ОДНОМЕРНЫЕ НЕАВТОНОМНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ БЕЗ СНОСА

А. Н. Лепеев

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
ALepeev@iba.by

В работе исследуются одномерные стохастические дифференциальные уравнения и включения без сноса с зависимым от времени диффузионным коэффициентом. Приводятся различные способы построения правой части включений, исследуются условия существования (возможно, взрывающихся) решений уравнений в смысле решений соответствующих дифференциальных включений. Основной результат – критерий существования слабых решений уравнений в смысле включений.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, стохастические дифференциальные включения, измеримые коэффициенты.

В статье исследуются стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) вида:

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)dW_s, t \geq 0, \tag{1}$$

где $b:[0,+\infty)\times R \to R$ – измеримый по Борелю диффузионный коэффициент, W – одномерный винеровский процесс, $x_0 \in R$ – произвольное начальное условие. Рассматриваются условия существования их (возможно, взрывающихся) решений в смысле решений соответствующих стохастических дифференциальных включений (СДВ) вида:

$$\begin{cases} dX_t \in B(t, X_t)dW_t, t \geq 0, \\ X_0 = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

где $B: R \to cl(R)$ – многозначное отображение, построенное некоторым образом, исходя из вида b – диффузионного коэффициента уравнения (1.1), $cl(R)$ — множество всех замкнутых подмножеств из R.

Теория стохастических дифференциальных включений является новой, но достаточно быстро развивающейся областью математики. Было замечено, что можно расширить класс уравнений, для которых существуют решения путем сведения понятия решений этого более широкого класса уравнений к решениям соответствующих включений. Включения изучаются в тесной взаимосвязи с существующими концепциями уравнений, теоремами существования решений этих уравнений. Важным является вопрос построения правой части включений.

Впервые теория обыкновенных дифференциальных включений была систематизирована в [1]. Стохастические дифференциальные включения, как самостоятельный объект, были введены в [2], хотя такие включения ранее рассматривались в [3]. Изучением объекта занимались многие авторы (см. [4]–[7]).

В данной работе исследуются решения стохастических дифференциальных включений с 12 различными определениями правой части. Вводятся новые понятия решений СДУ, как решений соответствующих СДВ. Доказывается, что решение уравнения (1) в смысле включения (2) существует при условии локальной интегрируемости борелевского диффузионного коэффициента в квадрате, что является более слабым условием, чем в [8]–[10]. Два варианта правой части включения, исследуемые в [8]–[10], совпадают с B_1 и B_6, определенными в (4) вариантами правой части, указанными в данной работе и, кроме того, в данной работе теорема существования доказывается также для других вариантов правых частей.

Итак, обозначим $(\overline{R},\beta(\overline{R}))$ одноточечную компактификацию $\overline{R}=R\cup\{\Delta\}$ пространства R, снабженную σ-алгеброй $\beta(\overline{R})$ его борелевских подмножеств. Для любой функции $\omega: R_+ \to \overline{R}$ определим: $\tau_\Delta(\omega)=\inf\{t\geq 0:\omega(t)=\Delta\}$ — *момент взрыва* траектории ω. Будем рассматривать пространство траекторий $E(R_+,\overline{R})$ — множество всех непрерывных справа функций $\omega: R_+ \to \overline{R}$, таких что ω – непрерывно на интервале $[0,\tau_\Delta(\omega))$ и $\omega(t)=\Delta$ при $t\geq\tau_\Delta(\omega)$, и σ-алгебру борелевских цилиндрических множеств $\varepsilon(R_+,\overline{R})=\beta(E(R_+,\overline{R}))$.

Пусть (Ω,F,P) – полное вероятностное пространство с фильтрацией $\mathbb{F}=(F_t)_{t\geq 0}$. Предполагаем, что фильтрация $\mathbb{F}$ удовлетворяет естественным условиям, т. е. непрерывна справа и F_0 содержит все P – нулевые множества из F. Для процесса $(X_t)_{t\geq 0}$, определенного на (Ω,F,P), мы пишем $(X,\mathbb{F})$, если X — $\mathbb{F}$-согласованный.

Напомним, что стохастический процесс $(X,\mathbb{F})$, определенный на вероятностном пространстве (Ω,F,P) с фильтрацией $\mathbb{F}=(F_t)_{t\geq 0}$ и траекториями в $E(R_+,\overline{R})$ называют *слабым решением* СДУ (1) с начальным условием $x_0\in R$, если существует $(\overline{W},\mathbb{F})$ винеровский процесс с $\overline{W_0}=0$, такой что $\forall t<\tau_\Delta(X)$, P – п. н. выполняется:

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s)d\overline{W_s}$$

Стохастический процесс X называется *сильным решением* СДУ (1) с начальным условием $x_0\in R$, если он согласован с $(F_t)_{t\geq 0}^W$ – пополнением натуральной фильтрации исходного винеровского процесса W.

Говорят, что выполняется *условие потраекторной единственности слабых решений*, если для любых двух слабых решений X и X', определенных на одном том же вероятностном пространстве с той же фильтрацией и с тем же винеровским процессом, из равенства $X_0 = X_0'$ п. н., следует что $X_t = X_t'$ п. н., $\forall t\geq 0$.

Известный принцип (см. [11] с.154–157) устанавливает связь между понятиями слабого и сильного решения. Он гласит:

Предложение 1. (Ямада – Ватанабэ). Если для любой борелевской меры ν на $(R,\beta(R))$ существует слабое решение уравнения (1), такое что $P^{X_0}=\nu$ и выполняется условие потраекторной единственности слабых решений, то для любой $(F|\beta(R))$ – измеримой случайной величины η уравнение (1) имеет сильное решение с начальным условием ν.

При построении правой части будем исходить из теоремы, доказанной в [12], которая является самым слабым из известных достаточных условий существования решения уравнения (1) для любого начального условия $x_0 \in R$.

Предложение 2. (Раупах). Введем обозначения: $N = \{x \in R_+ \times R \,|\, b(x) = 0\}$, $M = \left\{x \in R_+ \times R \,\middle|\, \int_{U(x)} b^{-2}(y)dy, \forall U(x) - \text{открытой окрестности точки } x\right\}$. Слабое решение СДУ (1.1) существует для любого начального условия $x_0 \in R$, если выполняются следующее два условия: 1) $M \subseteq N$, 2) $b^2 \in L^{loc}(R_+ \times R)$ – интегрируемо по мере Лебега на любом компакте из $R_+ \times R$.

Приведем несколько вспомогательных утверждений, которые определяют свойства множества M, доказательство которых опустим.

Утверждения.

1. Множество M замкнуто.
2. Если точка $x^* \in M$ – точка непрерывности функции b, то $b(x^*) = 0$.
3. Если точка $x^* \in M$, то $\exists (x_n)$, такая что $x_n \to x^*$ и $b(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Введем следующие обозначения: A_1 – множество $\{b(x) \,|\, x \in R_+ \times R\}$ плюс все предельные точки множества $\{b(x_n)\}$ при $x_n \to x^*$; A_2 – множество $\{b(x) \,|\, x \in R_+ \times R\}$ в точках непрерывности b плюс все предельные точки множества $\{b(x_n)\} \setminus b(x^*)$ при $x_n \to x^*$, для всех x^* – точек разрыва функции b; A_3 – наименьшая выпуклая оболочка множества A_1; A_4 – наименьшая выпуклая оболочка множества A_2; $M^c = (R_+ \times R) \setminus M$.

Правую часть СДВ (1.2) определим следующими способами:

$$B_1 = A_1,\; B_2 = A_2,\; B_3 = A_3,\; B_4 = A_4,\; B_5 = \begin{cases} b(x), \; x - \text{точка непрерывности функции } b, \\ \{A_4(x), b(x)\}, \; x - \text{точка разрыва функции } b; \end{cases}$$

$$B_6 = \begin{cases} b(x), x \in M^c, \\ A_1(x), x \in M; \end{cases} \quad B_7 = \begin{cases} b(x), x \in M^c, \\ A_2(x), x \in M; \end{cases} \quad B_8 = \begin{cases} b(x), x \in M^c, \\ A_3(x), x \in M; \end{cases} \quad B_9 = \begin{cases} b(x), x \in M^c, \\ A_4(x), x \in M; \end{cases}$$

$$B_{10} = \begin{cases} \{A_4(x), b(x)\}, x \in M - \text{точка разрыва функции } b, \\ b(x), \text{иначе}; \end{cases}$$

$$B_{11} = \begin{cases} b(x), x \in M^c, \\ \{b(x), 0\}, x \in M; \end{cases} \quad B_{12} = \begin{cases} b(x), x \in M^c, \\ \{0\}, x \in M; \end{cases}$$

Замечание 1. Если коэффициент b непрерывен, то определенные выше правые части равны b, так как доопределение идет только в точках разрыва b. Все значения $\{b(x) \,|\, x \in R_+ \times R\}$ могут не принадлежать правым частям $B_2, B_4, B_7, B_9, B_{12}$, так как при их построении значение функции b в некоторых точках разрыва не учитывается. В B_2, B_4 не учитывается значение во всех точках разрыва, в B_7, B_9, B_{12} не учитывается значение b на множестве точек разрыва – $M \setminus N$, последнее следует из утверждения 2.

Замечание 2. Отображение B_{12} – однозначное, из построения. Из утверждения 3 следует, что B_{12} принадлежит всем остальным (возможно, многозначным) отображениям $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}$.

Наряду с классическими определениями решений СДУ (1) приведем определения решений СДУ в смысле решений соответствующих СДВ (2). В приведенных ниже определениях l обозначает меру Лебега на прямой.

Определение 1. Стохастический процесс $(X, \mathbb{F})$, определенный на вероятностном пространстве (Ω, F, P) с фильтрацией $\mathbb{F} = (F_t)_{t\geq 0}$ и траекториями в $E(R_+, \overline{R})$ называют $\beta 1$ – *слабым решением* СДУ (1) с начальным условием $x_0 \in R$, если существует $(\overline{W}, \mathbb{F})$ – винеровский процесс с $W_0 = 0$ и существует измеримый процесс $(u, \mathbb{F})$, такой что $u(t,\omega) \in B_1(t, X(t,\omega))$ для $l \times P$ – почти всех $(t,\omega) \in [0, \tau_\Delta(X)) \times \Omega$ и $\forall t \in [0, \tau_\Delta(X))$, P – п. н. выполняется:

$$X_t = x_0 + \int_0^t u(s)d\overline{W_s}. \tag{3}$$

Аналогично определяются $\beta 2, \beta 3, \beta 4, \beta 5, \beta 6, \beta 7, \beta 8, \beta 9, \beta 10, \beta 11, \beta 12$ – *слабые решения* СДУ (1), где в качестве правой части соответствующего включения выступают $B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}$, соответственно.

Определение 2. Стохастический процесс X называется $\beta 1$ – *сильным решением* СДУ (1) с начальным условием $x_0 \in R$, если он согласован с $(F_t)^W_{t\geq 0}$ – пополнением натуральной фильтрации исходного винеровского процесса W и существует измеримый процесс $(u, \mathbb{F})$, такой что $u(t,\omega) \in B_1(t, X(t,\omega))$ для $l \times P$ – почти всех $(t,\omega) \in [0, \tau_\Delta(X)) \times \Omega$ и $\forall t \in [0, \tau_\Delta(X))$, P – п. н. выполняется:

$$X_t = x_0 + \int_0^t u(s)dW_s.$$

Аналогично определяются $\beta 2, \beta 3, \beta 4, \beta 5, \beta 6, \beta 7, \beta 8, \beta 9, \beta 10, \beta 11, \beta 12$ – *сильные решения* СДУ (1), где в качестве правой части соответствующего включения выступают $B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}$, соответственно.

Определение 3. Говорят, что выполняется *условие потраекторной единственности* $\beta 1(\beta 2, \beta 3, \beta 4, \beta 5, \beta 6, \beta 7, \beta 8, \beta 9, \beta 10, \beta 11, \beta 12)$ – *слабых решений*, если для любых двух $\beta 1(\beta 2, \beta 3, \beta 4, \beta 5, \beta 6, \beta 7, \beta 8, \beta 9, \beta 10, \beta 11, \beta 12)$ – слабых решений X и X', определенных на одном том же вероятностном пространстве, с одной и той же фильтрацией, с одним и тем же винеровским процессом, из равенства $X_0 = X'_0$ п. н., следует что $X_t = X'_t$ п. н., $\forall t \in [0, \tau_\Delta(X) = \tau_\Delta(X'))$.

Замечание 3. Так как отображение B_{12} однозначное, то принцип Ямады – Ватанабэ (предложение 1) можно переформулировать следующим образом: если для любой борелевской меры ν на $(R, \beta(R))$ существует $\beta 12$ – слабое решение уравнения (1), такое что $P^{X_0} = \nu$ и выполняется условие потраекторной единственности $\beta 12$ – слабых решений, то для любой $(F|\beta(R))$ – измеримой случайной величины η уравнение (1) имеет $\beta 12$ – сильное решение с начальным условием ν.

Итак, мы рассматриваем СДУ вида (1). Сначала приведем утверждение, которое является важной при доказательстве основного результата.

Л е м м а 1. Если функция b – борелевская, то определенная в (4) функция B_{12} также является борелевской.

Ключевой момент доказательства леммы тот, что из утверждения 1 множество M – замкнуто и $B_{12}^{-1}([a,b))$ – полный прообраз множества $[a,b)$ относительно отображения B_{12} представляется в виде $M \cup (b^{-1}(\overline{B}) \setminus M)$, где $\overline{B} \in \beta(R_+ \times R)$.

Теорема 1. Если диффузионный коэффициент СДУ (1.1) удовлетворяет условию:

$$b^2 \in L^{loc}(R_+ \times R), \tag{4}$$

то СДУ (1) имеет $\beta 12$ – слабое решение для любого начального условия $x_0 \in R$.

Доказательство. Напомним, что мы рассматриваем СДУ вида (1), где b – борелевский диффузионный коэффициент. Будем идти конструктивным путем. Если мы явно укажем селектор построенного многозначного отображения, на котором выполняется условие 1 предложения 2, то это и будет доказательством теоремы.

В качестве селектора u возьмем саму функцию B_{12}. Из замечания 2 выбранная функция однозначна. Из леммы 1 функция B_{12} – борелевская. Из построения B_{12} видно, что для этой функции выполняется условие 1 предложения 2. Следовательно, по теореме Раупаха существует фильтрированное вероятностное пространство $(\Omega, F, \mathbb{F} = (F_t)_{t \geq 0}, P)$, винеровский процесс $(W, \mathbb{F})$ и стохастический процесс $(X, \mathbb{F})$ – слабое решение уравнения (3). Так как функция B_{12} борелевская, то композиция $B_{12}(t, X(t))$ согласованна с $\mathbb{F}$ и σ-алгебру F всегда можно взять такую, что B_{12} будет F – измеримо, поэтому указанный селектор удовлетворяет условиям определения 1. Следовательно, $(X_t)_{t \geq 0}$ является $\beta 12$ – слабым решением уравнения (1) относительно той же фильтрации и того же винеровского процесса.

Следствие 1. Из замечания 2 следует, что указанное $\beta 12$ – слабое решение, также является $\beta 1, \beta 2, \beta 3, \beta 4, \beta 5, \beta 6, \beta 7, \beta 8, \beta 9, \beta 10, \beta 11$ – слабым решением. Поэтому решение СДУ (1) всегда существует и в смысле $\beta 1, \beta 2, \beta 3, \beta 4, \beta 5, \beta 6, \beta 7, \beta 8, \beta 9, \beta 10, \beta 11$ – слабого решения.

Используя замечание 3, можно сформулировать следующий принцип:

Теорема 2. Пусть для СДУ (1) выполняется условие (4) и условие потраекторной единственности $\beta 12$ – слабых решений, тогда это уравнение имеет $\beta 12$ – сильное решение для любого начального условия $x_0 \in R$.

Следствие 2. Из замечания 2 следует, что указанное $\beta 12$ – сильное решение, также является $\beta 1, \beta 2, \beta 3, \beta 4, \beta 5, \beta 6, \beta 7, \beta 8, \beta 9, \beta 10, \beta 11$ – сильным решением. Поэтому из выполнения условия (4) и условия потраекторной единственности $\beta 12$ – слабых решений следует существование также $\beta 1, \beta 2, \beta 3, \beta 4, \beta 5, \beta 6, \beta 7, \beta 8, \beta 9, \beta 10, \beta 11$ — сильного решения уравнения (1).

Пример 1. Пусть в уравнении (1) коэффициент b определен следующим образом: $b(x)=\begin{cases} x, x\neq 0, \\ 1, x=0. \end{cases}$ Используя формулу Ито, легко проверить, что процесс $X_t = e^{(W_t-\frac{1}{2}t)}$ является решением данного уравнения для $x_0 = 1$. Также видно, что это решение является β1,β2,β3,β4,β5,β6,β7,β8,β9,β10,β11,β12 – слабым решением уравнения (1), где селектором является функция $u = B_{12}(x) = x$. Очевидно, данное уравнение не удовлетворяет условию 1 предложения 2, но удовлетворяет условию теоремы 1.

В теоремах 1 и 2 данной работы доказывается существование решений уравнений в смысле включений с определенным образом построенными правыми частями. Однако правая часть B_{12} является очень близкой к b, изменение b при построении B_{12} минимально. В доказательстве конструктивно приводится вид измеримого селектора, что явно указывает суть доопределения на множестве M. Очевидно, теоремы остаются верными для любых возможных правых частей включения (2), которым принадлежит множество B_{12}, в частности, для правых частей $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}$.

Важным видится тот факт, что в данной работе значительно ослабляется условие на борелевский диффузионный коэффициент для существования решения. Например, условие линейности роста диффузионного коэффициента для существования слабых решений из теорем, доказанных в [8]–[10], примененных для данного одномерного уравнения (1), является более сильным, чем условие (4) теоремы 1 данной работы, в которой доказывается, что решение в исследуемом контексте существует для любого локально интегрируемого в квадрате борелевского коэффициента. Коэффициент с линейным порядком роста является локально интегрируемым в любой степени, но локально интегрируемый коэффициент может не являться даже локально ограниченным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.

2. *Kree P.* Diffusion equation for multivalued stochastic differential equation // J. Func. Anal. 1982. Vol. 49. P. 73–90.

3. *Conway E. D.* Stochastic equations with discontinious drift // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 157. P. 235–245.

4. *Ahmed N. U.* Nonlinear stochastic differential inclusions on Banach space // Stochastic Anal. Appl. 1994. Vol. 12. P. 1–10.

5. *Cepa E.* Equations differentielles stochastiques multivoques // Siminaire Probabilities. Berlin: springer. 1995. Vol. 29. P. 86–107.

6. *Da Prato G., Frankovska H.* A stochastic Filippov theorem // Stochastic Anal. Appl. 1994. Vol. 12. P. 409–426.

7. *Petterson R.* Yosida approximations for multivalued stochastic differential equation // Stochastics and stochastic reports. 1995. Vol. 52. P.107–120.

8. *Леваков А. А.* Стохастические дифференциальные включения // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 212–220.

9. *Леваков А. А.* Теоремы существования для стохастических дифференциальных включений // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2003. № 4. С. 84–89.

10. *Kisielevich M.* Stochastic differential inclusions // Discuss. Math., Differ. Incl. 1997. Vol. 17. № 1, 2. P. 51–65.

11. *Ikeda N., Watanabe S.* Stoch. diff. eq. and diffusion processes // North-Holland Pub. 1981.

12. *Raupach P.* On driftless one-dimensional SDEs with time-dependent diffusion coefficients // Stochastic and stochastic reports. 1998. Vol. 67. P. 207–230.