О МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ЦЕН ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ θ-ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

П. М. Лаппо

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
LappoPM@bsu.by

Рассмотрены модели динамики цен финансовых активов в предположении, что краткосрочная процентная ставка описывается стохастическим дифференциальным уравнением, содержащим θ-дифференциал.

Ключевые слова: цена облигации, краткосрочная процентная ставка, θ-дифференциал.

Будем рассматривать рынок ценных бумаг, функционирующий на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, F, P, \Im)$. Основные активы – это облигации с нулевым купоном с различными сроками погашения.

Определение 1. Облигацией с нулевым купоном и сроком погашения T называется актив, по которому в момент T владельцу выплачивается одна денежная единица.

Цена T-облигации в момент t обозначается $P(t,T)$. Сделаем следующие предположения:

- для любого $T > 0$ существует рынок T-облигаций;
- для любого фиксированного T $\{P(t,T), 0 \le t \le T\}$ является случайным процессом со свойством $p(t,t) = 1$, при всех t;
- для каждого фиксированного t процесс $P(t,T)$ непрерывно дифференцируем по переменной T.

Определение 2. Текущей форвардной ставкой в момент T, устанавливаемой в момент t, называется величина

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}.$$

Определение 3. Краткосрочной процентной ставкой в момент t называется

$$r(t) = f(t,t).$$

Предположим, что существует локально безрисковый актив, процесс цены которого $V(t)$ подчиняется следующему уравнению

$$dV(t) = r(t)V(t)dt,$$

где $r(t)$ – краткосрочная процентная ставка. Это соотношение выполняется с достоверностью. Будем считать, что $r(t)$ непрерывный марковский процесс, заданный априори и подчиняющийся стохастическому дифференциальному уравнению Ито

$$dr = \mu_r(t)dt + \sigma_r(t)dW(t), \qquad (1)$$

где $\mu_r(t)$ и $\sigma_r(t)$ это достаточно гладкие функции переменных r и t, называемые соответственно дрейфом и волатильностью краткосрочной процентной ставки, а $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, согласованный с фильтрацией $\Im$. В записи, использующей интеграл Ито, соотношение (1) эквивалентно следующему

$$r(t) = r_0 + \int_0^t \mu_r(t)dt + (I)\int_0^t \sigma_r(t)dW(t). \qquad (2)$$

Используя формулу Ито, можно получить [1], что процесс цены подчиняется следующему стохастическому дифференциальному уравнению Ито:

$$dP = P\mu_P(t,T)dt - P\sigma_P(t,T)dW(t),$$

где

$$\mu_P(t,T) = \frac{1}{P(t,T,r)}\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]P(t,T,r),$$

$$\sigma_P(t,T) = -\frac{1}{P(t,T,r)}\sigma_r \frac{\partial}{\partial r}P(t,T,r).$$

Можно показать [1], что для цены облигации справедливо уравнение в частных производных

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r(t) + \lambda\sigma_r(t))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \qquad (3)$$

с граничным условием

$$P(T,T,r) = 1. \qquad (4)$$

В уравнении (4) через

$$\lambda = \lambda(t,r) = \frac{\mu_P(t,T) - r(t)}{\sigma_P(t,T)}$$

обозначена рыночная цена риска.

Рассмотрим модель динамики краткосрочной процентной ставки вида

$$r(t) = r_0 + \int_0^t \mu_r(s)ds + (\theta)\int_0^t \sigma_r(s)dW(s). \qquad (5)$$

Последнее слагаемое правой части (5) – это θ-интеграл, $0 \le \theta \le 1$. По определению (см. [2] с.191) интеграл

$$(\theta)\int_0^t q(s,r(s))dW(s) =$$
$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} q(t_k, r((1-\theta)t_k + \theta t_{k+1}))\left[W(t_{k+1}) - W(t_k)\right], \qquad (6)$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, $\Delta = \max\limits_{k=0,\ldots,m-1} (t_{k+1} - t_k)$ – диаметр разбиения, а предел понимается в среднем квадратическом смысле. Интеграл Ито получается в (6) при $\theta = 0$, интеграл Стратоновича при $\theta = \frac{1}{2}$. Уравнение (5) может быть записано в виде стохастического θ-дифференциала

$$d_\theta r = \mu_r(t)dt + \sigma_r(t)d_\theta W.$$

Тогда с учетом взаимосвязи между θ-дифференциалами и дифференциалами Ито (см. [2], с. 215), цена облигации подчиняется следующему уравнению в частных производных

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r(t) + \lambda\sigma_r(t) + \theta\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\sigma_r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \qquad (7)$$

$$P(T, T, r) = 1,$$

где

$$\lambda(t, r) = \frac{\mu_P(t,T) - r(t)}{\sigma_P(t,T)},$$

$$\mu_P(t,T) = \frac{1}{P(t,T,r)}\left[\frac{\partial}{\partial t} + \theta\left(\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\sigma_r\right)\frac{\partial}{\partial r} + \mu_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]P(t,T,r),$$

$$\sigma_P(t,T) = -\frac{1}{P(t,T,r)}\sigma_r\frac{\partial}{\partial r}P(t,T,r).$$

В уравнении (7), по сравнению с уравнением (3), при частной производной $\frac{\partial P}{\partial r}$ появляется дополнительное слагаемое $\theta\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}$.

Обратимся теперь к некоторым известным моделям динамики цен облигаций. Модель Васичека (см. [1]) с θ-интегралом не приводит к новому выражению для цены, так как в этом случае

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = 0.$$

Модель Кокса – Ингерсолла – Росса (CIR) с θ-интегралом и $\lambda(t,r) = -\frac{\lambda}{\sigma}\sqrt{r}$

$$d_\theta r(t) = r_0 + k(\gamma - r(t))dt + \sigma\sqrt{(r(t)}d_\theta W(s)$$

приводит к формуле для цены облигации

$$P(t, T, r) = \exp\{A(t,T) - rB(t,T)\},$$

где

$$B(t,T)=$$

$$=\frac{2(\exp(\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2}\,(T-t))-1)}{2\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2}+(k+\lambda+\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2})(\exp(\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2}\,(T-t)-1)},$$

$$A(t,T)=\frac{2k\gamma+\theta\sigma}{\sigma^2}\times$$

$$\times\ln\left[\frac{2\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2}\exp(k+\lambda+\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2})(T-t)/2)}{2\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2}+(k+\lambda+\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2})(\exp(\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2}\,(T-t)-1)}\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев Г. А.* Математические модели финансовых рисков. Ч. 1. Мн., 1999. С. 240.
2. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1998. С. 637.