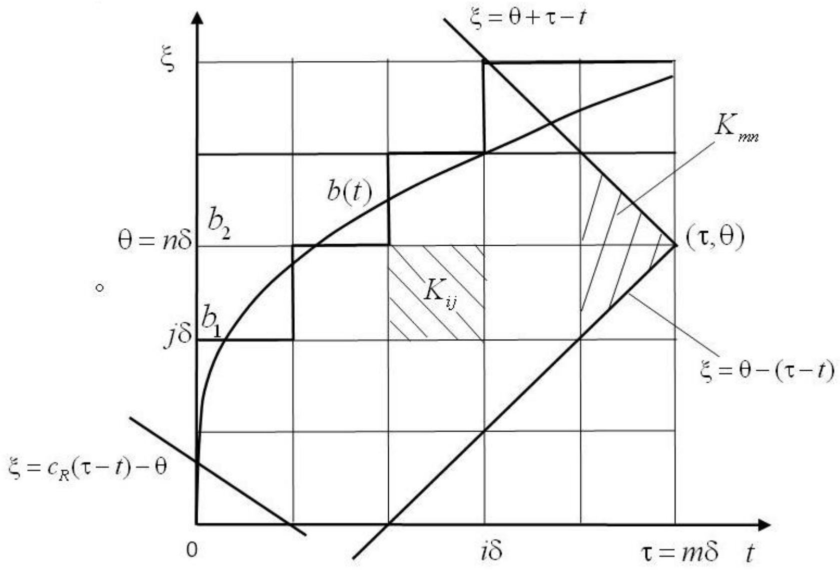


Рисунок 2 – Пространственно-временная область интегрирования

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 12-01-90407, 13-08-01051).

**Литература**


1. Mikhailova E. Yu., Fedotenkov G. V. *Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction)* // Mechanics of Solid. – 2011. – Vol. 46, No. 2. – P. 239 – 247.
2. Кубенко В. Д., Михайлова Е. Ю., Федотенков Г. В. *Решение осесимметричной нестационарной контактной задачи для тонкой сферической оболочки и упругого полупространства* // Материалы XVIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А. Г. Горшкова. – 2012. – Т. 2. – С. 130 – 136.


## ПРОБЛЕМА РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ВОЛНОВОДОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ СВЯЗИ


**Кудрявцев И. В.[*], Сильченко П. Н.[*], Михнёв М. М.[†], Барыкин Е. С.[†], Гоцелюк О. Б.[†]**

[*]ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»
660041 Россия, г.Красноярск, пр-т Свободный, 79
PSilchenko@sfu-kras.ru

[†]ОАО «ИСС» имени академика М.Ф. Решетнева
662972 Красноярский край, г. Железногорск, ул. Ленина, 52
mix@iss-reshetnev.ru


Протяженные пространственные тонкостенные элементы с неосесимметричным поперечным сечением и имеющие складки формы широко распространены в основных несущих и вспомогательных конструкциях различных устройств, механизмов, механических систем и различных машин.

Одной из проблемных особенностей существующей теории тонких оболочек и пластин является то, что она позволяет описывать напряженно-деформированное состояние (НДС) только таких тонкостенных элементов, поверхность которых можно описать в двух главных направлениях координатных линий гладкими и непрерывными функциями главных радиусов кривизны $R_1(\alpha_1)$ и $R_2(\alpha_2)$. Для таких случаев различными авторами получено большое число вариантов дифференциальных уравнений равновесия оболочки, вывод которых незначительно различается [1, 2, 3 и др.].

Независимо от конкретного вида уравнений равновесия таких конструкций, всем им присущ тот недостаток, что в случае, если исследуемая тонкостенная конструкция будет иметь резкие изменения геометрии в каком-либо направлении (например, складки), то и соответствующая им функция радиуса кривизны будет претерпевать разрыв, стремясь в этой области складки к нулевому значению:

$$R_i(\alpha_i) \to 0, i = 1, 2. \quad (1)$$

Использование разрывной функции радиуса кривизны приводит к трудностям в получении корректного аналитического решения, особенно для необходимой области складок, вследствие использования разрывных функций [4], а также сравнительных оценок получаемых значений чисел из-за наличия в знаменателях членов системы уравнений равновесия бесконечно малой величины радиуса кривизны (1), а в числителе вещественного числа. При таком подходе для общего случая нагружения возможно получить только численное решение в виде рядов, однако их точность и сходимость зачастую являются неопределенными.

Альтернативным подходом является разбиение исходной геометрии тонкостенной конструкции на отдельные подобласти, НДС каждой из которых возможно аналитически определить с помощью существующей теории оболочек и пластин. Связывая подобласти с помощью уравнений совместности деформаций и/или уравнениями перехода, можно получить совместное решение для исследуемой тонкостенной конструкции в целом. Однако такой подход неизбежно приводит к необходимости одновременного решения большого числа систем дифференциальных уравнений равновесия с соответствующими граничными условиями, которое пропорционально числу подобластей в конструкции.

Вместе с тем, такой подход может быть рациональным, если исходную геометрию конструкции можно разбить на относительно небольшое число подобластей одинаковой или подобной геометрией. В этом случае фактически требуется составить и решить только одну систему дифференциальных уравнений равновесия при разных граничных условиях, что обобщает и упрощает решение.

Применительно к протяженным тонкостенным неосесимметричным конструкциям волноводов космических аппаратов связи такой подход позволяет их моделировать составной конструкцией из четырех пластин, расположенных под прямым углом друг к другу [5].

Полученная нами система дифференциальных уравнений (2) для прямого элемента волноводного тракта космического аппарата фактически представляет набор из четырех подсистем, каждая из которых описывает состояние соответствующей ей пластины в составе конструкции волновода [5]. Граничные условия по краям пластин определяют взаимодействие пластин между собой в единой конструкции прямого элемента и связывают подсистемы уравнений в (2) в общее решение.

$$
\begin{aligned}
&\nabla^4\omega_1=\frac{1}{D}\left(h\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\alpha_1^2}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\alpha_1^2}-2h\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\alpha_1\partial\beta_1}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\alpha_1\partial\beta_1}+h\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\beta_1^2}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\beta_1^2}-q_{\alpha 1}\frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha_1}-\right.\\
&\left.-q_{\beta 1}\frac{\partial\omega_1}{\partial\beta_1}+q_{Z1}-\rho h\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2}\right),\ \nabla^4\phi_1=Eh\left(\left(\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\alpha_1\partial\beta_1}\right)^2-\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\alpha_1^2}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\beta_1^2}\right).\\
&\nabla^4\omega_2=\frac{1}{D}\left(h\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2\omega_2}{\partial\alpha_2^2}-2h\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\alpha_2\partial\beta_2}\frac{\partial^2\omega_2}{\partial\alpha_2\partial\beta_2}+h\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\beta_2^2}\frac{\partial^2\omega_2}{\partial\beta_2^2}-q_{\alpha 2}\frac{\partial\omega_2}{\partial\alpha_2}-\right.\\
&\left.-q_{\beta 2}\frac{\partial\omega_2}{\partial\beta_2}+q_{Z2}-\rho h\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2}\right),\ \nabla^4\phi_2=Eh\left(\left(\frac{\partial^2\omega_2}{\partial\alpha_2\partial\beta_2}\right)^2-\frac{\partial^2\omega_2}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2\omega_2}{\partial\beta_2^2}\right).\\
&\nabla^4\omega_3=\frac{1}{D}\left(h\frac{\partial^2\phi_3}{\partial\alpha_3^2}\frac{\partial^2\omega_3}{\partial\alpha_3^2}-2h\frac{\partial^2\phi_3}{\partial\alpha_3\partial\beta_3}\frac{\partial^2\omega_3}{\partial\alpha_3\partial\beta_3}+h\frac{\partial^2\phi_3}{\partial\beta_3^2}\frac{\partial^2\omega_3}{\partial\beta_3^2}-q_{\alpha 3}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_3}-\right.\\
&\left.-q_{\beta 3}\frac{\partial\omega_3}{\partial\beta_3}+q_{Z3}-\rho h\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2}\right),\ \nabla^4\phi_3=Eh\left(\left(\frac{\partial^2\omega_3}{\partial\alpha_3\partial\beta_3}\right)^2-\frac{\partial^2\omega_3}{\partial\alpha_3^2}\frac{\partial^2\omega_3}{\partial\beta_3^2}\right).\\
&\nabla^4\omega_4=\frac{1}{D}\left(h\frac{\partial^2\phi_4}{\partial\alpha_4^2}\frac{\partial^2\omega_4}{\partial\alpha_4^2}-2h\frac{\partial^2\phi_4}{\partial\alpha_4\partial\beta_4}\frac{\partial^2\omega_4}{\partial\alpha_4\partial\beta_4}+h\frac{\partial^2\phi_4}{\partial\beta_4^2}\frac{\partial^2\omega_4}{\partial\beta_4^2}-q_{\alpha 4}\frac{\partial\omega_4}{\partial\alpha_4}-\right.\\
&\left.-q_{\beta i}\frac{\partial\omega_4}{\partial\beta_4}+q_{Z4}-\rho h\frac{\partial^2\omega_4}{\partial t^2}\right),\ \nabla^4\phi_4=Eh\left(\left(\frac{\partial^2\omega_4}{\partial\alpha_4\partial\beta_4}\right)^2-\frac{\partial^2\omega_4}{\partial\alpha_4^2}\frac{\partial^2\omega_4}{\partial\beta_4^2}\right).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Анализ литературных источников показал, что к настоящему времени не существует общего аналитического решения даже для одной пластинки, о чем указывал в своих трудах С. П. Тимошенко [2]. Полученная же для прямого элемента волновода система дифференциальных уравнений (2) является значительно более сложной и нами в имеющейся математической литературе не обнаружено информации о решении подобного вида систем. Имеются частные случаи приближенного решения только лишь одной системы для отдельной пластинки в статической постановке и при строго определенных граничных условиях. При этом не указывается точность полученных результатов и не обсуждается их достоверность.

Известные методы конечно-элементных решений данной задачи, дают различные результаты и весьма большие погрешности, особенно в динамической постановке при минимальной толщине стенки прямого элемента волноводного тракта космического аппарата.

Получение общего решения для системы (2) будет иметь большую теоретическую и практическую значимость, поможет решить большое количество прикладных задач.

Нами прорабатываются подходы к получению общего аналитического решения системы (2).

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-257.2013.8

**Литература**

1. Новожилов В. В. *Линейная теория тонких оболочек* – Л. – 1991. – 656 с.
2. Тимошенко С. П. *Пластинки и оболочки*. – М. – 2009. – 640 с.
3. Вольмир А. С. *Гибкие пластинки и оболочки*. – М. – 1956. – 420 с.
4. Михайлов Б. К. *Пластины и оболочки с разрывными параметрами*. – Л. – 1980. – 196 с.
5. Сильченко П. Н. *Методика расчета напряженно-деформационного состояния волноводно-распределительных систем космических аппаратов* // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника и технологии. – 2012, № 2. – С 150 – 161.

## НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЗАДАЧИ О НЕЛИНЕЙНОМ ПАНЕЛЬНОМ ФЛАТТЕРЕ

**Куликов А. Н.**
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Россия, Ярославль, ул. Советская, д.14
anat_kulikov@mail.ru

Как хорошо известно, задача о колебаниях пластинки в сверхзвуковом потоке газа в случае цилиндрического изгиба (см., например, [1, 2]) приводит к необходимости исследования краевых задач для уравнения

$$w_{tt} + g_0 w_t + w_{xxxx} + c w_x = F\left(w_t, w_x, w_{xx}\right), \qquad (1)$$

где явный вид нелинейности $F$ приведен в работах [1, 2]. Уравнение (1) приведено в перенормированном виде. Так, например, положительный коэффициент $c$ пропорционален скорости потока газа и играет, обычно, роль основного параметра задачи, $g_0 > 0$ – коэффициент демпфирования. После нормировок он пропорционален $E^{-1/2}$, где $E$ модуль упругости. Уравнение (1) рассматривается вместе с краевыми условиями. Например, шарнирного опирания

$$w(t,0) = w(t,1) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,1) = 0. \qquad (2)$$

Краевые условия (2) могут быть заменены на иные, например, жесткого закрепления.

Явление флаттера в классическом варианте с математической точки зрения можно описать следующим образом. При $c < c_*$ ($c_*$ – скорость флаттера) нулевое состояние равновесия краевой задачи (1), (2) асимптотически устойчиво. При $c > c_*$ нулевое состояние равновесия теряет устойчивость и возникают