СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ И КОРРЕЛЯЦИЯ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Г. А. Медведев, М. А. Святобатько

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
MedvedevGA@bsu.by

На базе результатов статьи [1] детально рассматриваются свойства корреляционных функций марковских цепей и их связь с собственными числами матрицы вероятностей переходов из состояния в состояние.

Ключевые слова: марковская цепь, собственное число матрицы, корреляционная функция.

Марковская цепь является стохастическим процессом, который может принимать значения из конечного или счетного множества вещественных чисел, называемого пространством состояний. Будем считать, что пространство состояний рассматриваемой цепи Маркова является конечным множеством, содержащим N различных элементов с номерами j, $1 \le j \le N$. Последовательность состояний марковской цепи образуется следующим образом.

Пусть марковская цепь находится в j-м состоянии в момент времени t, тогда она может находиться в k-м состоянии в момент времени $(t + 1)$ с вероятностью Q_{jk} независимо от того, в каких состояниях Марковская цепь была до момента времени t.

Матрица $Q = \| Q_{jk} \|$ называется матрицей вероятностей переходов. Она имеет следующие свойства

$$\forall 1 \le j, k \le N \qquad Q_{jk} \ge 0, \ \sum_{k=1}^{N} Q_{jk} = 1.$$

Матрицы с такими свойствами называются также стохастическими матрицами.

Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ характеристического уравнения $\det| Q - \lambda I | = 0$ матрицы Q являются собственными числами этой матрицы. I – единичная матрица. Собственный вектор x_i матрицы Q является решением уравнения $Qx_i = \lambda_i x_i$. Вектора $x_1, x_2, \ldots, x_N$ являются линейно независимыми векторами.

Максимальным (по абсолютной величине) среди собственных чисел стохастических матриц является корень $\lambda_1 = 1$. Так что $| \lambda_i | < 1$ для $\forall\ i \ge 2$.

Матрица вероятностей переходов может быть представлена в виде

$$Q = X\Lambda X^{-1}, \tag{1}$$

Λ – диагональная матрица с собственными числами по главной диагонали и X – матрица, составленная из собственных векторов матрицы Q. Матрица X – невырожденная.

Определим матрицу $Q(t) = Q^{\,t}$. $Q(t)$ – это матрица вероятностей переходов за t единиц дискретного времени. Эта матрица является также стохастической и $Q(1) \equiv Q$. Тогда возможно представление

$$Q(t) = X\Lambda^t X^{-1}. \tag{2}$$

Чтобы получить компактные формулы введем следующие векторно-матричные обозначения:

$D = \mathrm{Diag}(Y_j,\ 1 \le j \le N)$ – диагональная матрица, у которой на j-м месте главной диагонали стоит значение, ассоциированное с j-м состоянием марковской цепи;

J – вектор-столбец, j-я компонента которого равна значению процесса, ассоциированному с j-м состоянием марковской цепи, $1 \le j \le N$;

P – вектор-строка, компоненты которой являются стационарными вероятностями P_j состояний j марковской цепи, $1 \le j \le N$;

$Q = \| Q_{jk} \|$ – матрица вероятностей переходов;

1 – вектор-столбец соответствующего размера, составленный из единиц.

В этих обозначениях для рассматриваемой цепи Маркова выполняются следующие соотношения

$$Q\mathbf{1} = \mathbf{1}, \tag{3}$$

$$PQ = P. \tag{4}$$

Математическое ожидание марковской цепи:

$$\mu = PJ. \tag{5}$$

Дисперсия марковской цепи:

$$d^2 = PDJ - \mu^2. \tag{6}$$

Тогда функция корреляции марковской цепи может быть записана в виде

$$r(t) = (PDQ^tJ - \mu^2) / d^2. \tag{7}$$

Использование представления (1) позволяет представить (7) как

$$r(t) = (PD\,X\Lambda^t X^{-1}J - \mu^2) / d^2. \tag{8}$$

Имеют место предельные соотношения

$$r(t) \to 1 \text{ когда } t \to 0,\ r(t) \to 0 \text{ когда } t \to \infty. \tag{9}$$

Поскольку $\lambda_1 = 1$, то

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_3 \end{pmatrix} = \tilde{I}_0 + \tilde{\Lambda},$$

где

$$\tilde{I}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

Из этого представления и соотношений (8) и (9) следует, что

$$PD\,X X^{-1}J = \mu^2 + d^2, \tag{10}$$

$$PD\,X\,\tilde{I}_0 X^{-1}J = \mu^2, \tag{11}$$

$$PD\,X\,\tilde{I}_1 X^{-1}J = d^2, \tag{12}$$

$$r(t) = PD\,X\,\tilde{\Lambda}^t X^{-1}J / d^2. \tag{13}$$

Здесь $\tilde{I}_1$ является $N \times N$ матрицей с элементами: $(\tilde{I}_1)_{ii} = 1$, $2 \le i \le N$, а другие элементы равны нулю.

Из равенств (10)–(13) следует, что математическое ожидание марковской цепи определяет только собственное число $\lambda_1 = 1$, в то время как дисперсию и корреляционную функцию определяют только собственные числа λ_i, $i \ge 2$, $|\lambda_i| < 1$.

Теорема Дуба: Стационарный стохастический процесс с непрерывным временем является марковским процессом в широком смысле, если и только если его корреляционная функция является решением функционального уравнения $r(t + s) = r(t)r(s)$.

В скалярном случае это функциональное уравнение имеет единственное решение: $r(t) = \exp(-\alpha\, t)$, где $\alpha > 0$ является параметром масштаба времени. Это значит, что для непрерывного времени корреляционная функция стационарного стохастического процесса Маркова является положительной функцией монотонно уменьшающейся от единицы до нуля.

Стационарный марковский процесс с дискретным временем с конечным или счетным числом возможных значений является марковской цепью с матрицей вероятностей переходов Q и не всегда принадлежит к классу марковских процессов в широком смысле. Поэтому в случае дискретного времени может оказаться, что корреляционная функция принимает отрицательные значения и не является монотонной. Приведем примеры вычисления корреляционных матриц, подтверждающих это. Рассмотрим простейший пример.

Пример 1.

$$N = 2.\quad Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},\quad q < 1,\ p < 1.$$

$$J = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},\quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & p \\ \sqrt{1/2} & -q \end{pmatrix},\quad X^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{(p+q)} \begin{pmatrix} q & p \\ \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \end{pmatrix},$$

$$\mu = \frac{qY_1 + pY_2}{q+p},\quad d^2 = \frac{qp(Y_1 - Y_2)^2}{(q+p)^2},\quad r(t) = (1-p-q)^t.$$

Как видно, уже в этом случае корреляционная функция будет положительной и экспоненциально убывающей только в частном случае $q + p < 1$ (тогда $r(t) = \exp\{-\alpha t\}$, $\alpha = -\ln(1 - q - p) > 0$). В противном случае она, хотя и убывает по абсолютной величине, но имеет немонотонный колебательный (около нуля) характер.

Пример 2. Рассмотрим симметрическую матрицу вероятностей переходов.

$$N = 3.\quad Q = \begin{pmatrix} 1-p-q & q & p \\ q & 1-2q & q \\ p & q & 1-p-q \end{pmatrix},\quad q < ½,\ q + p < 1.$$

$$J = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix},\quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2p-q & 0 \\ 0 & 0 & 1-3q \end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}\sqrt{1/3} & \sqrt{1/2} & \sqrt{1/6}\\ \sqrt{1/3} & 0 & -\sqrt{2/3}\\ \sqrt{1/3} & -\sqrt{1/2} & \sqrt{1/6}\end{pmatrix},\quad X^{-1}=X^{\mathrm{T}}.$$

$$r(t)=\frac{3(Y_3-Y_1)^2(1-2p-q)^t+(Y_3-2Y_2+Y_1)^2(1-3q)^t}{3(Y_3-Y_1)^2+(Y_3-2Y_2+Y_1)^2}.$$

Для такой матрицы Q получается равномерное распределение стационарных вероятностей состояний: $P=(1/3\ 1/3\ 1/3)$. Собственные векторы матрицы Q не зависят явно от вероятностей переходов q, p. Для равномерной шкалы состояний марковской цепи ($Y_k=Y_0+k\Delta$, $k=1, 2, 3$) корреляционная функция имеет простой вид $r(t)=(1-2p-q)^t$. В этом случае при $2p+q>1$ корреляционная функция $r(t)$ не является монотонной.

Рассмотрим теперь примеры симметрических якобиевых матриц Q переходных вероятностей стационарных марковских цепей, т. е. таких, у которых вероятности переходов $Q_{ij}=0$ для всех $|i-j|>1$. Это означает, что либо марковская цепь остается в прежнем состоянии, либо происходит переход только в одно из соседних состояний и вероятности q этих переходов одинаковы для всех состояний.

Нетрудно показать, что для таких матриц всегда получается равномерное стационарное распределение вероятностей состояний.

Собственные числа таких матриц линейно зависят от вероятностей q, а собственные векторы матрицы Q от q явно не зависят.

Если упорядочить собственные числа по убыванию, то оказывается, что для равномерной шкалы состояний марковской цепи ($Y_k=Y_0+k\Delta$, $k=1, 2, 3 \ldots$) корреляционная функция определяется только собственными числами с четными номерами.

Приведем несколько примеров.

Пример 3.

$$N=4.\quad Q=\begin{pmatrix}1-q & q & 0 & 0\\ q & 1-2q & q & 0\\ 0 & q & 1-2q & q\\ 0 & 0 & q & 1-q\end{pmatrix},\quad q<½.$$

$$J=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\\Y_4\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-q(2-\sqrt{2}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-2q & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-q(2+\sqrt{2})\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}1/2 & X_2 & 1/2 & X_4\\ 1/2 & (\sqrt{2}-1)X_2 & -1/2 & -(1+\sqrt{2})X_4\\ 1/2 & (1-\sqrt{2})X_2 & -1/2 & (1+\sqrt{2})X_4\\ 1/2 & -X_2 & 1/2 & X_4\end{pmatrix},\quad X^{-1}=X^{\mathrm{T}},$$

$$X_2=\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}},\quad X_4=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

$$d^2 r(t) = [(Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 - (Y_3 - Y_2)\sqrt{2})^2(2+\sqrt{2})\lambda_2^t + 2(Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4)^2\lambda_3^t +$$

$$+ (Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 + (Y_3 - Y_2)\sqrt{2})^2(2-\sqrt{2})\lambda_4^t]/8.$$

Для равномерной шкалы состояний марковской цепи ($Y_k = Y_0 + k\Delta$, $k = 1, 2, 3, 4$) коэффициент при λ_3^t становится равным нулю, и выражение для корреляционной функции $r(t)$ упрощается к следующему (в этом случае дисперсия $d^2 = 5\Delta^2$)

$$r(t) = [(10+7\sqrt{2})(1-q(2-\sqrt{2}))^t + (10-7\sqrt{2})(1-q(2+\sqrt{2}))^t]/20.$$

Пример 4.

$$N = 5. \quad Q = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 & 0 \\ q & 1-2q & q & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-2q & q & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-2q & q \\ 0 & 0 & 0 & q & 1-q \end{pmatrix}, \quad q < ½.$$

$$J = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q(3-\sqrt{5})/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-q(5-\sqrt{5})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q(3+\sqrt{5})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q(5+\sqrt{5})/2 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{1/5} & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ \sqrt{1/5} & (\sqrt{5}-1)X_2/2 & (\sqrt{5}-3)X_3/2 & -(1+\sqrt{5})X_4/2 & -(3+\sqrt{5})X_5/2 \\ \sqrt{1/5} & 0 & (1-\sqrt{5})X_3 & 0 & (1+\sqrt{5})X_5 \\ \sqrt{1/5} & (1-\sqrt{5})X_2/2 & (\sqrt{5}-3)X_3/2 & (1+\sqrt{5})X_2/2 & -(3+\sqrt{5})X_5/2 \\ \sqrt{1/5} & -X_2 & X_3 & -X_4 & X_5 \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = X^{\mathrm{T}},$$

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}, \quad X_3 = \frac{1}{\sqrt{15-3\sqrt{5}}}, \quad X_4 = \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}, \quad X_5 = \frac{1}{\sqrt{15+3\sqrt{5}}}.$$

$$d^2 r(t) = (2Y_1 - Y_2 + Y_4 - 2Y_5 - (Y_4 - Y_2)\sqrt{5})^2 \frac{\lambda_2^t}{4(5-\sqrt{5})} +$$

$$+ (2Y_1 - 3Y_2 + 2Y_3 - 3Y_4 + 2Y_5 + (Y_2 - 2Y_3 + Y_4)\ \sqrt{5})^2 \frac{\lambda_3^t}{12(5-\sqrt{5})} +$$

$$+ (2Y_1 - Y_2 + Y_4 - 2Y_5 + (Y_4 - Y_2)\sqrt{5})^2 \frac{\lambda_4^t}{4(5+\sqrt{5})} +$$

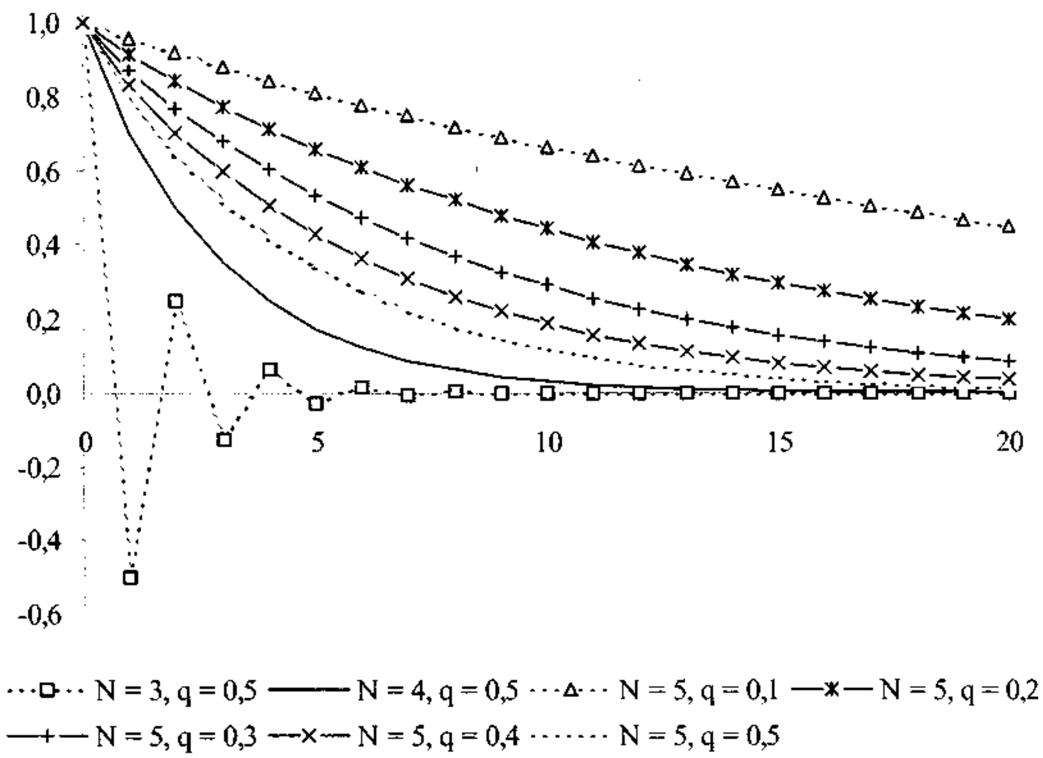
$$+ (2Y_1 - 3Y_2 + 2Y_3 - 3Y_4 + 2Y_5 - (Y_2 - 2Y_3 + Y_4)\ \sqrt{5})^2 \frac{\lambda_5^t}{12(5+\sqrt{5})}.$$

Для равномерной шкалы состояний марковской цепи ($Y_k = Y_0 + k\Delta$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$) коэффициенты при λ_3^t и λ_5^t становятся равными нулю, и выражение для корреляционной функции $r(t)$ упрощается к следующему (в этом случае дисперсия $d^2 = 17\Delta^2$):

$$r(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{14}\sqrt{5}\right)\left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}q\right)^t + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{14}\sqrt{5}\right)\left(1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}q\right)^t.$$

Из приведенных примеров видно, что минимальные собственные числа при $q = ½$ являются отрицательными (см. таблицу), что может приводить к тому, что корреляционные функции будут иметь колебательный характер. На рисунке это иллюстрируется для некоторых значений параметров рассмотренных примеров для равномерной шкалы состояний марковского процесса.

Пример	2	3	4
Минимальное собственное число	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$



Поведение корреляционных функций для некоторых значений параметров

ЛИТЕРАТУРА

1. *Medvedev G.* Multiply connected Markov chains as models of time series of financial data. Proc. International conference on system and signal in intelligent technologies. Minsk, 1998. P. 221–227.