4. Работнов Ю. И. *Элементы наследственной механики твердых тел.* М.: Наука.− 1977. − 384 с.
5. Березин В. Л., Харитонова К. Ю. *Применение метода математического микроскопа при решении трансцендентных уравнений* // Проблемы точной механики и управления: Сб. науч. тр. − Саратов.− 2004. – 119 − 122с.

КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНАХ В СЛУЧАЕ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ТОРЦЕ

Ардазишвили Р. В. [*] **, Вильде М. В.** [†]
[*] Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, Астраханская 83
ardazishvili.roman@yandex.ru, mv_wilde@mail.ru

Введение. Кромочными волнами в [1] названы поверхностные волны, распространяющиеся вдоль свободной кромки полубесконечной пластины. До последнего времени эти волны, как правило, изучались на основе тех или иных двумерных теорий пластин. Для пластины, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, кромочная волна представляет собой классическую волну Рэлея [2] с заменой скорости распространения волн расширения на соответствующую скорость в пластинах. Кромочная волна при изгибных колебаниях пластины была впервые рассмотрена в [3], где для описания колебаний пластины применялась теория изгиба пластин Кирхгофа. Существование и единственность изгибной кромочной волны в анизотропных тонких пластинах изучалось в [4]. Собственные колебания оболочек, связанные с кромочными волнами, рассмотрены в работах [5, 6].

Двумерные теории пластин описывают только первую, или фундаментальную, кромочную волну в длинноволновом диапазоне. Если применить для описания колебаний пластины трехмерную теорию упругости, то окажется, что кроме этой волны существуют другие кромочные волны, которые можно назвать кромочными волнами высшего порядка. До последнего времени такие волны были практически не изучены. В работе [7] получено простое аналитическое решение для кромочных волн высшего порядка в случае перекрестных граничных условий на лицевых поверхностях пластины. В работах [8,9] рассмотрены кромочные волны в пластине со свободными либо жестко защемленными лицевыми поверхностями для случая симметричных колебаний пластины. В данной работе изучена возможность существования кромочных волн в пластинах в случае смешанных граничных условий на торце. На первом этапе был рассмотрен вопрос о существовании трехмерной поверхностной волны в полупространстве в случае смешанных граничных условий на поверхности. Решение этой задачи стало основой для изучения кромочных волн в пластинах с различными условиями закрепления на лицевых сторонах.

Трехмерная поверхностная волна в полупространстве в случае смешанных граничных условий на поверхности. Рассмотрение различных смешанных граничных условий показало, что трехмерная поверхностная волна существует только в одном случае – когда на поверхности полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений. Дисперсионное уравнение в данном случае имеет вид

$$\left(2-c^2\right)\left(2\sin^2(\alpha)-c^2\right)+c^2\cos^2(\alpha)-4r_1r_2\sin^2(\alpha)=0. \qquad (1)$$

В формуле (1) c – скорость поверхностной волны, $r_1=\sqrt{1-\kappa^2c^2}$, $r_2=\sqrt{1-c^2}$, $\kappa=\sqrt{1-2\nu/2(1-\nu)}$, ν – коэффициент Пуассана, α – угол между направлением распространения волны и направлением запрещенного перемещения. Исследование показало, что скорость волны изменяется от скорости классической волны Рэлея (распространение перпендикулярно запрещенному перемещению) до скорости волны сдвига (распространение параллельно запрещенному перемещению, в предельном случае волна не существует). Результаты, полученные для полупространства, можно использовать для анализа возможности существования кромочных волн в пластинах со смешанными граничными условиями на торце. Данная задача рассматривалась другим методом в работе [10].

Кромочные волны в случае смешанных граничных условий на торце и перекрестных граничных условий на лицевых поверхностях. Используя решение для полупространства, нетрудно показать, что в этом случае существует бесконечная серия кромочных волн высшего порядка. Получены явные формулы для определения фазовых скоростей таких волн.

Кромочные волны в пластинах в случае свободных либо жестко защемленных лицевых поверхностей и смешанных граничных условий на торце. В этом случае задача решалась численно методом разложения по модам. Показано, что в случае симметричных колебаний пластины существует фундаментальная кромочная волна и построены дисперсионные кривые для нее при различных значениях коэффициента Пуассона. Отмечается, что поведение дисперсионной кривой фундаментальной кромочной волны в случае смешанных граничных условий на торце качественно отличается от поведения аналогичной кривой в случае граничных условий свободного края. С ростом волнового числа фазовая скорость этой волны стремится не к скорости угловой волны, а к некоторой другой величине, не совпадающей также со скоростью классической волны Рэлея. Кроме фундаментальной кромочной волны, в рассматриваемых пластинах существуют и кромочные волны высшего порядка. Для них получены асимптотики при стремлении волнового числа к бесконечности. Показано, что в коротковолновом пределе фазовые скорости кромочных волн высшего порядка стремятся к скорости волны Рэлея. Также показано, что в случае свободных лицевых поверхностей коэффициент затухания всех кромочных волн высшего порядка стремится к нулю с уменьшением длины волны, а фазовые скорости в коротковолновом пределе выходят на скорость волны Рэлея. В пластине с жестко закрепленными лицевыми поверхностями фундаментальные кромочные волны отсутствуют, но существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. В коротковолновом пределе их фазовые скорости выходят на скорость волны Рэлея. При каждом фиксированном конечном значении волнового числа существует конечное число незатухающих волн и бесконечное число затухающих. Представлены численные результаты для первых четырех кромочных волн высшего порядка в широком частотном диапазоне для различных случаев (симметричные, антисимметричные колебания, жестко закрепленные либо свободные лицевые поверхности.)

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-01-00545-а).

Литература

1. Белубекян М. В. *Поверхностные волны в упругих средах* // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Институт механики НАН Армении, Ереван. – 1997. – С. 79 – 96.
2. Rayleigh J. *On waves propagated along the surface of an elastic solid* // Proc. Lond. Math. Soc. – 1885. – Vol. 17, No. 253. – P. 4 – 11.
3. Коненков Ю. К. *Об изгибной волне «рэлеевского» типа* // Акуст. журн. – 1960. – Т. 6. – Вып.1. – С. 124 – 126.
4. Fu Y. B. *Existence and uniqueness of edge waves in a generally anisotropic elastic plate*. // Q. Jl. Mech. Appl. Math. – 2003. – V.56. – P. 605 – 616.
5. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. *Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell* // J. Acoust. Soc. Am. – 2000. – Vol. 107. – № 3. – P. 1383 – 1393.
6. Kaplunov J. D., Wilde M. V. *Edge and interfacial vibrations in elastic shells of revolution* // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). – 2000. – Vol. 51. – P. 29 – 48.
7. Kaplunov J. D., Prikazchikov D. A., Rogerson, G. A. *On three dimesoinal edge waves in pre-stressed incompressible elastic solids*. // J. Acoust. Soc. Am. – 2005. – Vol. 118 (5) – P. 2975 – 2983.
8. Zernov V., Kaplunov J. *Three-dimensional edge waves in plates* // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2008. – Vol. 464. – P. 301 – 318.
9. Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. *Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах*. М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2010. – 280 с.
10. Белубекян В. М., Белубекян М. В. *Трехмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея*. // Докл. НАН Армении. – 2005. – Т. 105, № 4. – С.362 – 368.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Афанасьева О. А., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В.
Московский авиационный институт, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
greghome@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются нестационарные контактные задачи для двух тонких упругих цилиндрических или сферических оболочек в плоской или осесимметричной постановках. Разрабатывается методика решения, основанная на принципе суперпозиции. Строятся численно-аналитические алгоритмы, позволяющие учесть влияние деформируемости граничных поверхностей на положение нестационарно подвижной границы области взаимодействия.

Постановка задачи. Рассматривается нестационарная контактная задача с подвижными границами для двух тонких упругих круговых цилиндрических оболочек (задача 1) или двух сферических оболочек (задача 2). В начальный момент времени одна из них неподвижна (основание), а другая (ударник)