ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1975 МАТЕМАТИКА № 10 (161)

УДК 517.51

В. Г. Кротов

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ПО ОДНОЙ ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ, ОБРАЗУЮЩЕЙ БАЗИС В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

В работе [1] А. М. Олевским была построена полная ортонормированная система функций $\{\psi_m(t)\}$, образующая базис в пространствах $L^p(0, 1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (мы считаем $L^\infty(0, 1) = C(0, 1)$). Там же были доказаны некоторые другие свойства системы, которые являются аналогами хорошо известных свойств системы Хаара $\{\mathrm{X}_m(t)\}$ (определение системы Хаара см., напр., в [1], [2]). В то же время система $\{\psi_m(t)\}$ отличается от системы Хаара следующим важным обстоятельством: она содержит бесконечную подсистему, ограниченную в совокупности. Поэтому возникает вопрос, не вносит ли указанное обстоятельство нового в свойствах системы $\{\psi_m(t)\}$ по сравнению со свойствами системы Хаара. Следует заметить, что в качестве этой подсистемы можно взять систему функций Радемахера (см. [1], с. 302). Таким образом, систему $\{\psi_m(t)\}$ можно рассматривать как пополнение системы Радемахера $\{r_m(t)\}$, которая является неполной, до полной системы, образующей базис в $L^p(0, 1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

В предлагаемой работе рассматривается поведение рядов вида $\sum\limits_{m=1}^{\infty} m^\gamma |c_m(f)|^\beta$ для некоторых классов функций (здесь $\beta > 0$ и γ — фиксированные числа, $c_m(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t)$ по системе $\{\psi_m(t)\}$)[1]. Кроме того, доказывается ряд оценок снизу для коэффициентов Фурье непрерывных функций по системе $\{\psi_m(t)\}$. Наконец, мы покажем, что если коэффициенты Фурье абсолютно непрерывной функции по системе $\{\psi_m(t)\}$ убывают в некотором смысле регулярно, то функция обязана быть тождественной постоянной.

§ 2. Определения и формулировки результатов

Следуя А. М. Олевскому [1], положим для $m = 1, 2, \ldots$ и $t \in [0, 1]$

$$\psi_m(t) = \mathrm{X}_m(t),\ m = 1,\ 2,\ \psi_m(t) = \sum_{j=1}^{2^n} \alpha_{ij}^{(n)} \mathrm{X}_n^{(j)}(t),\ m > 2, \tag{1}$$

[1]) Для тригонометрической системы подобные вопросы рассматривал А. А. Конюшков [3], а для системы Хаара (случаи $\gamma = 0$ и $\beta = 1$) — Б. И. Голубов [4].

где $m=2^n+i$ $(n=1,\ 2,\ldots;\ 1\leqslant i\leqslant 2^n)$,

$$a_{ij}^{(n)}=2^{-\frac{n}{2}},\quad 1\leqslant j\leqslant 2^n, \tag{2}$$

$$a_{ij}^{(n)}=\begin{cases} 2^{-\frac{n-s}{2}} & \text{при } (\nu-1)\,2^{n-s}+1\leqslant j\leqslant(2\nu-1)\,2^{n-s-1},\\ -2^{-\frac{n-s}{2}} & \text{при } (2\nu-1)\,2^{n-s-1}+1\leqslant j\leqslant \nu 2^{n-s},\\ 0 & \text{для остальных } j, \end{cases} \tag{3}$$

при $1<i=2^s+\nu$ $(0\leqslant s\leqslant n-1,\ 1\leqslant\nu\leqslant 2^s)$.

Пусть $c_m(f)\,(a_m(f))$ означают коэффициенты Фурье функции $f(t)$ по системе $\{\psi_m(t)\}$ (соответственно по системе Хаара). Кроме того, положим $c_m(t)=c_{ns}^{(\nu)}(f)$ при $m=2^n+2^s+\nu$ $(n=1,\ 2,\ldots;$ $0\leqslant s\leqslant n-1;$ $\theta(s)\leqslant\nu\leqslant 2^s$, где $\theta(0)=0$, $\theta(s)=1$ при $s>0)$, а для системы Хаара, как обычно, $a_m(f)=a_n^{(j)}(f)$ при $m=2^n+j$ $(n=0,1,\ldots;$ $\theta(n)\leqslant j\leqslant 2^n)$.

Теорема 1. 1) *Если при некотором* $1\leqslant p\leqslant\infty$ *функция* $f(t)\in L^p(0,\ 1)$ *и*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\,\omega_p\left(\frac{1}{m},\ f\right)<\infty, \tag{4}$$

то

$$\sum_{m=1}^{\infty}|c_m(f)|<\infty. \tag{5}$$

2) *Для любого модуля непрерывности* $\omega(\delta)$, *лишь бы*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\,\omega\left(\frac{1}{m}\right)=\infty,$$

существует непрерывная функция $f_0(t)$, *для которой условие* (5) *не выполнено, хотя* $\omega(\delta,\ f_0)=O(\omega(\delta))$ *при* $\delta\to 0$.

Эта теорема в точности повторяет аналогичное утверждение для системы Хаара, доказанное Цесельским, Муселяком (утверждение 1) и Б. И. Голубовым (утверждение 2) (см., напр., [5], с. 202).

Далее, рассуждая совершенно аналогично тому, как это делал Б. И. Голубов (см. [4], теорема 4), можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. 1) *Если при некотором* α, $0<\alpha\leqslant 1$, *функция* $f(t)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, *то для любых чисел* $\beta>0$ *и* γ, *удовлетворяющих условию* $\gamma<\beta\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-1$, *имеем*

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^{\gamma}\,|a_m(f)|^{\beta}<\infty. \tag{6}$$

2) *Для любого* $0<\alpha\leqslant 1$ *существует функция* $f_\alpha(t)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, *для которой условие* (6) *не выполнено при* $\gamma=\beta\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-1$.

Что же касается аналогичного утверждения для системы $\{\psi_m(t)\}$, то оно выглядит так.

Теорема 3. 1) *Если при некотором* $0<\alpha\leqslant 1$ *функция* $f(t)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, *то для любых чисел* $\beta>0$ *и* γ, *удовлетворяющих условию* $\gamma<\min\left\{\beta\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-1,\ \alpha\beta\right\}$, *имеем*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\gamma} |c_m(f)|^{\beta} < \infty. \tag{7}$$

2) *Для любого* $0 < \alpha < 1$ *существует функция* $f_\alpha(t) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, *для которой условие* (7) *не выполнено при* $\gamma = \min\left\{\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) - 1, \alpha\beta\right\}$.

Заметим прежде всего, что утверждение 2) теоремы 3 при $\gamma=0$ доказано С. В. Бочкаревым [6] для произвольной полной ортонормированной системы функций. Далее, если $0 < \beta \leqslant 2$, то условия, гарантирующие сходимость рядов (6) и (7) для функций $f(t) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, совпадают, в то время как при $\beta > 2$ ряды (6) сходятся при более жестких условиях, нежели ряды (7).

Таким образом, с точки зрения сходимости рядов (6) и (7) для функций из классов $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, в свойствах системы $\{\psi_m(t)\}$ и системы Хаара принципиальных различий не наблюдается.

Иначе обстоит дело, если рассмотреть абсолютно непрерывные функции. Для системы Хаара С. В. Бочкарев [7] показал, что, если функция $f(t) \in AC$ (AC — класс абсолютно непрерывных функций), $f(t) \not\equiv \mathrm{const}$, то $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m(f)|^{\frac{2}{3}} = \infty$, и если функция $f(t) \in C(0, 1)$, $f(t) \not\equiv \mathrm{const}$, то $\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m}\, |a_m(f)| = \infty$. Кроме того (см. [5]), если функция $f(t) \in AC$ (более того, $f(t) \in V(0, 1)$), то при любом $\varepsilon > 0$ имеем $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m(f)|^{\frac{2}{3}+\varepsilon} < \infty$ и $\sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{1}{2}-\varepsilon} |a_m(f)| < \infty$.

Таким образом, рассматривая поведение рядов (6) для любого класса функций $M \subset AC$, мы не сможем утверждать большего, чем дает теорема 2. Иначе обстоит дело с поведением рядов (7).

Обозначим через $AC\,\mathrm{Lip}_1\,\alpha$ множество абсолютно непрерывных функций $f(t)$, производные которых $f'(t)$ удовлетворяют условию $\omega_1(\delta, f') = O(\delta^{\alpha})$ при $\delta \to 0$, а через $C^1\,\mathrm{Lip}\,\alpha$ — множество непрерывно-дифференцируемых функций, производные которых принадлежат классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Теорема 4. 1) *Если при некотором* $0 < \alpha \leqslant 1$ *функция* $f(t) \in AC\,\mathrm{Lip}_1\,\alpha$, *то при любых* $\beta > \frac{2}{2\alpha + 3}$ *и* $\gamma < \min\left\{1, \alpha + \frac{1}{2}\right\}$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_m(f)|^{\beta} < \infty, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m^{\gamma} |c_m(f)| < \infty. \tag{8}$$

2) *Для любого* $0 < \alpha \leqslant 1$ *существует функция* $F_\alpha(t) \in AC\,\mathrm{Lip}_1\,\alpha$ (*более того*, $F_\alpha(t) \in C^1\,\mathrm{Lip}\,\alpha$), *для которой условия* (8) *не выполнены при* $\beta = \frac{2}{2\alpha + 3}$ *и* $\gamma = \min\left\{1, \alpha + \frac{1}{2}\right\}$.

В частности, при $\alpha = 1$ из теоремы 4 получаем следующее утверждение: *если функция* $f(t)$ *абсолютно непрерывна и производная* $f'(t)$ *имеет ограниченную вариацию на отрезке* $[0, 1]$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m(f)|^{\frac{2}{5}+\varepsilon} < \infty$, $\sum_{m=1}^{\infty} m^{1-\varepsilon} |c_m(f)| < \infty$. Ясно, что такие утверждения заведомо не могут иметь места для системы Хаара.

В силу включения $AC\,\mathrm{Lip}_1\alpha \supset C^1\,\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, из теоремы 4 вытекает

Следствие 1. *Если при некотором* $0<\alpha\leqslant 1$ *функция* $f(t)\in C^1\,\mathrm{Lip}\,\alpha$, *то для любых* $\beta>\frac{2}{2\alpha+3}$ *и* $\gamma<\min\left\{1,\ \alpha+\frac{1}{2}\right\}$ *выполнено* (8).

Условия (8) *не выполняются для некоторых функций* $F_\alpha(t)\in C^1\,\mathrm{Lip}\,\alpha$ *при* $\beta=\frac{2}{2\alpha+3}$ *и* $\gamma=\min\left\{1,\ \alpha+\frac{1}{2}\right\}$.

Заметим также, что дальнейшее сужение класса функций, для которых рассматриваются ряды (8), не приносит ничего нового по сравнению с теоремой 4 при $\alpha=1$.

Известно (см. [7], [8]), что гладкость функции накладывает ограничения на скорость убывания коэффициентов Фурье — Хаара и Фурье — Уолша не только сверху, но и снизу. Это связано с тем, что системы Хаара и Уолша состоят из разрывных функций. Таковой является и система $\{\psi_m(t)\}$, для которой также имеет место подобное явление.

Теорема 5. *Если функция* $f(t)\in C(0,\ 1)$ *и*

$$\lim_{k\to\infty} 2^k \sum_{n=k}^{\infty}\left\{|c_{n0}^{(0)}(f)|+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2^s}}\sum_{\nu=1}^{2^s}|c_{ns}^{(\nu)}(f)|\right\}=0, \tag{9}$$

то $f(t)\equiv\mathrm{const}$.

Следствие 2. *Если функция* $f(t)\in C(0,\ 1)$ *и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} m\,|c_m(f)|<\infty$, *то* $f(t)\equiv\mathrm{const}$.

Как уже отмечалось выше, аналогичное утверждение для системы Хаара доказано С. В. Бочкаревым [7] при условии

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{m}\,|a_m(f)|<\infty.$$

Следствие 3. *Если функция* $f(t)\in C(0,\ 1)$ *и* $c_m(f)=o\left(\frac{1}{m\sqrt{m}}\right)$ *при* $m\to\infty$, *то* $f(t)\equiv\mathrm{const}$.

Заметим, что, несмотря на то, что поведение рядов (6) и (7), вообще говоря, различно, для системы Хаара аналогичное утверждение имеет точно такой же вид [4].

Для дальнейшего нам понадобится следующее определение. Будем говорить, что последовательность чисел $\{c_m\}$ принадлежит классу A, если найдется постоянная $D\geqslant 1$ такая, что

$$\max_{2^n<m\leqslant 2^{n+1}}|c_m|\leqslant D\min_{2^{n-1}<m\leqslant 2^n}|c_m| \quad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{10}$$

Для системы Хаара В. А. Матвеев [9] доказал, что, если функция $f(t)\in CV$ и $\{a_m(t)\}\in A$, то $f(t)\in\mathrm{Lip}\,1$.

Таким образом, определенная регулярность убывания коэффициентов Фурье — Хаара функции $f(t)\in CV$ влечет определенную гладкость функции. Если же рассмотреть вместо системы Хаара систему $\{\psi_n(t)\}$, то имеет место противоположная картина.

Теорема 6. *Если функция* $f(t)$ *абсолютно непрерывна и* $\{c_m(f)\}\in A$, *то* $f(t)\equiv\mathrm{const}$.

Следствие 4. *Если функция* $f(t) \in AC$ *и* $|c_m(f)| \downarrow 0$ *при* $m \to \infty$, *то* $f(t) \equiv \text{const}$.

Следовательно, определенная гладкость функции заставляет коэффициенты Фурье по системе $\{\psi_m(t)\}$ убывать в некотором смысле нерегулярно (исключение составляют тождественные постоянные).

Заметим, что требование абсолютной непрерывности функции в теореме 6 можно ослабить, требуя вместо этого $f(t) \in CV$.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Если* $\varphi_k(t) \equiv \sin 2^{k+1}\pi t$ $(k = 1, 2, \dots)$, *то*

$$c_{ns}^{(\nu)}(\varphi_k) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots;\ 0 \leqslant s \leqslant n-1,\ 1 \leqslant \nu \leqslant 2^s,\ k \geqslant s), \tag{11}$$

$$c_{n0}^{(0)}(\varphi_k) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} & \text{при } n = k, \\ 0 & \text{при } n \neq k, \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2^{s-1}} c_{ns}^{(2\nu-1)}(\varphi_k) = \begin{cases} -2^{s-1} A_{ns}^{(s-1)} & \text{при } k = s-1, \\ 0 & \text{при } 1 \leqslant k < s-1, \end{cases} \tag{13}$$

где $n = 3, 4, \dots;\ 2 \leqslant s \leqslant n-1$;

$$A_{ns}^{(k)} = \frac{4}{\pi} 2^{\frac{s}{2}-k} \sin^2 \frac{\pi}{2^{n-k+1}} \sin^2 \frac{\pi}{2^{s-k+1}} \sin^{-1} \frac{\pi}{2^{n-k}} \geqslant D 2^{\frac{s}{2}-n}\,[1]. \tag{14}$$

Доказательство. Из определения функций Хаара и тождества $2\cos(x+h) - \cos x - \cos(x+2h) = 4\sin^2\frac{h}{2}\cos(x+h)$ легко получить равенства

$$a_n^{(j)}(\varphi_k) = -\frac{2}{\pi} 2^{\frac{n}{2}-k} \sin^2 \frac{\pi}{2^{n-k+1}} \cos \frac{2j-1}{2^{n-k}}\pi, \tag{15}$$

следовательно, учитывая еще (1) и (3), имеем

$$c_{ns}^{(\nu)}(\varphi_k) = -\frac{4}{\pi} 2^{\frac{s}{2}-k} \sin^2 \frac{\pi}{2^{n-k+1}} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi}{2^{s-k+1}} \sum_{j=1}^{2^{n-s-1}} \sin\left[(4\nu-3)2^{k-s-1} + 2^{k-n} + j2^{k-n+1}\right]\pi, \tag{16}$$

откуда вытекает, очевидно, равенство (11).

Для вычисления суммы в (16) воспользуемся тождеством

$$\sum_{j=1}^{N} \sin(x + jy) = \frac{\sin\frac{N}{2}y \sin\left(\frac{N+1}{2}y + x\right)}{\sin\frac{y}{2}}. \tag{17}$$

Получим при этом (см. (14))

$$c_{ns}^{(\nu)}(\varphi_k) = -A_{ns}^{(k)} \sin \frac{2\nu-1}{2^{s-k}}\pi. \tag{18}$$

Положив далее в (17) $N = 2^{s-1}$, $x = -\frac{3\pi}{2^{s-k}}$, $y = \frac{4\pi}{2^{s-k}}$, при

[1] Через $D, D_\alpha, D_\alpha(f), \dots$ мы обозначаем положительные постоянные, зависящие от входящих параметров, разные, вообще говоря, в разных формулах.

$k < s-1$ $(s \geqslant 2)$ получим $\sum\limits_{\nu=1}^{2^{s-1}} \sin \frac{4\nu-3}{2^{s-k}} \pi = 0$, ибо $\sin \frac{N}{2} y = \sin 2^k \pi = 0$.

При $k = s-1$ тождество (17) теряет смысл, т. к. $\sin \frac{y}{2} = \sin \pi = 0$, но в этом случае, легко видеть, $\sum\limits_{\nu=1}^{2^{s-1}} \sin \frac{4\nu-3}{2} \pi = 2^{s-1}$ и равенства (13) вытекают из (18). Наконец, из (15) и (2) следует, что

$$c_{n0}^{(0)}(\varphi_k) = -\frac{2^{1-k}}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{2^{n-k+1}} \sum_{j=1}^{2^n} \cos \frac{2j-1}{2^{n-k}} \pi,$$

но, как легко убедиться, последняя сумма равна нулю при $k < n$ и равна -2^n при $k = 0$. Равенства (12) доказаны.

Используя неравенства $x \geqslant \sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, убеждаемся в справедливости неравенств (14).

Лемма 2. *Если при некотором* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *функция* $f(t) \in L^p(0, 1)$, *то*

$$|c_{ns}^{(\nu)}(f)| \leqslant 2^{s\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \omega_p\left(\frac{1}{2^{n+1}}, f\right), \tag{19}$$

где $n = 1, 2, \ldots$; $0 \leqslant s \leqslant n-1$; $\theta(s) \leqslant \nu \leqslant 2^s$.

Более того, если функция $f(t) \in L^p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$, *то*

$$\left[\sum_{\nu=1}^{2^s} |c_{ns}^{(\nu)}(f)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{s\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \omega_p\left(\frac{1}{2^{n+1}}, f\right). \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ — фиксированное число и функция $f(t) \in L^p(0, 1)$. Тогда, используя соотношения (1), (3) и неравенство Гёльдера (см. также равенства (16) работы [2]) получим

$$\sum_{\nu=1}^{2^s} |c_{ns}^{(\nu)}(f)|^p \leqslant 2^{\frac{p(s-n)}{2}} \sum_{\nu=1}^{2^s} \left[\sum_{j=(\nu-1)2^{n-s}+1}^{\nu 2^{n-s}} |a_n^{(j)}(f)|\right]^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{sp}{2}} \sum_{\nu=1}^{2^s} \left[\sum_{j=(\nu-1)2^{n-s}+1}^{\nu 2^{n-s}} \int_{\frac{j-1}{2^n}}^{\frac{2j-1}{2^{n+1}}} \left| f\left(t + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - f(t) \right| dt\right]^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{sp}{2}} \sum_{\nu=1}^{2^s}{}' \left[\int_{\frac{\nu-1}{2^s}}^{\frac{\nu}{2^s}} \left| f\left(t + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - f(t) \right| dt\right]^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{sp}{2}} \sum_{\nu=1}^{2^s}{}' \left\{ \left[\int_{\frac{\nu-1}{2^s}}^{\frac{\nu}{2^s}} \left| f\left(t+\frac{1}{2^{n+1}}\right) - f(t) \right|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\frac{\nu-1}{2^s}}^{\frac{\nu}{2^s}} dt \right]^{1-\frac{1}{p}} \right\}^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{s\left(1-\frac{p}{2}\right)} \omega_p\left(\frac{1}{2^{n+1}}, f\right),^{1)}$$

и неравенства (20) доказаны. Далее, рассуждая точно так же, лишь вместо (30) используя (2), получим (4) при $n=1, 2, \ldots;\ s=\nu=0$. Если же $n=1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant s \leqslant n-1,\ 1 \leqslant \nu \leqslant 2^s$, то (4) следует из (5).

Лемма 3. *Если функция $f(t) \in AC$, то*

$$\sum_{\nu=1}^{2^s} |c_{ns}^{(\nu)}(f)| \leqslant \frac{1}{2} 2^{\frac{s}{2}-n} \omega_1\left(\frac{1}{2^{s+1}}, f'\right) \quad (n=1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant s \leqslant n-1). \tag{21}$$

Доказательство. Используя (1), (3) и равенство (16) работы [2], получим

$$\sum_{\nu=1}^{2^s} |c_{ns}^{(\nu)}(f)| = 2^{-\frac{n-s}{2}} \sum_{\nu=1}^{2^s} \left| \sum_{j=(\nu-1)2^{n-s}+1}^{(2\nu-1)2^{n-s-1}} a_n^{(j)}(f) - \sum_{j=(2\nu-1)2^{n-s-1}+1}^{\nu 2^{n-s}} a_n^{(j)}(f) \right| =$$

$$= 2^{\frac{s}{2}} \sum_{\nu=1}^{2^s} \left| \sum_{j=(\nu-1)2^{n-s}+1}^{(2\nu-1)2^{n-s-1}} \int_{\frac{j-1}{2^n}}^{\frac{2j-1}{2^{n+1}}} \left[f(t) - f\left(t-\frac{1}{2^{n+1}}\right) - f\left(t+\frac{1}{2^{s+1}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + f\left(t+\frac{1}{2^{s+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right] dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{s}{2}} \sum_{\nu=1}^{2^s}{}'' \sum_{j=(\nu-1)2^{n-s}+1}^{(2\nu-1)2^{n-s-1}} \int_{\frac{j-1}{2^n}}^{\frac{2j-1}{2^{n+1}}} \left\{ \int_t^{t+\frac{1}{2^{n+1}}} \left| f'(\tau) - f'\left(\tau+\frac{1}{2^{s+1}}\right) \right| d\tau \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{s}{2}} \sum_{\nu=1}^{2^s}{}''' \int_{\frac{\nu-1}{2^s}}^{\frac{\nu}{2^s}} \left\{ \int_t^{t+\frac{1}{2^{n+1}}} |\Delta_s(\tau)|\, d\tau \right\} dt =$$

$$= 2^{\frac{s}{2}} \int_0^{1-\frac{1}{2^{s+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}} \left\{ \int_t^{t+\frac{1}{2^{n+1}}} |\Delta_s(\tau)|\, d\tau \right\} dt,^{2)}$$

---

1) Знак $'$ у суммы означает, что при $\nu=2^s$ интеграл берется по промежутку $\left[1-\frac{1}{2^s},\ 1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]$.

2) Знак $''$ у суммы означает, что при $\nu=2^s$ последний интеграл во внутренней сумме берется по отрезку $\left[\frac{j-1}{2^n},\ \frac{2j-1}{2^{n+1}}\right]$, а знак $'''$ означает, что при $\nu=2^s$ интеграл берется по промежутку $\left[\frac{\nu-1}{2^s},\ \frac{2\nu-1}{2^s}-\frac{1}{2^{n+1}}\right]$.

где $\Delta_s(\tau) \equiv f'(\tau) - f'\left(\tau + \frac{1}{2^{s+1}}\right)$. Меняя порядок интегрирования в последнем выражении, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{2^s} |c_{ns}^{(\nu)}(f)| \leqslant 2^{\frac{s}{2}} \int_0^{1-\frac{1}{2^{s+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}} \left\{ \int_t^{t+\frac{1}{2^{n+1}}} |\Delta_s(\tau)|\, d\tau \right\} dt =$$

$$= 2^{\frac{s}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} |\Delta_s(\tau)|\, d\tau \int_0^{\tau} dt + \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{1-\frac{1}{2^{s+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}} |\Delta_s(\tau)|\, d\tau \int_{\tau-\frac{1}{2^{n+1}}}^{\tau} dt + \right.$$

$$\left. + \int_{1-\frac{1}{2^{s+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}}^{1-\frac{1}{2^{s+1}}} |\Delta_s(\tau)|\, d\tau \int_{\tau-\frac{1}{2^{n+1}}}^{1-\frac{1}{2^{s+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}} dt \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{s}{2}} \int_0^{1-\frac{1}{2^{s+1}}} 2^{-(n+1)} \left| f'(\tau) - f'\left(\tau + \frac{1}{2^{s+1}}\right)\right| d\tau \leqslant \frac{1}{2}\, 2^{\frac{s}{2}-n} \omega_1\left(\frac{1}{2^{s+1}}, f'\right).$$

§ 4. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. 1) Применяя неравенство Гёльдера и лемму 2 (см. (20)), из (4) при $1 \leqslant p < \infty$ получаем

$$\sum_{m=3}^{\infty} |c_m(f)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |c_{n0}^{(0)}(f)| + \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{2^s} |c_{ns}^{(\nu)}(f)| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |c_{n0}^{(0)}(f)| + \sum_{s=0}^{n-1} 2^{s\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left[\sum_{\nu=1}^{2^s} |c_{ns}^{(\nu)}(f)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \right.$$

$$\leqslant D \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} \omega_p\left(\frac{1}{2^n}, f\right) < \infty. \tag{22}$$

Если же $p = \infty$, то (5) вытекает из (22) и неравенств $\omega_p(\delta, f) \leqslant \omega(\delta, f)$ при всех $1 \leqslant p < \infty$, если $f(t) \in C(0, 1)$.

2) При наших условиях относительно $\omega(\delta)$ можно построить (см. [10], с. 625) последовательность $E_m \downarrow 0$, причем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} E_m = \infty, \quad \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} E_k \leqslant \omega\left(\frac{1}{m}\right) \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

Положим тогда

$$f_0(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(E_{2^k}-E_{2^{k+1}})\sin 2^{k+1}\pi t\equiv\sum_{k=1}^{\infty}(E_{2^k}-E_{2^{k+1}})\varphi_k(t). \qquad (24)$$

Рассуждая точно так же, как и Б. И. Голубов (см. [4], с. 1277), можно показать, что $\omega(\delta, f_0)=O(\omega(\delta))$ при $\delta\to 0$.

Далее, в силу равномерной сходимости ряда (24) и равенств (11) имеем $c_{ns}^{(\nu)}(f_0)=\sum_{k=1}^{s-1}(E_{2^k}-E_{2^{k+1}})c_{ns}^{(\nu)}(\varphi_k)$; следовательно, используя (13) и (14), получим

$$\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}}|c_{n\,n-1}^{(\nu)}(f_0)|\geqslant\sum_{\nu=1}^{2^{n-2}}|c_{n\,n-1}^{(2\nu-1)}(f_0)|\geqslant\Big|\sum_{\nu=1}^{2^{n-2}}\sum_{k=1}^{n-2}(E_{2^k}-E_{2^{k+1}})c_{n\,n-1}^{(2\nu-1)}(\varphi_k)\Big|=$$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{n-2}(E_{2^k}-E_{2^{k+1}})\sum_{\nu=1}^{2^{n-2}}c_{n\,n-1}^{(2\nu-1)}(\varphi_k)\Big|\geqslant D(E_{2^{n-2}}-E_{2^{n-1}})2^{\frac{n}{2}}, \qquad (25)$$

а тогда в силу первого условия (23) (см. также [10], с. 620)

$$\sum_{m=1}^{\infty}|c_m(f_0)|\geqslant\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}}|c_{n\,n-1}^{(\nu)}(f_0)|\geqslant D\sum_{n=3}^{\infty}(E_{2^{n-2}}-E_{2^{n-1}})2^{\frac{n}{2}}=\infty,$$

и теорема доказана полностью.

Доказательство теоремы 2 проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 4 работы [4], поэтому мы его не приводим.

Доказательство теоремы 3. 1) В силу леммы 2 (см. (19)) и условия $f(t)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$

$$|c_{ns}^{(\nu)}(f)|\leqslant D_\alpha(f)2^{-\frac{s}{2}-\alpha n}\quad(n=1,2,\ldots;\ 0\leqslant s\leqslant n-1;\ \theta(s)\leqslant\nu\leqslant 2^s), \qquad (26)$$

следовательно,

$$\sum_{m=3}^{\infty}m^{\gamma}|c_m(f)|^{\beta}\leqslant 2^{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}2^{n\gamma}\Big\{|c_{n0}^{(0)}(f)|^{\beta}+\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{2^s}|c_{ns}^{(\nu)}(f)|^{\beta}\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\gamma}D_\alpha^{\beta}(f)\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\gamma-\alpha\beta)}\Big\{1+\sum_{s=0}^{n-1}2^{s\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}\Big\},$$

и нам остается заметить, что

$$\min\Big\{\beta\Big(\alpha+\frac{1}{2}\Big)-1,\ \alpha\beta\Big\}=\begin{cases}\beta\Big(\alpha+\dfrac{1}{2}\Big)-1 & \text{при } 0<\beta\leqslant 2,\\ \alpha\beta & \text{при } \beta>2.\end{cases}$$

2) Положим для $0<\alpha<1$

$$f_\alpha(t)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\alpha k}\sin 2^{k+1}\pi t\equiv\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\alpha k}\varphi_k(t). \qquad (27)$$

Так как (см. [10], а также [4], с. 1284) функция, сопряженная с $f_\alpha(t)$, принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$, то в силу теоремы И. И. Привалова (см. [10], с. 560) функция $f_\alpha(t)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$. Отсюда, в частности, вытекает, что для функции (27) выполнены неравенства (26).

Совершенно аналогично тому, как мы доказывали неравенства (25), можно показать, что

$$\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} |c_{n\,n-1}^{(\nu)}(f_\alpha)| \geqslant D_\alpha 2^{n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \quad (n=3,\ 4,\ \ldots). \tag{28}$$

Пусть E_n' — множество целых чисел $\nu \in [1,\ 2^{n-1}]$, для которых выполняются неравенства

$$|c_{n\,n-1}^{(\nu)}(f_\alpha)| \geqslant \frac{D_\alpha}{2} 2^{-n\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}, \tag{29}$$

а E_n'' — множество остальных целых чисел ν из отрезка $[1,\ 2^{n-1}]$. Число элементов во множестве $E_n'(E_n'')$ обозначим через N_n' (соответственно через N_n''). Из (28), (29) и (26) при $s=n-1$ вытекает

$$D_\alpha 2^{n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \leqslant \sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} |c_{n\,n-1}^{(\nu)}(f_\alpha)| = \sum_{\nu\in E_n'} + \sum_{\nu\in E_n''} \leqslant$$

$$\leqslant D_\alpha(f) N_n' 2^{-n\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} + N_n'' \frac{D_\alpha}{2} 2^{-n\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} \leqslant$$

$$\leqslant D_\alpha(f) N_n' 2^{-n\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} + \frac{D_\alpha}{2} 2^{n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)},$$

откуда получаем неравенства

$$N_n' \geqslant \frac{D_\alpha}{2D_\alpha(f)} 2^n \tag{30}$$

и, наконец, из (29) и (30) при $\gamma = \beta\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-1$ следует

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^\gamma |c_m(f_\alpha)|^\beta \geqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\nu\in E_n'} 2^{n\gamma} |c_{n\,n-1}^{(\nu)}(f_\alpha)|^\beta \geqslant D_{\alpha,\beta}(f) \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{n\left[\gamma+1-\beta\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]} = \infty,$$

и при $0<\beta\leqslant 2$ наше утверждение доказано.

Если же $\beta>2$, то из равномерной сходимости ряда (27) и равенств (12) вытекает, что $c_{n0}^{(0)}(f_\alpha) = \frac{2}{\pi} 2^{-\alpha n}$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ и при $\gamma=\alpha\beta$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^\gamma |c_m(f)|^\beta \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\gamma} |c_{n0}^{(0)}(f_\alpha)|^\beta = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\beta \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\gamma-\alpha\beta)} = \infty.$$

Доказательство теоремы 4. 1) Пусть сначала $\min\left\{1, \frac{2}{2\alpha+1}\right\} > \beta > \frac{2}{2\alpha+3}$. Тогда, используя неравенство Гёльдера и лемму 3, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{2^s} |c_{ns}^{(\nu)}(f)|^\beta \leqslant 2^{s(1-\beta)} \left[\sum_{\nu=1}^{2^s} |c_{ns}^{(\nu)}(f)|\right]^\beta \leqslant D_{\alpha\beta}(f) 2^{-n\beta+s\left[1-\beta\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]}; \tag{31}$$

кроме того, из леммы 2 (см. (19) при $n=1,\ 2,\ldots;\ s=\nu=0,\ p=1$) вытекают неравенства $|c_{n0}^{(0)}(f)| \leqslant D_\alpha(f) 2^{-n}$, следовательно, учитывая (31), имеем

$$\sum_{m=3}^{\infty}|c_m(f)|^{\beta}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{|c_{n0}^{(0)}(f)|^{\beta}+\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{2^s}|c_{ns}^{(\nu)}(f)|^{\beta}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant D_{\alpha,\beta}(f)\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\gamma-\beta)}\left\{1+\sum_{s=0}^{n-1}2^{s\left[1-\beta\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant D_{\alpha,\gamma}(f)\sum_{n=1}^{\infty}2^{n\left[\gamma+1-\beta\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)\right]}<\infty,$$

но тогда последнее неравенство верно при любых $\beta>\frac{2}{2\alpha+3}$.

Аналогично получим при $\gamma<\min\left\{1,\ \alpha+\frac{1}{2}\right\}$

$$\sum_{m=3}^{\infty}m^{\gamma}|c_m(f)|\leqslant 2^{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}2^{n\gamma}\left\{|c_{n0}^{(0)}(f)|+\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{2^s}|c_{ns}^{(\nu)}(f)|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant D_{\alpha,\beta}(f)\sum_{n=1}^{\infty}2^{n\gamma}\left\{2^{-n}+\sum_{s=0}^{n-1}2^{-n}2^{s\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\right\}<\infty.$$

2) Для доказательства нам понадобится следующее утверждение: если при некотором $0<\alpha\leqslant 1$ функция $F(t)\in C^1\operatorname{Lip}\alpha$, то

$$|c_{ns}^{(\nu)}(F)|\leqslant D_{\alpha}(F)\,2^{-n-s\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\quad(n=1,\ 2,\ldots;\ 0\leqslant s\leqslant n-1;\ \theta(s)\leqslant\nu\leqslant 2^s),\tag{32}$$

которое легко получить, используя (1)—(3) и равенства (49) работы [4].

Положим для $\alpha=1$ $F_1(t)=t^2$. Легко видеть, что $c_{ns}^{(\nu)}(F_1)=$ $=\frac{1}{8}2^{-n-\frac{3}{2}s}$ $(n=1,\ 2,\ldots;\ 0\leqslant s\leqslant n-1,\ 1\leqslant\nu\leqslant 2^s)$, значит, при $\beta=\frac{2}{5}$ и $\gamma=1$ соответственно получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}|c_m(F_1)|^{\beta}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}}|c_{n\,n-1}^{(\nu)}(F_1)|^{\beta}=D\sum_{n=1}^{\infty}2^{n\left(1-\frac{5}{2}\beta\right)}=\infty;$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^{\gamma}|c_m(F_1)|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}2^{n\gamma}\sum_{\nu=1}^{4}|c_{n2}^{(\nu)}(F_1)|=D\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\gamma-1)}=\infty.$$

Если же $0<\alpha<1$, то положим

$$F_{\alpha}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-(1+\alpha)k}\sin 2^{k+1}\pi t\equiv\sum_{k=1}^{\infty}2^{-(1+\alpha)k}\varphi_k(t).\tag{33}$$

В силу равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}2^{-(1+\alpha)k}\varphi_k'(t)$ и результатов Харди (см. [11], а также [4], с. 1284) функция $F_{\alpha}(t)\in C^1\operatorname{Lip}\alpha$ и имеют место неравенства (32).

Рассуждая точно так же, как и при доказательстве неравенств (25), получим

$$\sum_{\nu=1}^{2^s} |c_{ns}^{(\nu)}(F_\alpha)| \geqslant D_\alpha 2^{s\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-n} \quad (n=3,\ 4, \ldots;\ 2 \leqslant s \leqslant n-1). \qquad (34)$$

Далее, аналогично доказательству теоремы 3 легко получить, что число N_n' элементов множества E_n' (E_n' — множество целых чисел $\nu \in [1,\ 2^{n-1}]$, для которых выполняются неравенства

$$|c_{n\,n-1}^{(\nu)}(F_\alpha)| \geqslant \frac{D_\alpha}{2} 2^{\alpha-\frac{1}{2}} 2^{-n\left(\frac{3}{2}+\alpha\right)} \quad) \qquad (35)$$

удовлетворяет условию

$$N_n' \geqslant D_\alpha(F) 2^n \qquad (36)$$

(надо лишь вместо (28), (29) и (26) применить соответственно (34), (35) и (32) при $s=n-1$) и в силу (35) и (36) при $\beta=\frac{2}{2\alpha+3}$ имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_m(F_\alpha)|^\beta \geqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\nu\in E_n'} |c_{n\,n-1}^{(\nu)}(F_\alpha)|^\beta \geqslant D_{\alpha,\beta}(F) \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{n\left[1-\frac{2\alpha+3}{2}\beta\right]} = \infty.$$

Наконец, из (34) при $s=2$ получим, что хотя бы для одного целого $1 \leqslant \nu_n \leqslant 4$ выполнено неравенство $|c_{n2}^{(\nu_n)}(F_\alpha)| \geqslant \frac{D_\alpha}{4} 2^{1-2\alpha-n}$ и при $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, $\beta=1$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^\gamma |c_m(F_\alpha)| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\gamma} |c_{n2}^{(\nu_n)}(F_\alpha)| \geqslant D_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\gamma-1)} = \infty.$$

Если же $0<\alpha<\frac{1}{2}$, то надо применить неравенства (34) при $s=n-1$. Получаем при $\gamma=\alpha+\frac{1}{2}$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^\gamma |c_m(F_\alpha)| \geqslant D_\alpha(F) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\left[\gamma-\alpha-\frac{1}{2}\right]} = \infty.$$

Теорема доказана полностью.

Доказательство теоремы 5. Мы покажем, что из условия (9) вытекает, что вариация $\overset{1}{\underset{0}{V}} f$ функции $f(t)$ на отрезке $[0,\ 1]$ равна нулю.

Заметим сначала, что частные суммы Фурье $S_m(t,\ f)$ функции $f(t)$ по системе $\{\psi_m(t)\}$ суть ступенчатые функции с интервалами постоянства $\delta_k^{(i)} \equiv \left(\frac{i-1}{2^k},\ \frac{i}{2^k}\right)$, $i=1,\ 2, \ldots,\ 2^k$, если $m=2^{k-1}+j$ $(1 \leqslant j \leqslant 2^{k-1})$, следовательно,

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2^k} \sup_{t_1,t_2\in\delta_k^{(i)}} |f(t_1)-f(t_2)| \leqslant 2 \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2^k} \sup_{t\in\delta_k^{(i)}} |f(t)-S_{2^k}(t,\ f)|. \qquad (37)$$

Рассмотрим теперь отдельно выражение, стоящее под знаком предела в (37) справа (обозначив его через $V_k(f)$. Так как (см. [1], с. 302) $\psi_m(t)=X_i(t)\,r_{n+1}(t)$, где $m=2^n+i$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, при любом фиксированном $t\in[0,\ 1]$ лишь одна из функций $\chi_s^{(\nu)}(t)$, $1\leqslant\nu\leqslant 2^s$, отлична от нуля в точке t и система $\{\psi_m(t)\}$ образует базис в пространстве $C(0,\ 1)$, то

$$V_k(f)=\sum_{i=1}^{2^k}\sup_{t\in\delta_k^{(i)}}\left|\sum_{m=1}^{\infty}c_m(f)\psi_m(t)-\sum_{m=1}^{2^k}c_m(f)\psi_m(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{2^k}\sum_{n=k}^{\infty}\Big\{|c_{n0}^{(0)}(f)|+\sum_{s=0}^{k-1}\sqrt{2^s}\,|c_{ns}^{(\nu_i)}(f)|+$$

$$+\sum_{s=k}^{n-1}\sqrt{2^s}\max_{(i-1)\,2^{s-k}<\nu\leqslant i2^{s-k}}|c_{ns}^{(\nu)}(f)|\Big\},\tag{38}$$

где $\nu_i=\nu$ при $(\nu-1)\,2^{k-s}<i\leqslant\nu 2^{k-s}$ $(\nu=1,\dots,2^s)$. Меняя порядок суммирования в последнем выражении, получаем

$$V_k(f)\leqslant\sum_{n=k}^{\infty}\Big\{2^k|c_{n0}^{(0)}(f)|+\sum_{s=0}^{n-1}2^{k-\frac{s}{2}}\sum_{\nu=1}^{2^s}|c_{ns}^{(\nu)}(f)|\Big\}\to 0 \text{ при } k\to\infty$$

в силу условия (9). Значит, из (37) следует, что $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=0$ и $f(t)\equiv$ $\equiv\mathrm{const}$.

Доказательство следствия 2. Имеем

$$\lim_{k\to\infty}2^k\sum_{n=k}^{\infty}\Big\{|c_{n0}^{(0)}(f)|+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2^s}}\sum_{\nu=1}^{2^s}|c_{ns}^{(\nu)}(f)|\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\Big\{(2^n+1)|c_{n0}^{(0)}(f)|+\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{2^s}(2^n+2^s+\nu)\,|c_{ns}^{(\nu)}(f)|\Big\}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{m=2^k+1}^{\infty}m|c_m(f)|=0,$$

и наше утверждение вытекает из теоремы 5.

Доказательство следствия 3. Условие $c_m(f)=o\,(m^{-3/2})$ при $m\to\infty$ означает, что найдется последовательность чисел $\{\varepsilon_m\}$, $\varepsilon_m\to 0$, при $m\to\infty$, для которой выполняются неравенства $|c_m(f)|\leqslant$ $\leqslant\varepsilon_m 2^{-\frac{3}{2}n}$ $(2^n<m\leqslant 2^{n+1},\ n=1,\ 2,\dots)$. Не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать $\varepsilon_m\downarrow 0$, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}2^k\sum_{n=k}^{\infty}\Big\{|c_{n0}^{(0)}(f)|+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2^s}}\sum_{\nu=1}^{2^s}|c_{ns}^{(\nu)}(f)|\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{k\to\infty}\varepsilon_{2^k}2^k\sum_{n=k}^{\infty}2^{-n}\Big\{1+\sum_{s=0}^{n-1}2^{-\frac{n-s}{2}}\Big\}\leqslant D\lim_{k\to\infty}\varepsilon_{2^k}=0.$$

Доказательство теоремы 6. Пусть $m\geqslant 2$ — любое натуральное число и n выбрано так, чтобы $2^n<m\leqslant 2^{n+1}$. Тогда в силу условия (10) и леммы 3 получаем

$$|c_m(f)| \leqslant \max_{2^n < m \leqslant 2^{n+1}} |c_m(f)| \leqslant D \min_{2^{n-1} < m \leqslant 2^n} |c_m(f)| \leqslant$$

$$\leqslant D2^{-(n-2)} \sum_{\nu=1}^{2^{n-2}} |c^{(\nu)}_{n-1,\,n-2}(f)| \leqslant D\cdot 2^{-(n-2)} \frac{1}{2} 2^{-(n-1)+\frac{n-2}{2}} \omega_1\left(\frac{1}{2^{n-1}}, f'\right) \leqslant$$

$$\leqslant Dm^{-\frac{3}{2}} \omega_1\left(\frac{1}{m}, f'\right).$$

Далее, так как функция $f(t)$ абсолютно непрерывна, то $f'(t) \in L(0, 1)$ и $\omega_1(\delta, f') = o(1)$ при $\delta \to 0$, поэтому из последнего соотношения вытекает $c_m(f) = o(m^{-\frac{3}{2}})$ при $m \to \infty$ и в силу следствия 3 функция $f(t) \equiv \text{const}$.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить В. А. Андриенко, под руководством которого выполнена эта работа, а также Э. А. Стороженко за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олевский А. М. Об одной ортонормальной системе и ее применениях. Матем. сб., т. 71 (113) : 3, 1966, с. 297—336.
2. Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара. Матем. сб., т. 63 (105) : 3, 1964, с. 356—391.
3. Конюшков А. А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. Матем. сб., т. 44 (86) : 1, 1958, с. 53—84.
4. Голубов Б. И. О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара. ИАН СССР. Сер. матем., т. 28, № 6, 1964, с. 1271—1296.
5. Ульянов П. Л. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье. Матем. сб., т. 72 (114) : 2, 1967, с. 193—225.
6. Бочкарев С. В. О коэффициентах Фурье функций класса Lip α по полным ортонормированным системам. Матем. заметки, т. 7, № 4, 1970, с. 397—402.
7. Бочкарев С. В. О коэффициентах рядов Фурье по системе Хаара. Матем. сб., т. 80 (112) : 1, 1969, с. 97—116.
8. Fine N. I. On the Walsh function. Trans. Amer. Math. Soc., v. 65, 1949, p. 372—414.
9. Матвеев В. А. О вариации функции и о коэффициентах Фурье по системам Хаара и Шаудера. ИАН СССР. Сер. матем., т. 30, № 6, 1966, с. 1397—1419.
10. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.
11. Hardy G. H. Weierstrass's nondifferentiable function. Trans. Amer. Math. Soc., v. 17, 1916, p. 301—325.

г. Одесса

Поступила
18 IV 1972