Построен оригинальный численно-аналитический алгоритм, основанный на методе сеток. С помощью разработанной итерационной процедуры алгоритм позволяет уточнить область контакта с учетом, деформируемости и возможного частичного отрыва граничных поверхностей в зоне контакта, а также выхода возмущений за ее границы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 13-08-01051, 13-08-01053).

Литература

5. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. *Плоская задача о вертикальном ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству* // Изв. РАН. МТТ. – 2000. – № 5. – С. 151-158.
6. Михайлова Е. Ю., Федотенков Г. В. *Нестационарная осесимметричная задача об ударе сферической оболочки по упругому полупространству (начальный этап взаимодействия)* // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 2. – С. 98 – 108.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Вестяк В. А. [*] **, Малашкин А. В.** [*] **, Тарлаковский Д. В.** [*] **, Терлецкий Р. Ф.** [†]
[*] Московский авиационный институт
Россия, г. Москва, 125993, А-80, ГСП -3, Волоколамское шоссе, д. 4
tdvhome@mail.ru
[†] Институт прикладной математики и механики НАН Украины им. Я. С. Подстригача
Украина, г. Львов, 79060, ул. Научная, 3б
dept13@iapmm.lviv.ua

Введение. Рассматриваетсятолстостенная сферическая оболочка с безразмерными внутренним $r_0 = 1$ и внешним r_1 радиусами, заполненная однородной изотропной средой. Ее осесимметричное движение описывается уравнениями линейной теории упругости в сферической системе координат r,θ,ϑ $\left(0 \le \theta \le \pi, -\pi < \vartheta \le \pi\right)$ с правой частью в виде линеаризованного выражения для силы Лоренца [1], уравнениями Максвелла, линеаризованным законом Ома и физическими соотношениями электромагнитоупругости относительно тангенциального v и нормального u перемещений, радиальных компонент E_r и j_r векторов напряженности электрического поля и плотности тока, их тангенциальных аналогов E_θ и j_θ, радиальной компоненты H вектора напряженности магнитного поля и плотности зарядов ρ_e. Линеаризация всех соотношений проводится относительно нулевого напряженно-деформированного состояния и нулевой напряженности магнитного поля, а также заданного статического электрического поля (его компоненты отмечены дополнительным нижним индексом «0»). В начальный момент времени $\tau = 0$ возмущения отсутствуют. Граничные условия принимаются в следующем виде:

$$u\big|_{r=1} = U_0(\tau, \theta),\ _{r=r_1} = v\big|_{r=1,\, r_1} = E_\theta\big|_{r=1,\, r_1} = 0. \tag{1}$$

Для решения задачи искомые функции и правая часть первого равенства в (1) раскладываются в ряды по полиномам Лежандра $P_n(x)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x)$:

$$\begin{pmatrix} u \\ E_r \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ E_{rn} \end{pmatrix} P_n \cos(\theta), \begin{pmatrix} v \\ E_\theta \end{pmatrix} = \sin(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} v_n \\ E_{\theta n} \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2} \cos(\theta). \tag{2}$$

Коэффициенты рядов (2) представляются в виде рядов по малому параметру α, характеризующему связь механического и электромагнитного полей:

$$\begin{gathered} u_n(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}(r, \tau) \alpha^m, v_n(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} v_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \\ E_{rn}(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{rnm}(r, \tau) \alpha^m, E_{\theta n}(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{\theta nm}(r, \tau) \alpha^m. \end{gathered} \tag{3}$$

В пространстве преобразований Лапласа по времени (индекс «L» соответствует изображению; s - параметр преобразования) для каждого номера n построена рекуррентная по индексу m система краевых задач относительно коэффициентов рядов (3). Показано, что эта система сводится к следующим соотношениям (штрих обозначает производную по r):

– при $n = 0$

$$\begin{gathered} u_{00}^L(r, s) = G_{0u0}^L(r, s) U_{00}^L(s), u_{0m}^L(r, s) = \int_1^{r_1} G_{uu0}^L(r, \xi, s) f_{u0,m-1}^L(\xi, s) d\xi, (m \geq 1), \\ E_{r0m}^L(r, s) = -\rho_{e0}(r) u_{0m}^L(r, s), (m \geq 0); \end{gathered} \tag{4}$$

– при $n \geq 1$

$$\begin{gathered} u_{n0}^L = G_{0un}^L(r, s) U_{0n}^L(s), v_{n0}^L = G_{0vn}^L(r, s) U_{0n}^L(s) \\ u_{nm}^L(r, s) = \int_1^{r_1} G_{uun}^L(r, \xi, s) f_{un,\, m-1}^L(\xi, s) d\xi + \int_1^{r_1} G_{uvn}^L(r, \xi, s) f_{v,\, m-1}^L(\xi, s) d\xi, \\ v_{nm}^L(r, s) = \int_1^{r_1} G_{vun}^L(r, \xi, s) f_{un,\, m-1}^L(\xi, s) d\xi + \\ + \int_1^{r_1} G_{vvn}^L(r, \xi, s) f_{v,\, m-1}^L(\xi, s) d\xi, (m \geq 1), \\ E_{\theta nm}^L(r, s) = \int_1^{r_1} G_{\theta n}^L(r, \xi, s) g_{\theta n}(u_{nm}(\xi, s), v_{nm}(\xi, s)) d\xi, (m \geq 0), \\ E_{rnm}^L(r, s) = -b_n^{-1}(r, s)\left(s^2 \eta_e^2 \rho_{e0} u_{nm} + n(n+1) r^{-1}\left(E_{\theta nm}'^L + r^{-1} E_{\theta nm}^L\right)\right), \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} f_{un,m-1}^L(\xi, s) = g_{un}\left(E_{rn,\, m-1}^L, E_{\theta n,\, m-1}^L\right), f_{v,\, m-1}^L(\xi, s) = g_v\left(E_{rn,\, m-1}^L, E_{\theta n,\, m-1}^L\right), \\ b_n = s(s+\gamma)\eta_e^2 + n(n+1) r^{-2}. \end{gathered}$$

В формулах (5) γ и η_e – безразмерные электромагнитные характеристики среды; g_{un}, g_v и $g_{\theta n}$ – дифференциальные операторы первого порядка по переменной r; G^L_{uun}, G^L_{uvn}, G^L_{vun}, G^L_{vvn} и $G^L_{\theta n}$ – объемные, а G^L_{0un} и G^L_{0vn} – поверхностные функции влияния (функции Грина).

Функции влияния являются отношениями сумм экспоненциальных многочленов аргумента s. Для определения их интегралов используется разложения в ряды по экспонентам в правой полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > \beta > 0$ коэффициенты этих рядов – рациональные функции. Поэтому их оригиналы могут быть получены традиционными методами. Однако в силу наличия кратных полюсов высоких порядков для процедуры обращения преобразования Лапласа используется численный метод [1], для ускорения сходимости которого поведена его модификация. Отметим, что оригиналы рядов по экспонентам в соответствии с теоремами операционного исчисления для фиксированного момента времени есть конечные суммы.

Произведения изображений в (4), (5) записывается в виде сверток по времени. Интегралы в этих соотношениях вычисляются численно с применением квадратурных формул. Приводятся примеры расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-08-00928, 12-08-90409).

Литература

1. Вестяк В. А., Тарлаковский Д. В.*Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере* // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2011. – № 4. – С. 16 – 21.
2. Abate J.*Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions* // ORSA Journal on computing. – 1995. – Vol. 7, No. 1. – P.36 – 43.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Гулгазарян Л. Г.
АГПУ им. Х. Абовяна, Институт механики НАН Армении
пр. Маршала Баграмяна 24/2, Ереван, 0019, Армения
lusina@mail.ru

На основе уравнений пространственной задачи теории упругости получены асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек при наличии вязкого внутреннего сопротивления, когда на лицевых поверхностях оболочки заданы различные граничные условия.

Среди различных причин затухания колебаний механических систем одной из важнейших является рассеяние энергии внутри самой колебательной системы, в частности вязкое трение, которое обычно принимается пропорциональным скорости перемещения точек [1]. Для определения и анализа напряженно-деформированных состояний тонких тел (балки, стрежни, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [2,