УДК 517.9

Т.И. КАРИМОВА, О.Л. ЯБЛОНСКИЙ

ОБ АССОЦИИРОВАННЫХ РЕШЕНИЯХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Nonhomogeneous equations in differentials in the algebra of generalized stochastic processes are investigated in the paper. The theorem of existence and uniqueness for this system is proved. All associated solutions of such equations are described.

Активное развитие стохастического анализа и теории стохастических дифференциальных уравнений обусловлено потребностями практических приложений, в частности финансовой математики. При этом указанные дисциплины используют свои собственные специфические методы в связи с тем, что большинство случайных процессов, встречающихся в приложениях, не являются дифференцируемыми. Конечно, задачи с недифференцируемыми функциями можно рассматривать при помощи теории распределений Л. Шварца, однако она применима лишь к линейным задачам, что недостаточно с точки зрения практики. Поэтому построение Ж. Коломбо (см., например, [1]) алгебры новых обобщенных функций позволило изучать стохастические дифференциальные уравнения методами классического анализа.

В ряде работ были предложены различные конструкции алгебр обобщенных случайных процессов. В данной статье мы будем использовать алгебру, введенную Н.В. Лазаковичем в [2]. Там же на основе аппарата алгебры обобщенных случайных процессов предложен единый подход к исследованию стохастических дифференциальных уравнений. Суть его состоит в замене исходного стохастического уравнения на уравнение в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. При этом возникает несколько естественных вопросов о существовании и единственности решений уравнений в дифференциалах, а также их связи с решением исходного уравнения. Подобные задачи для различных классов стохастических уравнений исследовались, например, в работах [3–5]. Здесь мы рассматриваем эту задачу для систем нестационарных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. В частности, нами доказана теорема существования и единственности решений таких систем и описана их связь с решениями систем стохастических уравнений.

Напомним некоторые понятия из [2].

Пусть везде далее $T=[0,a]$ – отрезок вещественной прямой $\mathbb{R}$, $a>0$, а $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ – полное вероятностное пространство.

Расширенной прямой $\widetilde{\mathbb{R}}$ называется фактор-множество $\widetilde{\mathbb{R}}=\overline{\mathbb{R}}/M$, где $\overline{\mathbb{R}}=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}:\forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in\mathbb{R}\}$ и $M=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\overline{\mathbb{R}}:\exists n_0\ \forall n>n_0\ x_n=0\}$.

Аналогичным образом определяется $\widetilde{T}$, где $T=[0,a]\subset\mathbb{R}$, $a>0$, $\overline{T}=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}:\forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in T\}$.

Рассмотрим множество $G(T,\Omega)$ последовательностей случайных функций $f_n:T\times\Omega\to\mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) $f_n(t,\cdot)$ является случайной величиной на $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ для всех $t\in T$ и $n\in\mathbb{N}$;

2) $f_n(\cdot,\omega)\in\mathbb{C}^{\infty}(T)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и почти всех $\omega\in\Omega$.

Будем говорить, что последовательности $F=(f_n(t,\omega))$ и $G=(g_n(t,\omega))$ эквивалентны, если существует такой номер n_0, что для любых $t\in T$ и почти всех $\omega\in\Omega$ $f_n(t,\omega)=g_n(t,\omega)$ при $n>n_0$.

Через $G(\widetilde{T},\Omega)$ обозначим множество классов эквивалентности исходного множества $G(T,\Omega)$. Очевидно, что $G(\widetilde{T},\Omega)$ образует алгебру с покоординатным сложением и умножением.

Определение 1. Множество $G(\widetilde{T},\Omega)$ *– алгебра обобщенных случайных процессов, а ее элементы – обобщенные случайные процессы.*

Будем говорить, что обобщенный случайный процесс $\widetilde{F}=[(f_n)]\in G(\widetilde{T},\Omega)$ ассоциирует классический случайный процесс f из некоторого пространства, если $f_n\to f$ при $n\to\infty$ в этом пространстве.

Пусть $B(t)=(B^1(t),\dots,B^m(t))$, $t\in T$, – m-мерный стандартный процесс броуновского движения. Обозначим через $\mathcal{F}=\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in T}$ поток σ-алгебр, порожденный броуновским движением B. Причем считаем, что $\mathcal{F}_0$ содержит все события нулевой вероятности из $\mathcal{F}$.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$dX^i(t)=f^i(t,X(t))dB(t)+g^i(t,X(t))dt,\ i=\overline{1,r},\ t\in T, \tag{1}$$

с начальным условием $X^i(0)=x^i$.

В алгебре обобщенных случайных процессов $G(\tilde{T},\Omega)$ (см., например, [2]) ей будет соответствовать следующая задача Коши:

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}}\tilde{X}^i(\tilde{t})=\sum\limits_{j=1}^{m}\tilde{f}^{ij}(\tilde{t},\tilde{X}(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{B}^j(\tilde{t})+\tilde{g}^i(\tilde{t},\tilde{X}(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{t},\\ \tilde{X}^i(\tilde{t})\big|_{[\tilde{0},\tilde{h})}=\tilde{X}^{0i}(\tilde{t}),\quad i=\overline{1,r}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\tilde{0}=[(0)], \widetilde{h}=[(h_n)]\in\widetilde{T}, \widetilde{f}^{ij}=[(f_n^{ij})]\in G(\widetilde{\mathbb{R}}^{r+1})$ и $\tilde{g}^i=[(g_n^i)]\in G(\widetilde{\mathbb{R}}^{r+1})$ ассоциируют функции f^{ij} и $g^i, i=\overline{1,r}, j=\overline{1,m},$ соответственно, а $\tilde{B}^j=[(B_n^j)]\in G(\widetilde{T},\Omega)$ – обобщенный процесс, ассоциирующий процесс броуновского движения и «начальное условие» $\tilde{X}^{0i}=[(X_n^{0i})]\in G(\widetilde{T},\Omega),$ – ассоциирует $x^i\in\mathbb{R}$.

На уровне представителей задача (2) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n)-X_n^i(t)=\sum\limits_{j=1}^{m}f_n^{ij}(t,X_n(t))[B_n^j(t+h_n)-B_n^j(t)]+g_n^i(t,X_n(t))h_n,\\ X_n^i(t)\big|_{[0,h_n)}=X_n^{0i}(t),\quad i=\overline{1,r},\ t\in[0;a], \end{cases} \tag{3}$$

где $B_n^j = (B^j \cdot \rho_n^j)(t) = \int_0^{1/n} B^j(t+s)\rho_n^j(s)ds$, $\rho_n^j(t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_n^j \ge 0$, $\operatorname{supp} \rho_n^j(t) \subset [0,1/n]$ $\int_0^{1/n} \rho_n^j(s)ds = 1$, $j = \overline{1,m}$,

$$f_n^{ij} = (f^{ij} \cdot \overline{\rho}_n),\ g_n^i = (g^i \cdot \overline{\rho}_n),\ f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1}),\ g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1}), \tag{4}$$

а $\overline{\rho}_n$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в $[0,1/n]^{r+1}$, и $\int_0^{1/n} ... \int_0^{1/n} \overline{\rho}(s, s_1, ..., s_r) ds ds_1 ... ds_r = 1$.

Наряду с задачей (1) рассмотрим следующую систему:

$$X^i(t) = x^i + \sum_{j=1}^m (\theta_j) \int_0^t f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) + \int_0^t g^i(s, X(s)) ds, i = \overline{1,r}, \tag{5}$$

с начальным условием $X(0) = x$, где $X(t) = (X^1(t), X^2(t), ..., X^r(t))$, $x = (x^1, x^2, ..., x^r)$, $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,m}$, стохастические интегралы в правой части (5) – это стохастические θ-интегралы, $\theta \in [0,1]$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Введем следующие обозначения: $t = \tau'_t + k_t h_n = \tau_t + m_t \delta$, где $0 \le \tau'_t < h_n$, $\tau_t = \tau'_t + k'_t h_n$, $0 \le \tau_t < \delta$, $1/n < \delta = l h_n < 1$, $\delta_1 = \lambda h_n$, $1/n \le \delta_1 \le 1/n + h_n$, $l, m_t, k_t, k'_t, \lambda \in N$.

Используя эти равенства, решение системы (3) можно записать в виде

$$X_n^i(t) = X_n^{0i}(\tau'_t) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{k_t - 1} f_n^{ij}(\tau'_t + k h_n, X_n(\tau'_t + k h_n))[B_n^j(\tau'_t + (k+1)h_n) - B_n^j(\tau'_t + k h_n)] +$$
$$+ \sum_{k=0}^{k_t - 1} g_n^i(\tau'_t + k h_n, X_n(\tau'_t + k h_n)) h_n. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение числовые последовательности

$$K^i(n, h_n) = \iint\limits_{\substack{0 \le s,\tau \le \frac{1}{n}, \\ |s-\tau| \le h_n}} \left(1 - \frac{|s-\tau|}{h_n}\right) \rho_n^i(s) \rho_n^i(\tau) ds d\tau.$$

С их помощью будут сформулированы необходимые и достаточные условия сходимости последовательностей X_n^i.

Обозначим через $\mathbb{C}_B^k(\mathbb{R}^{r+1})$ множество k раз непрерывно дифференцируемых ограниченных функций на $\mathbb{R}^{r+1}$, все частные производные которых до порядка k включительно ограничены.

Теорема 1. *Пусть* $\theta_j \in [0, 1/2]$, $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ *и* $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, *«начальное условие» задачи Коши* (3) $X_n^{0i}(t)$ *принадлежит* $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *и является* $\mathcal{F}_{t+1/n}$ *измеримым для любого* $t \in [0, h_n)$. *Тогда для решения задачи Коши* (3) $X_n^i(t)$ *и решения системы* (5) $X(t)$ *справедливы следующие неравенства*:

$$\sup_{t\in T} E\| X_n(t) - X(t)\|^2 \le C \sup_{t\in[0,h_n)} E\| X_n^0(t) - x\|^2 + \frac{C}{n^{3/2} h_n} + C\sum_{j=1}^m (K^j(n,h_n) - (1-2\theta_j))^2,$$

если $1/n^{3/2} < h_n < 1/n^{5/4}$,

$$\sup_{t\in T} E\| X_n(t) - X(t)\|^2 \le C \sup_{t\in[0,h_n)} E\| X_n^0(t) - x\|^2 + \frac{C}{n^{2/3} h_n^{1/3}} + C\sum_{j=1}^m (K^j(n,h_n) - (1-2\theta_j))^2,$$

если $1/n^{5/4} \le h_n \le 1/n^{1/2}$,

$$\sup_{t\in T} E\| X_n(t) - X(t)\|^2 \le C \sup_{t\in[0,h_n)} E\| X_n^0(t) - x\|^2 + C h_n + C\sum_{j=1}^m (K^j(n,h_n) - (1-2\theta_j))^2,$$

если $1/n^{1/2} \le h_n$. *Здесь и далее C – некоторая константа, не зависящая от n, t и* h_n.

Доказательство. Воспользуемся тем, что система уравнений (5) с θ-интегралами эквивалентна следующей системе уравнений с интегралами Ито (см., например, [6]):

$$X^i(t) = x^i + \sum_{j=1}^m (I)\int_0^t f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) + \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^r \theta_j \int_0^t f^{\alpha j}(s, X(s)) \partial_\alpha f^{ij}(s, X(s)) ds + \int_0^t g^i(s, X(s)) ds, \quad i = \overline{1,r}.$$

Тогда разность $X_n^i(t) - X^i(t)$ можно представить в следующем виде:

$$X_n^i(t) - X^i(t) = \left[X_n^{0i}(\tau_t') - x^i + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{k'_t-1} f_n^{ij}(\tau_t' + kh_n, X_n(\tau_t' + kh_n)) \times \right.$$

$$\times [B_n^j(\tau_t' + (k+1)h_n) - B_n^j(\tau' + kh_n)] -$$

$$\left. -\sum_{j=1}^{m} (\theta) \int_0^{\tau_t} f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) + \sum_{k=0}^{k'_t-1} g_n^i(\tau_t' + kh_n, X_n(\tau_t' + kh_n))h_n - \int_0^{\tau_t} g^i(s, X(s)) ds \right] +$$

$$+ \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta))[B_n^j(\tau + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta)] - \right.$$

$$\left. -\sum_{j=1}^{m} (I) \int_{\tau_t}^{t} f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) \right] +$$

$$+ \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{p=0}^{l-1} (f_n^{ij}(\tau_t + k\delta + ph_n, X(\tau_t + k\delta + ph_n))) - f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta)) \times \right.$$

$$\left. \times [B_n^j(\tau + k\delta + (p+1)h_n) - B_n^j(\tau_t + k\delta + ph_n)] - \sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{r} \theta_j \int_{\tau_t}^{t} f^{\alpha j} \partial_\alpha f^{ij}(s, X(s)) ds \right] +$$

$$+ \left[\sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{p=0}^{l-1} g_n^i(\tau_t + k\delta + ph_n, X_n(\tau_t + k\delta + ph_n))h_n - \int_{\tau_t}^{t} g^i(s, X(s)) ds \right] =$$

$$= H_0(t) + H_1(t) + H_2(t) + H_3(t).$$

Несложно убедиться в справедливости следующего равенства для $H_0(t)$:

$$H_0(t) = \left[X_n^{0i}(\tau_t') - x^i \right] + \left\{ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{k'_t-1} f_n^{ij}(\tau_t' + kh_n, X_n(\tau_t' + kh_n))[B_n^j(\tau_t' + (k+1)h_n) - B_n^j(\tau_t' + kh_n)] \right\} -$$

$$- \left\{ \sum_{j=1}^{m} (\theta_j) \int_0^{\tau_t} f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) \right\} + \left\{ \sum_{k=0}^{k'_t-1} g_n^i(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau_t' + kh_n))h_n \right\} - \left\{ \int_0^{\tau_t} g^i(s, X(s)) ds \right\} =$$

$$= \left[X_n^{0i}(\tau_t') - x^i \right] + A_1(t) - A_2(t) + A_3(t) - A_4(t).$$

Используя ограниченность функций f^{ij}, а также представления h_n и δ, получим следующую оценку для слагаемого $A_1(t)$:

$$E(A_1(t))^2 \le C\delta^2 / h_n. \tag{7}$$

Для оценки $A_2(t)$ воспользуемся связью между θ-интегралом и интегралом Ито, а также свойствами интеграла Ито:

$$E(A_2(t))^2 \le C\delta + C\delta^2 \le C\delta. \tag{8}$$

Исходя из ограниченности функций g^i, получим оценки для $A_3(t)$ и $A_4(t)$:

$$E(A_3(t))^2 = E\left[\sum_{k=0}^{k'_t-1} \int_0^{1/n} \int_0^{1/n} g(\tau_t' + kh_n + s, X_n(\tau_t' + kh_n) + u)\rho(s,u) ds du \cdot h_n \right]^2 \le C\delta^2, \tag{9}$$

$$E(A_4(t))^2 = E\left[\int_0^{\tau_t} g^i(s, X(s)) ds \right]^2 \le C\tau_t^2 \le C\delta^2. \tag{10}$$

Из оценок (7) – (10) получим оценку для $H_0(t)$:

$$E(H_0(t))^2 \le C\left(X_n^{0i} - x^i \right)^2 + C\delta^2 / h_n.$$

Используя ту же методику, можно получить оценки для слагаемых $H_1(t)$, $H_2(t)$ и $H_3(t)$, из которых следует неравенство

$$E(X_n^i(t)-X^i(t))^2 \le C\left(X_n^{0i}-x^i\right)^2+\frac{C\delta^2}{h_n}+\frac{C}{n^4\delta^2 h_n}+\frac{C}{n\delta}+C\delta+$$
$$+C\delta\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}E\left[X_n^i(\tau_t+k\delta)-X^i(\tau_t+k\delta)\right]^2+C\sum_{j=1}^{m}(K^j(n,h_n)-(1-2\theta_j))^2.$$

Применяя к нему дискретный аналог неравенства Гронуола, будем иметь

$$E\left\|X_n(t)-X(t)\right\|^2 \le C\left\|X_n^0-x\right\|^2+\frac{C\delta^2}{h_n}+\frac{C}{n^4\delta^2 h_n}+\frac{C}{n\delta}+C\delta+C(K^j(n,h_n)-(1-2\theta_j))^2. \tag{11}$$

Если $1/n^{3/2}<h_n<1/n^{5/4}$, то, положив в (11) $\delta=h_n n^{1/2}$, получим первое неравенство из условия теоремы, если $1/n^{5/4}\le h_n\le 1/n^{1/2}$, тогда, выбрав $\delta=h_n^{1/3}/n^{1/3}$, получим второе неравенство, при $1/n^{1/2}\le h_n$, взяв $\delta=h_n$, получим третье неравенство.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если $\sup\limits_{t\in[0,h_n)} E\left[X_n^{0i}(t)-x^i\right]^2\to 0$ *для любого* $i=\overline{1,r}$ *и* $K^j(n,h_n)\to(1-2\theta_j)$ *при* $\theta_j\in[0,1/2]$, $j=\overline{1,m}$, $n\to\infty$, $h_n\to 0$ *так, что* $1/n^{3/2}=o(h_n)$, *то* $\sup\limits_{t\in T}E\left\|X_n(t)-X(t)\right\|^2\to 0.$

Доказательство. Получается предельным переходом в неравенстве (11).

Теорема 2. *Пусть* $f^{ij}\in\mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$, $g^i\in\mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, $i=\overline{1,r}$, $j=\overline{1,m}$. *Если* $n\to\infty$, $h_n\to 0$ *так, что* $1/n^{3/2}=o(h_n)$, *причем* $\sup\limits_{t\in[0,h_n)}E\left[X_n^{0i}(t)-x^i\right]^2\to 0$, *то для сходимости последовательности* $X_n(t)$ *решений задачи Коши* (3) *в* $\mathbf{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ *равномерно по* $t\in T$ *необходимо и достаточно, чтобы сходились числовые последовательности* $K^j(n,h_n)$, $j=\overline{1,m}$.

Доказательство. Достаточность доказана в следствии. Докажем необходимость. Пусть $X_n(t)$ сходится к некоторому процессу $X(t)$ в требуемом смысле и пусть $Y_n(t)=(Y_n^1(t),\ldots,Y_n^r(t))$ – решение системы (5) для $\theta_j=(1-K^j(n,h_n))/2.$ Тогда, воспользовавшись эквивалентной записью системы (5), получим $Y_n(t)$ – решение системы

$$Y_n(t)=x^i+\sum_{j=1}^{m}(I)\int_0^t f^{ij}(s,Y_n(s))dB^j(s)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{1-K^j(n,h_n)}{2}\sum_{\alpha=1}^{r}\int_0^t(f^{\alpha j}\partial_\alpha f^{ij})(s,Y_n(s))ds+\int_0^t g^i(s,Y_n(s))ds. \tag{12}$$

Из теоремы 1 вытекает справедливость следующих неравенств:

$$\sup_{t\in T}E\|X_n(t)-Y_n(t)\|^2\le C\sup_{t\in[0,h_n)}E\|X_n^0(t)-x\|^2+Cn^{3/2}h_n,\ \text{если } 1/n^{3/2}<h_n<1/n^{5/4},$$

$$\sup_{t\in T}E\|X_n(t)-Y_n(t)\|^2\le C\sup_{t\in[0,h_n)}E\|X_n^0(t)-x\|^2+\frac{C}{n^{2/3}h_n^{1/3}},\ \text{если } 1/n^{5/4}\le h_n\le 1/n^{1/2},$$

$$\sup_{t\in T}E\|X_n(t)-Y_n(t)\|^2\le C\sup_{t\in[0,h_n)}E\|X_n^0(t)-x\|^2+Ch_n,\ \text{если } 1/n^{1/2}\le h_n.$$

Перейдя в этих неравенствах к пределу при $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $1/n^{3/2}=o(h_n)$, получим $\sup\limits_{t\in T}E\|X_n(t)-Y_n(t)\|^2\to 0.$

Таким образом, $Y_n(t)$ сходится к $X(t)$. Поэтому и правая часть равенства (12) сходится. Отсюда вытекает, что последовательности коэффициентов $(1-K^i(n,h_n))/2$ сходятся, что влечет за собой сходимость последовательностей $K^i(n,h_n)$. Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос существования и единственности решения задачи Коши для систем в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов $G(T,\Omega)$, а также исследуем ассоциированные решения систем конечно-разностных уравнений с осреднением.

Теорема 3. *В алгебре* $G(\tilde{T},\Omega)$ *решение задачи Коши* (2) *существует и единственно тогда и только тогда, когда для любых представителей* $(f_n^{ij}) \in \tilde{f}^{ij}$, $(g_n^i) \in \tilde{g}^i$, $(B_n^j) \in \tilde{B}^j$, $(X_n^i) \in \tilde{X}^i$, $(X_n^{0i}) \in \tilde{X}^{0i}$ *для достаточно больших номеров* n *выполняется условие*

$$\frac{d^l}{ds^l} X_n^{0i}(h_n - s) - \frac{d^l}{ds^l} X_n^{0i}(s) - \sum_{j=1}^{m} \frac{d^l}{ds^l} [f_n^{ij}(s, X_n^0(s))[B_n^j(h_n + s) - B_n^j(s)]] -$$
$$- \frac{d}{ds^l} g_n^i(s, X_n^0(s)) h_n \to 0 \tag{13}$$

при $s \to +0$ *почти наверное для любых* $l = 0, 1, 2, ...,$ $i = 1, 2, \ldots, r.$

Доказательство. Записав задачу (2) на уровне представителей в виде (3), очевидным образом получаем, что для каждого *n* функции X_n существуют и единственны. Покажем, что при выполнении условий теоремы функции X_n бесконечно дифференцируемы для достаточно больших *n*. Из этого будет вытекать, что последовательность X_n определяет элемент алгебры $G(\tilde{T},\Omega)$, который и будет искомым решением задачи (2).

Из формулы (3) следует, что если $X_n(t)$ бесконечно дифференцируема в точке $t \neq 0,$ то она бесконечно дифференцируема в точке $t + h_n.$ Поэтому достаточно показать бесконечную дифференцируемость X_n в точках $t \in [0, h_n).$ Если $t \in (0, h_n),$ то $X_n(t) = X_n^0(t)$ является бесконечно дифференцируемой.

Рассмотрим $t = h_n.$ Найдем в этой точке лево- и правостороннюю производную $X_n^i(t).$

$$\left.\frac{d}{dt} X_n^i(t)\right|_{t=h_n+0} = \frac{d}{dt}\left\{ X_n^{0i}(t) + \sum_{j=1}^{m} f_n^{ij}(t, X_n^0(t))\left[B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)\right] + g_n^i(t, X_n^0(t)) h_n \right\}\Bigg|_{t=+0},$$

$$\left.\frac{d}{dt} X_n^i(t,\omega)\right|_{t=h_n-0} = \left.\frac{d}{dt} X_n^{0i}(t,\omega)\right|_{t=h_n-0}.$$

Из условия теоремы вытекает, что лево- и правосторонняя производные равны, поэтому $X_n(t)$ дифференцируема в точке $t = h_n$ и ее производная непрерывна в этой точке.

Существование производных высших порядков в этой точке доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть* $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1}),$ $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1}),$ $\tilde{X}^{0i} \in G(\tilde{T},\Omega),$ *а* $\tilde{f}^{ij},$ $\tilde{g}^i$ *и* $\tilde{B}^j$ *определяются соответственно последовательностями* $f_n^{ij},$ g_n^i *и* B_n *из* (4). *Если для* $\tilde{f}^{ij},$ $\tilde{g}^i,$ $\tilde{B}^j$ *и* $\tilde{X}^{0i},$ $i = 1,\ldots,r,$ $j = 1,\ldots,m,$ *выполнены условия теоремы* 3, *причем* $\sup\limits_{t\in[0,h_n)} E\left[X_n^{0i}(t) - x^i\right]^2 \to 0$ *для некоторых* $x^i \in \mathbb{R},$ $i = 1,\ldots,r,$ *тогда решения задачи* (2) *ассоциируют решения системы* (5) *с* $\theta_j \in [0,1/2],$ $j = 1,\ldots,m.$

Доказательство вытекает из теорем 2 и 3.

1. Colombeau J.F. // J. Math. Anal. and Appl. 1983. Vol. 94. № 1. P. 96.
2. Лазакович Н.В. // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38. № 5. С. 23.
3. Русина Т.И., Яблонский О.Л. // Тр. Ин-та математики. 2004. Т. 12. № 2. С. 154.
4. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П., Стемковская Т.В. // Теория вероятностей и ее применение. 1998. Т. 43. Вып. 2. С. 272.
5. Lazakovich N.V., Yablonski A.L. // Stoch. and Stoch. Rep. 2004. Vol. 76. № 2. P. 135.
6. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.

Поступила в редакцию 30.06.08.

Татьяна Ивановна Каримова – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики БрГУ им. А.С. Пушкина.

Олег Леонидович Яблонский – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа.