УДК 517.977

А.И. КАЛИНИН

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ УПРАВЛЕНИЯ ГИПЕРСФЕРОЙ

The paper reviews asymptotic optimization methods for singularly perturbed systems with multidimensional controls values of which are bounded in the Euclidean metrics.

Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных, принято называть сингулярно возмущенными. В математической теории оптимальных процессов [1] задачам оптимизации таких систем уделяется значительное внимание, что вызвано эффективностью асимптотических методов их решения. Как известно, численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В задачах с сингулярными возмущениями эти динамические системы являются жесткими [2], и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Применение асимптотических методов позволяет не только избежать интегрирования сингулярно возмущенных, т. е. жестких, систем, но и свести исходную задачу оптимального управления к решению задач меньшей размерности.

Основы теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений были заложены в работах А.Н. Тихонова и Л.С. Понтрягина. Среди важнейших результатов этой теории следует особо выделить метод асимптотического разложения решений сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, получивший название метода пограничных функций (А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, М.И. Вишик, Л.А. Люстерник).

С появлением теории оптимальных процессов асимптотические методы исследования возмущенных систем проникли в новую область через краевую задачу принципа максимума Л.С. Понтрягина [1] довольно быстро и естественно. Задачи оптимизации динамических систем с сингулярными возмущениями исследовались многими авторами. Как видно из обзоров [3–6], результаты, полученные к началу 1980-х гг., в основном относились к задачам с открытой областью управления и гладкими управляющими воздействиями, т. е. к задачам классического вариационного типа. Это не могло удовлетворить запросы практики, поскольку в прикладных задачах область управления, как правило, является замкнутой. В [7] предложен подход к исследованию задач оптимизации динамических систем, содержащих малые параметры, в основу которого положена идея конечномерной параметризации оптимальных управлений. С его помощью разработаны алгоритмы построения асимптотических приближений (произвольного порядка) к решениям широкого класса регулярно и сингулярно возмущенных задач, в которых динамические системы линейны по управлению, а на значения управляющих воздействий наложены прямые ограничения замкнутого типа в виде линейных неравенств [8]. В большинстве рассмотренных задач управляющие воздействия считались скалярными, однако полученные результаты могут быть легко перенесены на системы с многомерными управлениями $u(t)=\left(u_1(t),\ldots,u_r(t)\right)$, если на значения последних наложены ограничения вида

$$a_i \le u_i(t) \le b_i, \quad i=1,2,\ldots,r. \tag{1}$$

Вместе с тем во многих прикладных задачах значения многомерных управлений ограничены по евклидовой норме:

$$\|u(t)\| = \sqrt{u_1^2(t)+\ldots+u_r^2(t)} \le a. \tag{2}$$

Прежде всего это относится к задачам управления механическими системами, в которых управляющими воздействиями являются ограниченные по величине силы. Заметим, что, в отличие от условий (1), ограничение (2) является нелинейным, а это обстоятельство существенно усложняет исследования.

При исследовании задач с ограничениями на управления вида (2) можно использовать модификацию методики, изложенной в [8]. Суть модификации состоит в следующем. Множители Лагранжа вместе с длительностью процесса (в том случае, когда она не задана) являются удобными конечномерными элементами для описания решений рассматриваемых возмущенных задач. Во-первых, по ним легко восстанавливаются оптимальные управления, во-вторых, что очень существенно с точки зрения теории возмущений, они, как правило, гладким образом зависят от малого параметра. С помощью принципа максимума для указанных элементов можно составить систему конечных уравнений. Формируются эти уравнения путем интегрирования прямой и сопряженной динамических систем, которые являются сингулярно возмущенными. Применяя метод пограничных функций [9], можно разложить функции, формирующие конечные уравнения, по степеням малого параметра, а затем методом неопределенных коэффициентов найти асимптотику решения этих уравнений. Для построения асимптотических приближений заданного порядка к оптимальному управлению достаточно заменить неизвестные множители Лагранжа и длительность процесса их асимптотическими приближениями соответствующего порядка.

Описанный подход удобен для численной реализации, поскольку при его применении дело сводится к разложению конечномерных элементов. Заметим, что идея использования структуры решений в асимптотическом анализе восходит к Ван-дер-Полю, который применил ее при исследовании колебательных режимов.

Изложенная методика реализована в работах [10, 11] в виде алгоритмов асимптотического решения задач оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем. В [10] рассмотрена задача оптимального быстродействия для линейной стационарной системы

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z + B_1 u, \;\; y(0)=y_*, \quad \mu\dot{z} = A_3 y + A_4 z + B_2 u, \;\; z(0)=z_*, \tag{3}$$

$$y(T)=0, \quad z(T)=0, \quad \|u(t)\| \le 1, t\in[0,T], \quad J(u)=T\to\min, \tag{4}$$

где μ – малый положительный параметр, u – r-вектор, y – n-вектор, z – m-вектор, а остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры.

Предположение 1. Матрица A_4 устойчивая, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

Предположение 2. Имеет место

$$\operatorname{rank}\left(B_0, A_0B_0,\ldots,A_0^{n-1}B_0\right)=n, \;\; \operatorname{rank}\left(B_2, A_4B_2,\ldots,A_4^{m-1}B_2\right)=m,$$

где $A_0 = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3$, $B_0 = B_1 - A_2A_4^{-1}B_2$.

Введем понятие, которое позволит уточнить то, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решению рассмотренной задачи.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\mu), t\in\left[0,T^{(N)}(\mu)\right]$, *с кусочно-непрерывными компонентами назовем асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка* $(N=0,1,2,\ldots)$ *в задаче (3), (4), если* $\left\|u^{(N)}(t,\mu)\right\|\le 1,\ t\in\left[0,T^{(N)}(\mu)\right]$, *и имеют место асимптотические равенства*

$$x^{(N)}\left(T^{(N)}(\mu),\mu\right)=O_1\left(\mu^{N+1}\right),\ T^{(N)}(\mu)-T(\mu)=O_2\left(\mu^{N+1}\right),$$

где $x^{(N)}(t,\mu)=\left(y^{(N)}(t,\mu),z^{(N)}(t,\mu)\right),\quad t\in\left[0,T^{(N)}(\mu)\right]$, *– траектория системы (3), порожденная управлением* $u^{(N)}(t,\mu), t\in\left[0,T^{(N)}(\mu)\right]$, *а* $T(\mu)$ *– время оптимального быстродействия.*

В [10] излагается и обосновывается алгоритм, который позволяет для заданного числа N построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассмотренной задаче. Кроме того, показывается, как можно использовать построенные асимптотические приближения для точного решения задачи (3), (4) при заданном значении малого параметра.

Первый этап построения асимптотически субоптимальных управлений состоит в решении вырожденной задачи

$$\begin{gathered}\dot y=A_0y+B_0u,\quad y(0)=y_*,\quad y(T)=0,\\ \|u(t)\|\le 1, t\in[0,T],\quad J_0(u)=T\to\min.\end{gathered}\tag{5}$$

Предположение 3. В задаче (5) существует оптимальное управление $u^0(t),\ t\in[0,T_0]$.

Согласно принципу максимума [1]

$$\Delta^{0\prime}(t)u^0(t)=\max_{\|u\|\le 1}\Delta^{0\prime}(t)u, t\in[0,T_0],$$

где $\Delta^{0\prime}(t)=\psi^{0\prime}(t)B_0$, а $\psi^0(t), t\in[0,T_0]$, – нетривиальное решение сопряженной системы $\dot\psi=-A_0'\psi$.

Предположение 4. Оптимальному управлению в задаче (5) соответствует в силу принципа максимума единственный (с точностью до положительного множителя) вектор сопряженных переменных, при этом $\Delta^0(t)\ne 0,\ t\in[0,T_0]$.

На втором этапе алгоритма решается линейная задача оптимального управления с бесконечной длительностью процесса

$$\begin{gathered}dz/ds=A_4z+B_2u,\quad z(0)=0,\quad \|u(s)\|\le 1, s\le 0,\\ z(-\infty)=-A_4^{-1}B_2\Delta^0(T_0)\big/\left\|\Delta^0(T_0)\right\|,\\ J_*(u)=\int_{-\infty}^{0}\left(\Delta^{0\prime}(T_0)u(s)-\left\|\Delta^0(T_0)\right\|\right)ds\to\max.\end{gathered}\tag{6}$$

В линейных задачах с бесконечной длительностью процесса и интегральным критерием качества допустимые управления существуют лишь в исключительных случаях. Одним из таких исключений является задача (6). Дело в том, что она обладает следующей особенностью: точка $-A_4^{-1}B_2\Delta^0(T_0)/\left\|\Delta^0(T_0)\right\|$ является положением равновесия динамической системы при управлении $u(s)\equiv\Delta^0(T_0)\big/\left\|\Delta^0(T_0)\right\|$, которое обращает в нуль подынтегральное выражение в критерии качества. Это свойство вместе с предположениями 1, 2 гарантирует существование допустимых управлений в задаче (6). Отсюда, в свою очередь, следует, что эта задача имеет решение и является нормальной.

Пусть $u^*(s), s\le 0$, – оптимальное управление во второй базовой задаче. В силу принципа максимума [1]

$$\Pi\Delta'(s)u^*(s)=\max_{\|u\|\le 1}\Pi\Delta'(s)u, s\le 0,$$

где $\Pi\Delta'(s)=\Pi\psi'(s)B_2+\Delta^{0\prime}(T_0)$, а $\Pi\psi(s), s\le 0$, – решение сопряженной системы $d\Pi\psi/ds=-A_4'\Pi\psi$.

Предположение 5. Выполнено условие $\Pi\Delta(s)\ne 0,\ s\le 0$.

Подчеркнем, что единственная информация о решении задачи (6), которая используется в дальнейшем при построении асимптотически субоптимальных управлений, – это начальное значение $\eta_0 = \Pi\psi(0)$ вектора сопряженных переменных. Нет необходимости строить оптимальное управление, что, впрочем, и невозможно, если задача решается численно.

После решения базовых задач (5), (6) находится вектор $\nu_0 = \eta_0 - \left(A_2 A_4^{-1}\right)' \lambda_0$, где $\lambda_0 = \psi^0(T_0)$.

Согласно теореме, доказанной в [10], при выполнении предположений 1–5 в задаче (3), (4) с достаточно малым μ существует непрерывное оптимальное управление $u(t,\mu)$, $t \in [0, T(\mu)]$. Время оптимального быстродействия $T(\mu)$ разлагается в асимптотический ряд по целым степеням малого параметра со старшим коэффициентом T_0. Оптимальному управлению соответствует в силу принципа максимума такое решение $\psi(t,\mu)$, $t \in [0, T(\mu)]$, сопряженной системы, что $\psi(T(\mu),\mu) = (\lambda(\mu),\ \mu\nu(\mu))$, где $\lambda(\mu)$, $\nu(\mu)$ – вектор-функции, допускающие асимптотические разложения по целым степеням μ со старшими коэффициентами λ_0, ν_0 соответственно. Заметим, что компоненты векторов $\lambda(\mu)$, $\mu\nu(\mu)$ есть, по сути, множители Лагранжа.

При построении асимптотически субоптимальных управлений используются коэффициенты разложений величин $T(\mu)$, $\lambda(\mu)$, $\nu(\mu)$. Асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка может быть сформировано непосредственно после решения базовых задач. Оно имеет вид

$$u_0(t,\mu) = \frac{\Delta^0(t) + B_2'\Pi\psi\left((t - T_0)/\mu\right)}{\left\|\Delta^0(t) + B_2'\Pi\psi\left((t - T_0)/\mu\right)\right\|},\ t \in [0, T_0]. \tag{7}$$

Заметим, что при малом μ управление (7) будет существенно отличаться от решения $u^0(t)$, $t \in [0, T_0]$, первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т. е. в некоторой правосторонней окрестности точки T_0, при этом оно является непрерывной функцией времени, поскольку $\Delta^0(t) + B_2'\Pi\psi\left((t - T_0)/\mu\right) \neq 0$, $t \in [0, T_0]$, что гарантируется предположениями 4, 5.

Для построения асимптотически субоптимальных управлений более высокого порядка нужно дополнительно интегрировать системы линейных дифференциальных уравнений и находить решения невырожденных линейных алгебраических систем.

Предположения 1–5 не являются обременительными, однако существуют содержательные примеры, в которых не все из них выполняются. Один из таких примеров приведен в [12]. Оказывается, что управление (7) является асимптотическим приближением к решению задачи (3), (4) и при более слабых предположениях. По-прежнему будем считать выполненными предположения 1–3, а предположение 4 ослабим, заменив его следующим условием.

Предположение 6. Оптимальному управлению в задаче (5) соответствует в силу принципа максимума такой вектор сопряженных переменных $\psi^0(t)$, $t \in [0, T_0]$, что $\Delta^0(T_0) = B_0'\psi^0(T_0) \neq 0$.

Пусть $x_0(t,\mu) = \left(y_0(t,\mu),\ z_0(t,\mu)\right)$, $t \in [0, T_0]$, – траектория системы (3), порожденная управлением (7). В [12] доказана теорема, согласно которой при выполнении предположений 1–3, 6 в задаче (3), (4) с достаточно малым μ существует оптимальное управление $u(t,\mu)$, $t \in [0, T(\mu)]$, а при $\mu \to 0$ имеет место $T(\mu) \to T_0$, $x_0(T_0,\mu) \to 0$.

В [11] рассмотрена задача терминального управления линейной стационарной системой

$$\begin{gathered}\dot{y} = A_1 y + A_2 z + B_1 u,\ y(0) = y_*, \quad \mu\dot{z} = A_3 y + A_4 z + B_2 u,\ z(0) = z_*,\\ \|u(t)\| \le 1,\ t \in [0, t^*], \quad H_1 y(t^*) = g_1, \quad H_2 z(t^*) = g_2,\\ J(u) = c_1' y(t^*) + \mu c_2' z(t^*) \to \max,\end{gathered} \tag{8}$$

где μ, как и прежде, малый положительный параметр, $t^* > 0$ – фиксированный момент времени, y, z, g_1, g_2, u – векторы размерности n, m, n_1, m_1, r соответственно $(n_1 < n,\ m_1 \le m)$, а остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. Считается выполненным предположение 1.

Управление $u(t,\mu)$, $t\in[0,t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами принято называть доступным, если $\|u(t,\mu)\|\le 1$, $t\in[0,t^*]$. Наряду с этим общеупотребительным понятием определим то, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решению рассмотренной задачи.

Определение 2. Доступное управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t\in[0,t^*]$, *назовем асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка* $(N=0,1,2,\ldots)$ *в задаче* (8), *если оно отклоняется по критерию качества от оптимального управления на величину* $O(\mu^{N+1})$, *а траектория динамической системы, им порожденная, удовлетворяет терминальным ограничениям с точностью того же порядка малости.*

В [11] излагается и обосновывается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (8). Кроме того, описывается процедура, использующая построенные асимптотические приближения для точного решения рассмотренной задачи при заданном значении малого параметра.

Суть алгоритма, который по идее близок к предыдущему, состоит в построении асимптотических приближений к множителям Лагранжа. Эти множители допускают асимптотические разложения по целым степеням малого параметра, старшие коэффициенты которых могут быть найдены в результате решения двух базовых задач оптимального управления. Первой из них является вырожденная задача

$$\begin{gathered}\dot y = A_0 y + B_0 u,\quad y(0)=y_*,\quad \|u(t)\|\le 1, t\in[0,t^*],\\ H_1 y(t^*)=g_1,\quad J_0(u)=c_1' y(t^*)\to\max.\end{gathered}\tag{9}$$

Вторая базовая задача представляет собой линейную задачу оптимального управления с бесконечной длительностью процесса

$$\begin{gathered}dz/ds = A_4 z + B_2 u,\quad z(-\infty) = -A_4^{-1}B_2\Delta^0(t^*)\Big/\|\Delta^0(t^*)\|,\\ \|u(s)\|\le 1,\ s\le 0,\quad H_2 z(0)=H_2A_4^{-1}A_3y^0(t^*)+g_2,\\ J_*(u)=c_0'z(0)+\int_{-\infty}^{0}\left(\Delta'^0(t^*)u(s)-\|\Delta^0(t^*)\|\right)ds\to\max,\end{gathered}\tag{10}$$

где $\Delta^{0\prime}(t^*)=(c_1'-\lambda_0'H_1)B_0$, $c_0'=(c_1'-\lambda_0'H_1)A_2A_4^{-1}+c_2'$, а λ_0, $y^0(t^*)$ – вектор множителей Лагранжа и правый конец оптимальной траектории в задаче (9). Предполагается, что базовые задачи имеют решение и являются нормальными. Заметим, что задача (10) обладает той же особенностью, что и задача (6).

Для построения асимптотически субоптимального управления нулевого порядка достаточно знать только старшие коэффициенты разложения множителей Лагранжа в исходной задаче, т. е. множители Лагранжа в базовых задачах. Остальные коэффициенты, процедура вычисления которых описана в [11], используются при построении асимптотически субоптимальных управлений более высокого порядка. Эта процедура включает в себя интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем.

В [13] рассмотрена задача оптимального управления линейной стационарной системой с большой длительностью процесса

$$\begin{gathered}\dot x = Ax+Bu,\quad x(0)=x_0,\quad \|u(t)\|\le 1,\quad t\in[0,T/\mu],\\ Hx(T/\mu)=g,\quad J(u)=\int_0^{T/\mu}\left(a'x(t)+c'u(t)\right)dt\to\max,\end{gathered}\tag{11}$$

где μ – малый положительный параметр, x – n-вектор, g – m-вектор $(m\le n)$, T – заданное положительное число. Предполагается, что матрица A устойчивая и $\Delta^0=c-\left(A^{-1}B\right)'a\ne 0$.

С помощью перехода к «медленному времени» $\tau=\mu t$ и введения дополнительной фазовой переменной задача (11) сводится к задаче терминального управления вида (8), в которой медленная переменная y является скаляром. К последней задаче применяется алгоритм, предложенный в [11], и показывается, что если задача

$$dz/ds = Az + Bv,\ z(-\infty) = -A^{-1}B\Delta^0 / \|\Delta^0\|,\ \|v(s)\| \le 1, s \le 0,\ Hz(0) = g,$$

$$J_*(v) = a'A^{-1}z(0) + \int_{-\infty}^{0} \left(\Delta^{0\prime}v(s) - \|\Delta^0\|\right)ds \to \max \tag{12}$$

имеет решение $\nu^*(s)$, $s \le 0$, и является нормальной, то управление $u(t,\mu) = \nu^*(t - T/\mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, будет асимптотически субоптимальным управлением любого порядка в исходной задаче (11). В данном случае асимптотически субоптимальное управление определяется так же, как и в задаче (8). Заметим, что задача (12) есть ничто иное, как вторая базовая задача.

Результаты, полученные для линейных систем, в [14, 15] обобщены на нелинейные системы вида

$$\dot{y} = a_1(y,t) + A_1(y,t)z + B_1(y,t)u, \quad \mu\dot{z} = a_2(y,t) + A_2(y,t)z + B_2(y,t)u$$

с устойчивой матрицей $A_2(y,t)$. В [14] строится асимптотика решения задачи оптимального быстродействия, а в [15] – задачи терминального управления с подвижным правым концом траекторий. При применении алгоритмов, предложенных в этих работах, исходные задачи распадаются на две задачи оптимального управления меньшей размерности, причем одна из них (вторая базовая) является линейной.

Следует отметить, что в задаче оптимального быстродействия для нелинейной системы возможен случай, когда вторая базовая задача имеет очевидное решение, а асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка является решение первой базовой, т. е. вырожденной задачи. Такая ситуация имеет место в задаче наискорейшего торможения вращений динамически симметричного твердого тела с малым моментом инерции относительно оси симметрии при учете момента сил вязкого трения, направленного против вектора угловой скорости тела [16]. При построении асимптотически субоптимального управления нулевого порядка в этой задаче можно пренебречь регулярными возмущениями в правых частях дифференциальных уравнений. В итоге математическая модель задачи принимает вид

$$I\dot{y}_1 = Iy_2z - cy_1 + bu_1,\ y_1(0) = y_1^*,\ y_1(T) = 0,$$

$$I\dot{y}_2 = -Iy_1z - cy_2 + bu_2,\ y_2(0) = y_2^*,\ y_2(T) = 0,$$

$$\mu\dot{z} = -cz + bu_3,\ z(0) = z^*,\ z(T) = 0,$$

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t) \le 1,\ t \in [0,T],\ J(u) = T \to \min,$$
$$0 < \mu << 1,\ I > 0, b > 0, c > 0.$$

Оказывается, что в первой базовой задаче

$$\dot{y}_1 = -\frac{c}{I}y_1 + \frac{b}{I}u_1 + \frac{b}{c}y_2u_3,\ y_1(0) = y_1^*,\ y_1(T) = 0,$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{c}{I}y_2 + \frac{b}{I}u_2 - \frac{b}{c}y_1u_3,\ y_2(0) = y_2^*,\ y_2(T) = 0,$$

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t) \le 1,\ t \in [0,T],\ J_0(u) = T \to \min,$$

осуществим синтез оптимальной системы. Оптимальное управление типа обратной связи имеет вид

$$u_1^0 = -y_1 / \|y_1\|,\ u_2^0 = -y_2 / \|y_2\|,\ u_3^0 = 0,\ y = (y_1, y_2), \tag{13}$$

в чем, в частности, можно убедиться с помощью динамического программирования [17]. Функция Беллмана, кстати, задается формулой

$$B(y) = \frac{I}{c}\ln\left(\frac{c\|y\| + b}{b}\right).$$

Таким образом, управление (13) приводит к синтезу асимптотически оптимальной системы в задаче наискорейшего торможения вращений твердого тела.

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983.

2. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий М.Г. Численные методы решения жестких систем. М., 1979.

3. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. // Мат. анализ. (Итоги науки и техники). 1982. Т. 20. С. 3.
4. Kokotovic P.V., Khalil H.K. Singular Perturbations in Systems and Control. New York, 1986.
5. Калинин А.И. // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 104.
6. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3.
7. Габасов Р., Калинин А.И., Кириллова Ф.М. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 22.
8. Калинин А.И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Мн., 2000.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
10. Калинин А.И., Семенов К.В. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. № 3. С. 432.
11. Калинин А.И., Семенов К.В. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 32.
12. Калинин А.И. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45. № 11. С. 1963.
13. Калинин А.И., Семенов К.В. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2005. № 1. С. 109.
14. Грудо Я.О., Калинин А.И. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 11. С. 1492.
15. Грудо Я.О., Калинин А.И. // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1492.
16. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М., 1980.
17. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Основы динамического программирования. Мн., 1975.

Поступила в редакцию 08.12.08.

Анатолий Иосифович Калинин – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой методов оптимального управления.