; \mathbf{J} – плотность токов проводимости, $\frac{\text{А}}{\text{м}^2}$; K_T – коэффициент теплопроводности, $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}$; k_j – волновое число поля, 1/м; \mathbf{m} – магнитная поляризация, $\frac{\text{кг}}{\text{с}^2\text{А}}$; p – поток тепла, $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$; \mathbf{P} – электрическая поляризация, $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; T – период поля, с; t – время, с; t_0, t_1, t_2 – времена запаздывания, с; u – температура, °С; x, y, z – декартовы координаты, м; α_j – комплексные параметры распространения первичного поля, 1/м; γ – удельная электрическая проводимость, $\frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; ε_j – диэлектрическая проницаемость, Ф/м; κ – диэлектрическая восприимчивость среды; μ_j – магнитная проницаемость, Гн/м; ρ – плотность, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; σ – комплексная поверхностная плотность зарядов, $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; σ_0 – комплексная амплитуда для σ , $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; χ – магнитная восприимчивость среды; ω – круговая частота поля, 1/с.

Индексы: j – номер среды: $j=1$ – среда в полупространстве $z < 0$; $j=2$ – среда в полупространстве $z > 0$; p – потенциальный; s – соленоидальный.

Литература

1. Слухоцкий А. Е., Рыскин С. Е. Индукторы для индукционного нагрева. Л.: Энергия, 1974.
2. Гринчик Н. Н., Достанко А. П. Влияние тепловых и диффузионных процессов на распределение электромагнитных волн в слоистых материалах. Мн.: ИТМО НАН Б, 2005.
3. Гринчик Н. Н., Ноготов Е. Ф. К проблеме взаимодействия электромагнитных волн в поляризованной среде с учетом релаксационных процессов//Докл. НАН Б. 2004. Т. 48, № 2. С. 41 – 45.
4. Ерофеев В. Т., Козловская И. С. Математические модели в электродинамике. Мн.: БГУ, 2004.
5. Ерофеев В. Т. Кравченко В. Ф., Крючков А. Н. Теоремы сложения для базисных электромагнитных полей //Радиотехника. 1995. №6. С. 49-57.
6. Шевченко В. В. О прохождении плоских волн через границу двух поглощающих сред//Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 9. С. 1048-1053.
7. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
8. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.

Список подрисуночных подписей

Рис. 1. Распределение температуры по глубине полупространства. Параметры: $\omega = 2\pi \cdot 10^5 \frac{1}{\text{с}}$, $\kappa = 50$, $\chi = 10^2$, $\gamma = 10 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$, $C = 5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кг}}$,
 $\rho = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $K_T = 50 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}$, $\sigma_0 = 0 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$, $j_s = 0 \text{ А}$, $p = 0 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$, $u_0 = 273 \text{ К}$;
а) $t = 10^3 \text{ с}$, $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 0$; $\xi_2 = 0$, $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (1); $\xi_2 = \frac{1}{5}$, $h = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (2);
 $\xi_2 = \frac{1}{4}$, $h = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (3); $\xi_2 = \frac{1}{10}$, $h = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (4); $\xi_2 = \frac{1}{2}$, $h = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (5);
б) $t = 3 \cdot 10^3 \text{ с}$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$; $\xi_0 = \frac{1}{10}$, $h = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (1); $\xi_0 = \frac{1}{5}$,
 $h = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (2); $\xi_0 = \frac{1}{6}$, $h = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (3); $\xi_0 = \frac{2}{11}$, $h = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (4);
 $\xi_0 = \frac{4}{17}$, $h = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (5).

Рис. 2. Распределение температуры по глубине полупространства. Параметры: $\omega = 2\pi \cdot 10^5 \frac{1}{\text{с}}$, $\kappa = 50$, $\chi = 10^2$, $\gamma = 10 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$, $C = 5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кг}}$,
 $\rho = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $K_T = 50 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}$, $j_s = 0 \text{ А}$, $u_0 = 273 \text{ К}$, $t = 10^3 \text{ с}$; $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 0$,
 $\xi_2 = 0$, $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (1); $\xi_0 = \frac{1}{4}$, $\xi_1 = \frac{1}{4}$, $\xi_2 = \frac{1}{4}$, $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (2); $\xi_0 = \frac{1}{5}$, $\xi_1 = \frac{1}{5}$,
 $\xi_2 = \frac{1}{5}$, $h = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (3); $\xi_0 = \frac{1}{10}$, $\xi_1 = \frac{3}{5}$, $\xi_2 = \frac{3}{5}$, $h = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ (4); $\xi_0 = 0$,
 $\xi_1 = \frac{1}{4}$, $\xi_2 = \frac{1}{4}$, $h = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (5); а) $\sigma_0 = 5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$, $p = 0 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$;
б) $\sigma_0 = 0 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$, $p = 20 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$.

Рисунки

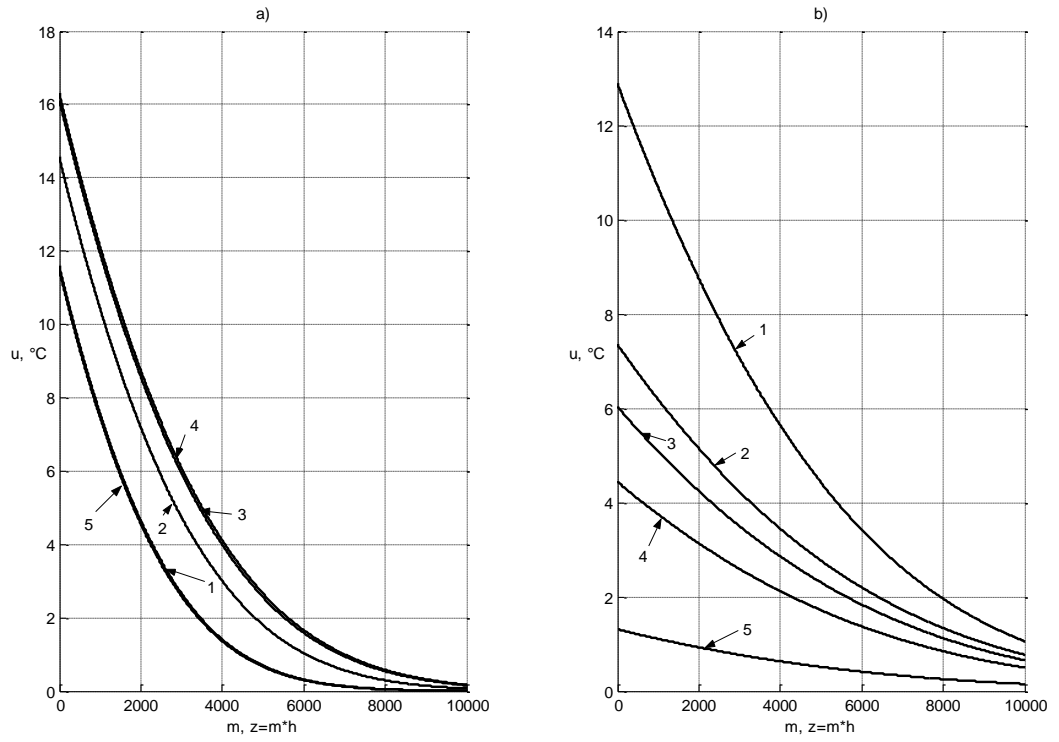


рис. 1

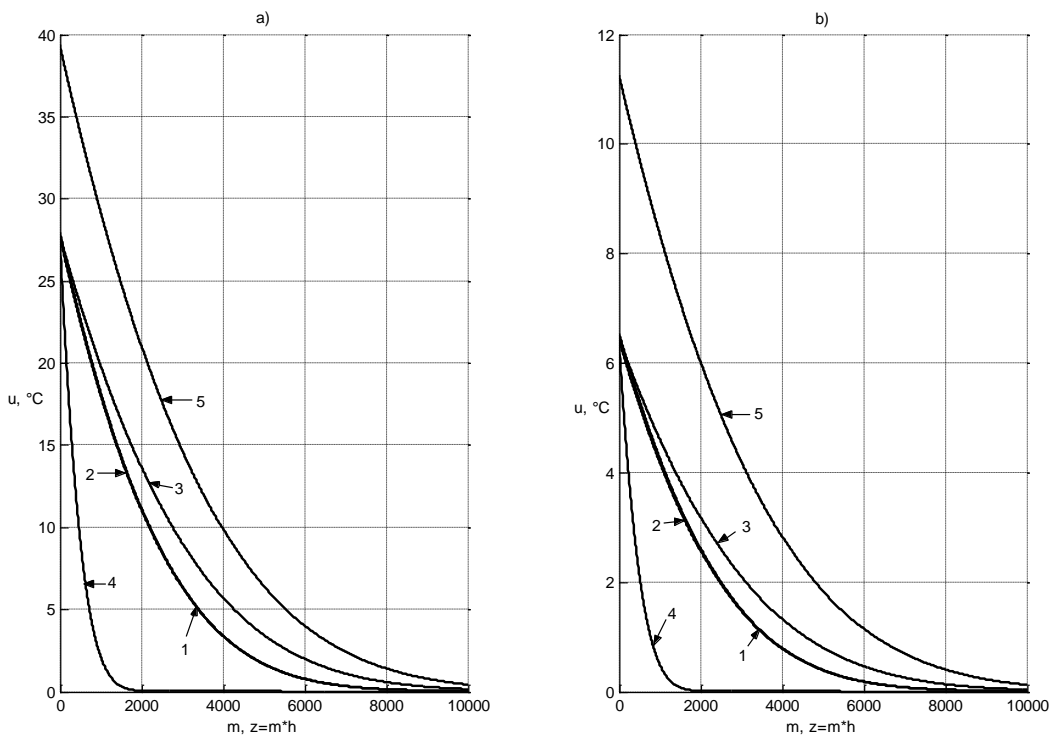


рис. 2