ДВУХФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА КРАТКОСРОЧНЫХ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Г. А. Медведев, О. Г. Казанцева

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
MedvedevGA@bsu.by

Приводится анализ известных двухфакторных моделей краткосрочных процентных ставок. Показано, что они обладают некоторыми недостатками: либо не имеют стационарного распределения (модель CIR (1981)); либо недостаточно используют имеющуюся информацию (модель CIR (1985)), либо являются совокупностью двух независимых процессов (модель Морено (1996)). На основе этого анализа предложена двухфакторная модель, имеющая стационарное распределение и отличающаяся от упомянутых моделей тем, что процесс процентной ставки имеет нижнюю отражающую границу, которая может быть установлена на любом заданном уровне, обеспечивающем выполнение условия ее недостижимости. Кроме того, перечисленные выше модели получаются из нее как частные случаи.

Ключевые слова: процесс краткосрочных процентных ставок, двухфакторная модель, нижняя отражающая граница, условные и безусловные моменты.

АНАЛИЗ ИЗВЕСТНЫХ ДВУХФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Во многих литературных источниках отмечается недостаточная гибкость в описании реальных рыночных процессов процентных ставок однофакторными моделями. В связи с этим в статье Кокса, Ингерсолла и Росса (Cox, Ingersoll, Ross, 1985) была предложена не только широко известная однофакторная модель CIR, но и несколько ее обобщений. В частности (раздел 6), было предложено рассматривать вместо одной переменной состояния, которой являлась краткосрочная процентная ставка R, еще и вторую – ее экспоненциально сглаженное среднее L. Такая идея высказывалась и ранее Малкилом (Malkiel, 1966), который в своей дискретной модели применял, правда, скользящее среднее. В соответствии с этим двумерная модель CIR была определена (с точностью до обозначений) следующими уравнениями

$$dR(t) = k(L(t) - R(t))dt + \sigma\sqrt{R(t)}\,dW(t),$$

$$dL(t) = \beta(R(t) - L(t))\,dt. \qquad (1)$$

Особенностью этой модели является то, что описываемый двумерный процесс возбуждается только одним случайным винеровским процессом. Позднее Шью и Яо (Shiu, Yao, 1999) провели ее анализ и получили явный вид временной структуры для этой модели краткосрочной ставки.

Несколько более сложная двумерная модель была также предложена CIR (CIR, 1981) в виде

$$dR(t) = [k_1(\Theta - R(t)) + k_2(L(t) - R(t)]\,dt + \sigma\sqrt{R(t)}\,dW(t),$$

$$dL(t) = \beta(R(t) - L(t))\,dt \qquad (2)$$

и также проанализирована Шью и Яо (Shiu, Yao, 1999) с целью получения явного вида временной структуры доходности.

Рассмотрим свойства процессов краткосрочной процентной ставки, порождаемых этими двумерными моделями CIR.

Запишем уравнение (1) в матричной форме

$$dX(t) = A\,X(t)\,dt + B(t)\,dW(t), \tag{3}$$

где обозначено

$$X(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ L(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -k & k \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{R(t)} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

с начальными условиями $\{R(0) = R_0, L(0) = L_0\}$, т. е. $X(0) = X_0$. $W(t)$ – скалярный винеровский процесс.

Тогда дифференциальное уравнение (3) можно записать в интегральной форме следующим образом

$$X(t) = U(t)X_0 + \int_0^t U(t-s)B(s)dW(s), \tag{5}$$

где $U(t)$ – фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения $U'(t) = AU(t)$ с начальным условием $U(0) = I$, I – единичная матрица. Если собственные числа матрицы A различны, то $U(t)$ удобнее представить в виде $U(t) = CD(t)C^{-1}$, где C – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A, а $D(t)$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят величины $\exp(\lambda_i t)$, λ_i – собственные числа матрицы A. Для матрицы A, определяемой (4), $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -(k + \beta)$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\beta/k \end{pmatrix}, \quad D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(k+\beta)t} \end{pmatrix},$$

$$U(t) = \frac{1}{k+\beta}\begin{pmatrix} \beta + ke^{-(k+\beta)t} & k(1-e^{-(k+\beta)t}) \\ \beta(1-e^{-(k+\beta)t}) & k+\beta e^{-(k+\beta)t} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Поэтому представление (5) для уравнений (1) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{k+\beta}\begin{pmatrix} R_0(\beta + ke^{-(k+\beta)t}) + L_0 k(1-e^{-(k+\beta)t}) \\ R_0\beta(1-e^{-(k+\beta)t}) + L_0(k+\beta e^{-(k+\beta)t}) \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{\sigma}{k+\beta}\begin{pmatrix} \int_0^t (\beta + ke^{-(k+\beta)(t-s)})\sqrt{R(s)}dW(s) \\ \int_0^t \beta(1-e^{-(k+\beta)(t-s)})\sqrt{R(s)}dW(s) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Из представления (7) следует, что если в начальный момент значения процессов $\{R(0) = R_0, L(0) = L_0\}$ являются случайными величинами с одинаковым математическим ожиданием $E[R(0)] = E[L(0)] = \theta$, то в каждый момент времени $t > 0$ математические ожидания процессов $R(t)$ и $L(t)$ будут одинаковыми и равными θ, что и предполагалось в модели. Вместе с тем заметим, что если $\{R(0) = R_0, L(0) = L_0\}$ являются некоторыми фиксированными значениями процессов, то для того чтобы средние значения процессов $R(t)$ и $L(t)$, $t > 0$, будут со временем сходиться к θ только в том случае, если R_0 и L_0 будут принадлежать многообразию, задаваемому равенством $(\beta R_0 + kL_0)/(k+\beta) = \theta$.

Дисперсии и ковариация процессов $R(t)$ и $L(t)$ имеют вид

$$\mathrm{Var}[R(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2}\left[\beta^2 t + \frac{2\beta k}{k+\beta}(1-e^{-(k+\beta)t}) + \frac{k^2}{2(k+\beta)}(1-e^{-2(k+\beta)t})\right], \tag{8}$$

$$\mathrm{Var}[L(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2}\left[\beta^2 t - \frac{2\beta^2}{k+\beta}(1-e^{-(k+\beta)t}) + \frac{\beta^2}{2(k+\beta)}(1-e^{-2(k+\beta)t})\right], \tag{9}$$

$$\mathrm{Cov}[R(t), L(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2}\left[\beta^2 t + \beta\frac{k-\beta}{k+\beta}(1-e^{-(k+\beta)t}) + \frac{k\beta}{2(k+\beta)}(1-e^{-2(k+\beta)t})\right]. \tag{10}$$

Отсюда следует, что дисперсии процессов со временем возрастают, и стационарный режим модели (1) не существует. Ковариация процессов со временем также возрастает. При этом экспоненциальные слагаемые становятся малыми, и для достаточно больших t можно написать формулы (8) – (10) в более компактном виде

$$\mathrm{Var}[R(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2}\left[\beta^2 t + \frac{k(k+4\beta)}{2(k+\beta)} + O(e^{-(k+\beta)t})\right], \tag{11}$$

$$\mathrm{Var}[L(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2}\left[\beta^2 t - \frac{3\beta^2}{2(k+\beta)} + O(e^{-(k+\beta)t})\right], \tag{12}$$

$$\mathrm{Cov}[R(t), L(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2}\left[\beta^2 t + \frac{\beta(3k-\beta)}{2(k+\beta)} + O(e^{-(k+\beta)t})\right]. \tag{13}$$

Из этих формул видно, что коэффициент корреляции процессов $R(t)$ и $L(t)$ можно записать в форме

$$\rho(t) = \frac{Cov[R(t), L(t)]}{\sqrt{Var[R(t)]Var[L(t)]}} = 1 + O(t^{-1})$$

откуда следует, что со временем эти процессы становятся полностью коррелированными. Отсутствие стационарного режима в модели (1) является ее существенным недостатком.

Теперь обратимся к модели (2). Ее матричная форма модифицируется к виду

$$dX(t) = A\, X(t)dt + bdt + B(t)dW(t), \tag{14}$$

где

$$X(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ L(t) \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 \\ \beta & -\beta \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} k_1\theta \\ 0 \end{pmatrix},\quad B(t) = \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{R(t)} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В этом случае для любых положительных параметров k_1, k_2 и β собственные числа матрицы A будут различными и отрицательными. Это гарантирует существование стационарного режима в модели (2).

Поэтому фундаментальная матрица и для этой системы может быть представлена в виде $U(t) = CD(t)C^{-1}$. Обозначим для краткости собственные числа матрицы A через λ и μ, а также определим $\delta = \beta/(\lambda + \beta)$, $\gamma = \beta/(\mu + \beta)$. Тогда

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \delta & \gamma\end{pmatrix},\quad D(t)=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\mu t}\end{pmatrix},$$

$$U(t)=\frac{1}{\gamma-\delta}\begin{pmatrix}\gamma e^{\lambda t}-\delta e^{\mu t} & e^{\mu t}-e^{\lambda t})\\ \delta\gamma(e^{\lambda t}-e^{\mu t}) & \gamma e^{\mu t}-\delta e^{\lambda t}\end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Представление процесса (14) в стационарном режиме имеет следующий вид

$$X(t)=\int_0^\infty U(s)b\,ds+\int_0^\infty U(s)B(t-s)dW(t-s). \qquad (17)$$

Использование формул (15) и (17) позволяет найти стационарные математические ожидания, дисперсии и ковариацию процессов $R(t)$ и $L(t)$ для модели (2) в форме

$$E[R(t)]=E[L(t)]=\theta, \qquad (18)$$

$$\mathrm{Var}[R(t)]=\frac{\sigma^2\theta}{2k_1}\frac{\beta+k_1}{\beta+k_1+k_2}, \qquad (19)$$

$$\mathrm{Var}[L(t)]=\frac{\sigma^2\theta}{2k_1}\frac{\beta}{\beta+k_1+k_2}, \qquad (20)$$

$$\mathrm{Cov}[R(t),L(t)]=\frac{\sigma^2\theta}{2k_1}\frac{\beta}{\beta+k_1+k_2}. \qquad (21)$$

В частности, отсюда следует, что стационарный коэффициент корреляции для процессов $R(t)$ и $L(t)$ равен

$$\rho=\frac{Cov[R(t),L(t)]}{\sqrt{Var[R(t)]Var[L(t)]}}=\sqrt{\frac{\beta}{\beta+k_1}}. \qquad (22)$$

Особенностью моделей (1) и (2) является то, что только процесс процентной ставки $R(t)$ возбуждается винеровским процессом, а процесс локального среднего $L(t)$ определяется фильтрацией реализации процесса $R(t)$. С информационной точки зрения процесс $L(t)$ основан на «забывании» прежних значений процесса $R(t)$ с определенной скоростью, задаваемой параметром β. Таким образом, фактически вся информация, поставляемая процессом $L(t)$, уже содержится в процессе $R(t)$. В отличие от этого, можно рассматривать модели, в которых процесс локального среднего $L(t)$ определяется также инновациями, отличающимися от тех, которые определяют процесс $R(t)$. Иначе говоря, могут существовать различные (точнее, в той или иной мере независимые) стохастические механизмы, управляющие процессами $R(t)$ и $L(t)$. Тогда мы приходим к так называемым двухфакторным моделям процентной ставки.

Двухфакторная модель, возбуждаемая двумя случайными процессами, рассматривалась Морено (Moreno, 1996). Однако в модели Морено в качестве переменных состояния выбраны долгосрочное среднее $L(t)$ краткосрочной ставки $R(t)$ и спред между ними $S(t) = R(t) - L(t)$. Оба процесса $L(t)$ и $S(t)$ предполагались диффузионными и определялись независимо друг от друга по схеме модели Васичека (Vasiček, 1977), что существенно облегчило анализ.

В отличие от модели Морено здесь предлагается рассмотреть двухфакторную модель $\{R(t), L(t)\}$, отличающуюся не только тем, что оба процесса возбуждаются независимыми винеровскими процессами, а тем, что волатильности обоих процессов зависят от $R(t)$ по схеме CIR, но предполагается также наличие ненулевой нижней отражающей границы для процесса $R(t)$. В однофакторном случае наличие нижней отражающей границы для процесса $R(t)$ объединяет модели CIR и Васичека (см. Medvedev, Cox, 1996), которые получаются из этой модели как предельные случаи соответственно при нулевой отражающей границе и границе, удаленной на минус бесконечность. Свойства такой однофакторной модели подробно рассмотрены Илиевой (Ilieva, 2000). Проблема оценивания параметров и временная структура процентных ставок, вытекающая из предлагаемой двухфакторной модели, рассматривались Казанцевой (Казанцева, 2002).

ИССЛЕДУЕМАЯ ДВУХФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим двухфакторную модель безрисковой процентной ставки $R(t)$, которую представим в виде пары стохастических дифференциальных уравнений

$$dR(t) = k_1(L(t) - R(t))dt + \sigma_1\sqrt{R(t)-x}\,dW_1(t),$$

$$dL(t) = k_2(\Theta - L(t))dt + \sigma_2\sqrt{R(t)-x}\,dW_2(t). \tag{23}$$

Здесь $R(t)$ – процесс безрисковой процентной ставки; $L(t)$ – процесс ее локального (по времени) математического ожидания; Θ, k_1, k_2, σ_1, σ_2 – постоянные параметры модели; x – нижняя отражающая (недостижимая) граница процесса $R(t)$; $W_1(t)$ и $W_2(t)$ – стандартные независимые между собой винеровские процессы. Заметим, что поскольку случайный процесс $L(t)$ является процессом локального (по времени) математического ожидания, его изменения во времени более медленные, чем у процесса $R(t)$, поэтому для коэффициентов k_1 и k_2 можно предполагать выполнение неравенства $k_1 > k_2$.

Для упрощения аналитических выкладок удобнее уравнения (23) записать в несколько ином виде. Вместо процессов $R(t)$ и $L(t)$ введем их смещенные эквиваленты соотношениями: $r(t) = R(t) - x$, $l(t) = L(t) - x$. Тогда уравнения (23) примут вид

$$dr(t) = k_1(l(t) - r(t))dt + \sigma_1\sqrt{r(t)}\,dW_1(t),$$

$$dl(t) = k_2(\theta - l(t))dt + \sigma_2\sqrt{r(t)}\,dW_2(t), \tag{24}$$

где $\theta = \Theta - x$. Будем считать, что условия недостижимости нижней границы процессом $R(t)$ выполняются, тогда процесс $r(t)$ является процессом с положительными значениями. При некоторых дополнительных условиях на величину σ_2 процесс $l(t)$ будет также процессом с положительными значениями.

При условии, что в момент времени v процессы $r(t)$ и $l(t)$ принимали значения $r(v)$ и $l(v)$, их можно представить в следующей форме

$$r(t) = r(v)e^{-k_1(t-v)} + \theta(1-e^{-k_1(t-v)}) + \frac{k_1}{k_1-k_2}(l(v)-\theta)[e^{-k_2(t-v)} - e^{-k_1(t-v)}] +$$

$$+\sigma_1\int_v^t e^{-k_1(t-u)}\sqrt{r(u)}\,dw_1(u) +$$

$$+\frac{\sigma_2 k_1}{k_1-k_2}\int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}]\sqrt{r(u)}\,dw_2(u), \tag{25}$$

$$l(t) = l(v)e^{-k_2(t-v)} + \theta(1 - e^{-k_2(t-v)}) + \sigma_2 \int_v^t e^{-k_2(t-u)} \sqrt{r(u)}\, dw_2(u). \qquad (26)$$

Из соотношений (25) и (26) можно получить выражения для среднего значения и дисперсии процессов $r(t)$ и $l(t)$.

$$E[r(t) \mid r(v), l(v)] = \frac{\theta}{k_1 - k_2}[k_1(1 - e^{-k_2(t-v)}) - k_2(1 - e^{-k_1(t-v)})] +$$

$$+ r(v)e^{-k_1(t-v)} + l(v)\frac{k_1}{k_1 - k_2}(e^{-k_2(t-v)} - e^{-k_1(t-v)}), \qquad (27)$$

$$E[l(t) \mid l(v)] = \theta(1 - e^{-k_2(t-v)}) + l(v)e^{-k_2(t-v)}. \qquad (28)$$

Из выражений (27) и (28) видно, что при $r(v) > 0$ и $l(v) > 0$ условные остаются положительными для всех $t > 0$.

Условные дисперсии $D[r(t) \mid r(v), l(v)]$, $D[l(t) \mid r(v), l(v)]$ и кросс-ковариация $\mathrm{Cov}[r(t), l(t) \mid r(v), l(v)]$ вычисляются по формулам

$$D[r(t) \mid r(v), l(v)] = \sigma_1^2 \int_v^t e^{-2k_1(t-u)} E[r(u) \mid r(v), l(v)]\, du +$$

$$+ \frac{\sigma_2^2 k_1^2}{(k_1 - k_2)^2} \int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}]^2 E[r(u) \mid r(v), l(v)]\, du, \qquad (29)$$

$$D[l(t) \mid r(v), l(v)] = \sigma_2^2 \int_v^t e^{-2k_2(t-u)} E[r(u) \mid r(v), l(v)]\, du. \qquad (30)$$

$$\mathrm{Cov}[r(t), l(t) \mid r(v), l(v)] = \frac{\sigma_2^2 k_1}{k_1 - k_2} \int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}] e^{-k_2(t-u)} E[r(u) \mid r(v), l(v)]\, du. \quad (31)$$

Поскольку, явные формулы для дисперсий и кросс-ковариации громоздкие, приведем только их стационарные выражения (т. е. безусловные дисперсии и кросс-ковариацию), которые можно получить, переходя к пределу при $v \to -\infty$. В этом случае стационарные представления процессов $r(t)$ и $l(t)$ приобретают вид

$$r(t) = \theta + \sigma_1 \int_0^\infty e^{-k_1 u} \sqrt{r(t-u)}\, dw_1(t-u) +$$

$$+ \frac{\sigma_2 k_1}{k_1 - k_2} \int_0^\infty (e^{-k_2 u} - e^{-k_1 u}) \sqrt{r(t-u)}\, dw_2(t-u), \qquad (32)$$

$$l(t) = \theta + \sigma_2 \int_0^\infty e^{-k_2 u} \sqrt{r(t-u)}\, dw_2(t-u). \qquad (33)$$

Поэтому безусловные математические ожидания, дисперсии и ковариации процессов имеют вид

$$E[r(t)] = E[l(t)] = \theta; \qquad (34)$$

$$D_r \equiv D[r(t)] = \frac{\sigma_1^2\theta}{2k_1} + \frac{k_1}{k_1+k_2}\frac{\sigma_2^2\theta}{2k_2}, \quad D_l \equiv D[l(t)] = \frac{\sigma_2^2\theta}{2k_2}; \tag{35}$$

$$\mathrm{Cov}[r(t),\, r(t+\tau)] = \frac{\sigma_1^2\theta}{2k_1}\, e^{-k_1|\tau|} + D_l\, \frac{k_1}{k_1+k_2}\, \frac{k_1 e^{-k_2|\tau|} - k_2 e^{-k_1|\tau|}}{k_1-k_2}, \tag{36}$$

$$\mathrm{Cov}[l(t),\, l(t+\tau)] = \frac{\sigma_2^2\theta}{2k_2}\, e^{-k_2|\tau|} = D_l\, e^{-k_2|\tau|}. \tag{37}$$

$$\mathrm{Cov}[r(t),\, l(t+\tau)] = D_l\, \frac{k_1}{k_1+k_2}\, e^{-k_2\tau}, \quad \tau \geq 0. \tag{38}$$

$$\mathrm{Cov}[r(t+\tau),\, l(t)] = D_l\, \frac{k_1}{k_1+k_2}\, \frac{(k_1+k_2)e^{-k_2\tau} - 2k_2 e^{-k_1\tau}}{k_1-k_2}, \quad \tau \geq 0. \tag{39}$$

Уместно заметить, что в однофакторной модели краткосрочной процентной ставки условие недостижимости отражающей границы имеет вид $D_r < \theta^2$ (Feller, 1951). Можно ожидать, что это условие будет иметь место и в рассматриваемом случае. Кроме того, из формул (35) следует, что для того чтобы имело место неравенство $D_r > D_l$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство $(\sigma_2^2/\sigma_1^2) < [1 + (k_2/k_1)]$. Поэтому $D_r > D_l$ для всяких $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$.

При описании модели предпочтительнее пользоваться такими параметрами, которые имеют реальный эконометрический смысл. Реально предполагать, что процентная ставка $R(t)$ может наблюдаться или, в крайнем случае, оцениваться по другим наблюдениям. Процесс $L(t)$ ненаблюдаемый, но в качестве его оценки можно брать тренд процесса $R(t)$. После получения траектории процессов $R(t)$ и $L(t)$ достаточной продолжительности можно построить состоятельные оценки их стационарных математических ожиданий и дисперсий. Поэтому желательно, чтобы описание модели (23) содержало эти параметры. Это можно сделать, используя полученные выше соотношения (35), выразив через стационарные дисперсии волатильности уравнений (23).

$$\sigma_1\sqrt{R(t)-x} = \sqrt{2k_1\left(D_r - D_l\,\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)\frac{R(t)-x}{\Theta - x}},$$

$$\sigma_2\sqrt{R(t)-x} = \sqrt{2k_2 D_l\,\frac{R(t)-x}{\Theta - x}}. \tag{40}$$

В заключение рассмотрим проблему нахождения распределения вероятностей рассмотренных двухфакторных моделей.

Пусть многомерный диффузионный процесс, описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = \mu(t, x)dt + \sigma(t, x)dW(t), \quad t > s, \ x(s) = x_0, \tag{41}$$

с начальным условием $\lim\limits_{t \downarrow v} p(t, x|s, x_0) = \delta(x - x_0)$. Здесь $x(t) \in \mathrm{R}^m$ (для определенности m-вектор-столбец), дрейф $\mu(t, x)$ – m-вектор-столбец, волатильность $\sigma(t, x)$ – $m{\times}m$-матрица, $W(t)$ – m-вектор-столбец независимых стандартных винеровских процессов. В этом случае для плотности вероятности $p(t, x|s, x_0)$ при фиксированных s и x_0 можно записать так называемое прямое уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}[\mu_i(t,x)p]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}[b_{ij}(t,x)p], \qquad (42)$$

где b_{ij} обозначает соответствующий элемент матрицы $\sigma(t, x)\sigma^{\mathrm{T}}(t, x)$.

В нашем случае процессом $x(t)$ является двумерный процесс $(R(t)\ L(t))^{\mathrm{T}}$. Уравнение (42) для плотности вероятностей $p(t, r, l \mid s, r_0, l_0)$ модели (2) будет иметь вид

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial r}[((k_1+k_2)r-k_1\theta-k_2 l)p]+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[rp]+\beta\frac{\partial}{\partial l}[(l-\theta)p]. \qquad (43)$$

Для получения уравнения для модели (1) достаточно в (43) положить $k_1 = 0$, $k_2 = k$.

Уравнение (42) для плотности вероятностей $p(t, r, l \mid s, r_0, l_0)$ процесса (24) более сложное

$$\frac{\partial p}{\partial t}=k_1\frac{\partial}{\partial r}[(r-l)p]+\frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[rp]+k_2\frac{\partial}{\partial l}[(l-\theta)p]+\frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial l^2}[rp]. \qquad (44)$$

Оба уравнения имеют одинаковое начальное условие:

$$\lim_{t\downarrow s} p(t, r, l \mid s, r_0, l_0)=\delta(r-r_0)\delta(l-l_0).$$

К сожалению, решение уравнений (43) и (44) в аналитическом виде является трудной проблемой и это будет уже предметом следующей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cox J., Ingersoll J., Ross S. A.* A Re-Examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates // Journ. of Finance. 1981. Vol. 34. P. 769–799.
2. *Cox J., Ingersoll J., Ross S. A.* A Theory of the Term Structure of Interest Rate // Econometrica. 1985. Vol. 53. № 2. P. 385–407.
3. *Feller W.* Two singular diffusion problems // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. № 1. P. 173–182.
4. *Ilieva N. G.* The Comparative Analysis of the Term Structure Models of the Affine Yield Class // Proceedings of 10-th Intern. AFIR Symposium. Tromso. 2000. P. 367–393.
5. *Казанцева О. Г.* Оценки параметров двухфакторной модели процентных ставок // Математические методы в финансах и эконометрика. Материалы конф. Мн., 2002. С. 46–51.
6. *Malkiel B.* The Term Structure of Interest Rates: Expectations and Behavior Patterns. Princeton University. Princeton. 1996.
7. *Medvedev G. A., Cox S. H.* The Market Price of Risk for Affine Interest Rate Term Structures // Proceedings of 6-th Intern. AFIR Symposium. Nuremberg. 1996. P. 913–924.
8. *Moreno M.* A Two-Mean Reverting-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates. Working paper. Pompeu Fabra University. 1996.
9. *Shiu E. S. W., Yao Y.* Closed-Form Formulas for Generalized Cox, Ingersoll and Ross Models // Proceedings of 9-th Intern. AFIR Symposium. Tokio, 1999. P. 407–418.