ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИЙ

В. Г. Новохрост

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
veroni@tut.by

Рассматриваются дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Показано, что решения полученные при интерпретации уравнений с помощью дифференциальных включений и при рассмотрении уравнений в алгебре мнемофункций совпадают.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с разрывной правой частью, дифференциальное включение, конечно-разностное уравнение с осреднением.

Современная теория стохастических дифференциальных уравнений базируется на понятиях стохастических интегралов Ито, Стратоновича и их обобщениях (стохастический θ-интеграл, стохастический интеграл Огавы и др.) [1–3]. Однако многие авторы исследовали решения стохастических дифференциальных уравнений естественным с позиций неслучайного анализа образом на аппроксимационном уровне [4–6]. Как правило, решения стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича аппроксимируются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, а Ито – решениями конечно-разностных уравнений.

В работах Лазаковича Н. В. и его учеников [7, 8] был предложен единый подход к аппроксимации уравнений содержащих как интеграл Ито, так и интеграл Стратоновича – рассмотрение стохастических дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных случайных процессов. Согласно этому подходу решения обоих типов стохастических дифференциальных уравнений могут быть аппроксимированы решениями уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. На уровне представителей эти уравнения имеют вид конечно-разностных уравнений с осреднением.

Следует отметить, что данный единый подход был успешно применен для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих произведение обобщенных функций. Несмотря на то, что теория обобщенных функций служит достаточно мощным орудием для решения широкого круга задач, существует проблема корректного определения произведения двух обобщенных функций. В связи с этим было предложено множество различных трактовок решений нелинейных уравнений, причем решения, полученные с помощью разных методов, вообще говоря, не совпадают [9–11]. В рамках рассмотрения дифференциальных уравнений в алгебре мнемофункций, построенной аналогично алгебре обобщенных случайных процессов из [7, 8], различные решения получаются в зависимости от точности приближения и от аппроксимационного шага [12].

Данная работа посвящена применению этого единого подхода к исследованию еще одного класса уравнений, некорректного с точки зрения классической теории дифференциальных уравнений.

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0, a] \subset \boldsymbol{R}$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t)), \\ X(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

где f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ – некоторая ограниченная функция, в том числе она может быть и разрывной.

В книге [9, гл. 4.] предлагается под решением задачи (1) понимать решение дифференциального включения

$$\begin{cases} \dot{X}(t) \in F(X(t)), \\ X(0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

где F – многозначная функция, которая получается путем некоторого доопределения функции f. Вообще говоря, существует несколько способов доопределения функции f до многозначной функции F. Мы будем рассматривать так называемый метод простейшего выпуклого доопределения, то есть $F(x)$ есть наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные точки $f(x^*)$, $x^* \to x$, $x^* \neq x$. Таким образом, для ограниченной функции f получаем F: $\boldsymbol{R} \to E(\boldsymbol{R})$, где $E(\boldsymbol{R})$ – множество ограниченных замкнутых выпуклых подмножеств из $\boldsymbol{R}$.

Там же было показано, что если f имеет множество точек разрыва меры нуль, ограничена и удовлетворяет неравенству

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \tag{3}$$

при почти всех x, y, таких, что $|x - y| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то решение дифференциального включения (2) существует и единственно.

В алгебре мнемофункций задаче (1) можно поставить в соответствие уравнение в дифференциалах, которое на уровне представителей имеет вид:

$$\begin{cases} X_n(t + h_n) - X_n(t) = f_n(X_n(t))h_n, \\ X_n(t)\big|_{[0, h_n)} = X_{n0}(t), \ t \in T. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $f_n(t) = (f * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} f(t + s)\rho_n(s)ds$, где $\rho_n(t)$ – последовательность «шапочек», такая что $\rho_n(t) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, $\rho_n(t) \geq 0$, $\operatorname{supp} \rho_n \subset [0, 1/n]$, $\int_0^{1/n} \rho_n(t)dt = 1$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0, h_n)$, $m_t \in \boldsymbol{N}$. Обозначим $t_k = \tau_t + kh_n$. Несложно показать, что решение системы (4) можно записать в виде:

$$X_n(t) = X_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t - 1} f_n(X_n(t_k))\, h_n \tag{5}$$

Связь между решениями задач (2) и (4) показывает следующая.

Теорема. Пусть функция f ограничена, имеет конечное число точек разрыва и удовлетворяет неравенству (3) при почти всех x, y, таких, что $|x - y| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ для всех $t \in T$

$$|X(t) - X_n(t)| \to 0,$$

где $X(t)$ и $X_n(t)$ – решения задач (2) и (4) соответственно, если для любого $t \in T$ выполняется $|X_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$.

Доказательство. Построим последовательность $\widetilde{X}_n(t)$ следующим образом $\widetilde{X}_n(t_0) = x_0$, $\widetilde{X}_n(t_{k+1}) = \widetilde{X}_n(t_k) + \widetilde{f}_n(\widetilde{X}_n(t_k))h_n$ [см. 9, гл. 4].

$$\widetilde{f}_n(t) = \begin{cases} f(t), & t \in C(f) \\ f_n(t), & t \notin C(f). \end{cases}$$

Здесь $C(f)$ – множество точек непрерывности функции f.

Отметим, что $\widetilde{f}_n(t) \in F(t)$.

Можно показать [см. 9, гл. 4], что $|X(t) - \widetilde{X}_n(t)| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $t \in T$, $X(t)$ – решение задачи (2).

Далее рассмотрим

$$\left|X_n(t) - X(t)\right| \le \left|X_n(t) - \widetilde{X}_n(t)\right| + \left|\widetilde{X}_n(t) - X(t)\right|.$$

Используя представление (5) и вид последовательности $\widetilde{X}_n(t)$ получаем

$$\left|X_n(t) - \widetilde{X}_n(t)\right| = \left|X_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t - 1} f_n(X_n(t_k))h_n - x_0 - \sum_{k=0}^{m_t - 1} \widetilde{f}_n(\widetilde{X}_n(t_k))h_n\right| \le$$

$$\le \left|X_{n0}(\tau_t) - x_0\right| + \left|\sum_{k=0}^{m_t - 1}\left[f_n(X_n(t_k)) - \widetilde{f}_n(\widetilde{X}_n(t_k))\right]h_n\right| \le \left|X_{n0}(\tau_t) - x_0\right| +$$

$$+ \left|\sum_{k:\widetilde{X}_n(t_k) \in C(f)}\left[f_n(X_n(t_k)) - f(\widetilde{X}_n(t_k))\right]h_n + \sum_{k:\widetilde{X}_n(t_k) \notin C(f)}\left[f_n(X_n(t_k)) - f_n(\widetilde{X}_n(t_k))\right]h_n\right| \le$$

$$\le \left|X_{n0}(\tau_t) - x_0\right| + \sum_{k=0}^{m_t - 1}\left|f_n(X_n(t_k)) - f_n(\widetilde{X}_n(t_k))\right| h_n +$$

$$+ \left|\sum_{k:\widetilde{X}_n(t_k) \in C(f)}\left[f_n(\widetilde{X}_n(t_k)) - f(\widetilde{X}_n(t_k))\right]h_n\right| = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t).$$

Рассмотрим $I_2(t)$. Если между $X_n(t_k)$ и $X_n(t_{k+1})$ лежат лишь точки разрыва f, в которых f не меняет знак, или же данные интервалы не содержат точек разрыва f, то, применяя неравенство (3) получим

$$I_2(t) = \left|\sum_{k:\widetilde{X}_n(t_k) \in C(f)}\left[f_n(\widetilde{X}_n(t_k)) - f(\widetilde{X}_n(t_k))\right]h_n\right| \le C\sum_{k=0}^{m_t - 1}\left|X_n(t_k) - \widetilde{X}_n(t_k)\right|h_n + 2mMh_n,$$

где m – число точек разрыва, $M = \max|f(x)|$, $x \in T$.

Если же между $X_n(t_k)$ и $X_n(t_{k+1})$ лежат точки разрыва f, в которых f меняет знак, то

$$I_2(t) = \left|\sum_{k:\widetilde{X}_n(t_k) \in C(f)}\left[f_n(\widetilde{X}_n(t_k)) - f(\widetilde{X}_n(t_k))\right]h_n\right| \le 2Ch_n.$$

В итоге получаем

$$I_2(t) \le C \sum_{k=0}^{m_t-1} \left|X_n(t_k) - \widetilde{X}_n(t_k)\right| h_n + 2mMh_n + 2Ch_n.$$

Используя вид f_n, получим следующую оценку:

$$I_3(t) \le \frac{C}{n} \sum_{k:\widetilde{X}_n(t_k) \in C(f)} h_n \le \frac{aC}{n}.$$

Таким образом,

$$\left|X_n(t) - \widetilde{X}_n(t)\right| \le \left|X_{n0}(\tau_t) - x_0\right| + C \sum_{k=0}^{m_t-1} \left|\left[X_n(t_k) - \widetilde{X}_n(t_k)\right] h_n\right| + \frac{aC}{n} + 2mMh_n + 2Ch_n.$$

Применяя лемму [12] к данному неравенству, получаем почти всюду по t

$$\left|X_n(t) - \widetilde{X}_n(t)\right| \le \left(\left|X_{n0}(\tau_t) - x_0\right| + 2Ch_n + 2mMh_n + \frac{aC}{n} \right) e^{aC}.$$

Имеем

$$\left|X_n(t) - X(t)\right| \le \left(\left|X_{n0}(\tau_t) - x_0\right| + \frac{aC}{n} \right) e^{aC} + \left|\widetilde{X}_n(t) - X(t)\right|.$$

Устремляя $n \to \infty$ приходим к доказательству теоремы.

Замечание. При рассмотрении данного класса уравнений в алгебре мнемофункций, можно получать и другие решения, отличные от решений дифференциальных включений. Например, если рассматривать знакопеременные последовательности «шапочек» $\rho_n(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ito K.* Stochastic integral // Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1944. Vol. 29. P. 519–524.

2. *Стратонович Р. Л.* Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений // Вестн. МГУ. 1964. Т. 1. С. 3–12.

3. *Ogawa B. S.* On the Rieman defenition of stochastic integral. I. II. // Proc. Japan. Acad. 1970. № 21(46). P. 153–157.

4. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986. 448 с.

5. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 630 с.

6. *Wong E., Zakai M.* On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals // Ann. Math. Statist. 1965. Vol. 36. № 5. P.519–524.

7. *Лазакович Н. В., Сташуленок С. П., Стемковская Т. В.* Ассоциированные решения уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайныхх процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43. № 2. С. 272–293.

8. *Лазакович Н. В., Яблонский О. Л.* О приближении решений одного класса стохастических уравнений // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. № 1. С. 87–102.

9. *Филиппов А. В.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М. 1985.

10. *Завалищин С. Т.* Импульсные процессы: модели и приложения. М., 1991.

11. *Kurzweil J.* // Generalized ordinary differential equations // Czech. Math. J. 1985. Vol. 8. № 3. P. 360–388.

12. *Новохрост В. Г.* Об аппроксимации решений дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2003. № 3. С.62–66.