МНОГОУРОВНЕВЫЕ ПРЕДОБУСЛОВЛИВАТЕЛИ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Белявский С.С., Мулярчик С.Г. (Беларусь, Минск)

Рассматривается дрейфово-диффузионная модель переноса заряда в полупроводниковой среде, которая описывается краевой задачей для системы дифференциальных уравнений

$$\Delta\varphi = n - p - C_N,\ \nabla(\mu_n\nabla n - n\nabla\varphi) = R_n,\ \nabla(\mu_p\nabla p + p\nabla\varphi) = R_p \ \ \textit{в}\ \Omega. \quad (1)$$

$$ru + su_n = g \quad \textit{на} \quad \partial\Omega, \qquad (2)$$

где Ω — некоторая область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, а μ_n, μ_p, R_n, R_p являются нелинейными функциями пространственных переменных, градиента электростатического потенциала φ и концентрации носителей заряда (n либо p соответственно).

Построение решения задачи (1), (2) является актуальной проблемой моделирования полупроводниковых приборов, но даже в случае одномерной структуры, когда система (1) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, она не интегрируется в замкнутой форме. Поэтому возникает потребность в приближенном ее решении.

Пространственная дискретизация методом конечных разностей или конечных элементов сводит задачу (1), (2) к системе нелинейных алгебраических уравнений больших размеров. Наиболее эффективным методом решения таких систем является метод Ньютона, который предполагает построение последовательности решений систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение СЛАУ точными методами (например, методом Гаусса) из-за больших размеров достаточно трудоемкое и не обладает достаточной точностью. Необходимая точность решения линейной системы может быть достигнута итерационными методами из класса предобусловленных методов сопряженных градиентов (ПМСГ) с предобусловливателем, построенном на основе неполной факторизации ее матрицы. Такой подход к решению СЛАУ требует больших вычислительных затрат при решении задачи (1), (2) в целом. Один из способов их сокращения состоит в применении многоуровневых предобусловливателей.

Многоуровневый метод, предложенный Федоренко [1], применятся для исключения высокочастотных компонент решения. Для этого строится вложенная последовательность грубых сеток и решение задачи (1), (2) начинается с грубой сетки самого низкого уровня. Полученное решение является начальным приближением при построении решения системы сеточных уравнений на последующем уровне.

С другой стороны многоуровневый метод можно рассматривать как предобусловливающую процедуру, использующую для ускорения сходимости ПМСГ. Нами разработаны способы построения последовательности грубых сеток на основе раскрашивания сеточных узлов и связанных с ней предобусловливателей, редуцирующих систему сеточных уравнений. Если известна последовательность таких предобусловливателей, то решение СЛАУ на основной сетке можно легко получить из решения сеточных уравнений на грубой сетке самого низкого уровня, построенных на соответствующем ее уровню шаблоне.

Литература. 1. Федоренко Р.П. // Успехи математических наук. 1973. Т. 28, № 2(170). С. 121 – 182.