Литература

1. *Самарский, А. А., Галактионов В .А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. // М. Наука. 1987.
2. *Matus P.* Stability of difference schemes for nonlinear time-depended problems // Comp. Meth. Appl. Math. Vol. 3. N. 2. 2003. P. 313–329.
3. *Matus P., Lemeshevsky S.* Stability and monotonicity of difference schemes for nonlinear scalar conservation laws and multidimensional quasi-linear parabolic equations // Comp. Meth. Appl. Math. 2009. Vol. 9. N. 3. P. 253–280.
4. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем. // М. Наука. 1977.
5. *Похожаев С.И.* Об априорных оценках и градиентных катастрофах гладких решений гиперболических систем законов сохранения // Труды математического института им. В.А. Стеклова. Т 243. 2003. С. 257–288.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДИСПЕРСИОННОГО ГАММА – ПРОЦЕССА

А. В. Кузьмина

Определение 1. Случайная величина ϑ имеет дисперсионное гамма – распределение, если ее плотность распределения имеет вид

$$f_{\vartheta}(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi g}}\exp\left(-\frac{(x-\theta g)^2}{2\sigma^2 g}\right)\frac{y^{\frac{1}{\nu}-1}\exp\left(-\frac{g}{\nu}\right)}{\nu^{\frac{1}{\nu}}\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}dg,\ x\in\mathbb{R},$$

где $\Gamma(\mathrm{x})$, $x>0$ – гамма – функция, а $\sigma>0,\nu>0,\theta\in\mathbb{R}$.

Случайную величину ϑ с дисперсионным гамма – распределением будем обозначать $\vartheta\sim V(\sigma,\nu,\theta)$.

Определение 2. Случайный процесс $V=\left(V_t\right)_{t\geq 0}$ с параметрами $\sigma>0,\nu>0,\theta\in\mathbb{R}$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ со значениями в $\mathbb{R}$, называется дисперсионным гамма – процессом, если выполнены следующие условия:

1. $V_0\overset{п.н.}{=}0$.

2. V имеет независимые приращения: для любого $n\geq 1$ и любого набора точек $t_j\in\left[0,\infty\right)$ $j=\overline{0,n}$ таких, что $0\leq t_0<t_1<...<t_n$, величины $V_{t_0},V_{t_1}-V_{t_0},...,V_{t_n}-V_{t_{n-1}}$ являются независимыми.

3. для любых $s \geq 0, t \geq 0$ V имеет стационарные с дисперсионным гамма – распределением приращения с параметрами $\sigma\sqrt{t} > 0, \nu / t > 0, t\theta > 0$, то есть:

$$V_{t+s} - V_s \overset{d}{=} V_t - V_0 \sim V(\sigma\sqrt{t}, \nu / t, t\theta),$$

где $\overset{d}{=}$ обозначает равенство по распределению.

Дисперсионный гамма-процесс $V = (V_t)_{t \geq 0}$ можно определить двумя способами [3].

Первый состоит в использовании стандартного винеровского процесса $W = (W_t)_{t \geq 0}$ и гамма-процесса $G = (G_t)_{t \geq 0}$ с параметрами $a = 1/\nu$ и $b = 1/\nu$, а именно $V_t = \theta G_t + \sigma W_{G_t}$, где $W = \left(W_{G_t}\right)_{t \geq 0}$ – стандартный винеровский процесс в случайные моменты времени G_t, $G = (G_t)_{t \geq 0}$ – гамма-процесс, $\sigma > 0, \nu > 0, \theta \in \mathbb{R}$.

Математическое ожидание, дисперсия, асимметрия и эксцесс дисперсионного гамма-процесса $V = (V_t)_{t \geq 0}$ с параметрами σ, ν, θ соответственно равны [3]

$$\theta t,\ (\sigma^2 + \nu\theta^2)t,\ \theta\nu\left(3\sigma^2 + 2\nu\theta^2\right) \Big/ t^{1/2}\left(\sigma^2 + \nu\theta^2\right)^{3/2},$$

$$3\left(1 + 2\nu / t \text{-} \nu\theta^4 t\left(\sigma^2 + \nu\theta^2\right)^{-2}\right). \tag{1}$$

Второй способ определения дисперсионного гамма-процесса заключается в представлении $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t \geq 0}$ как разности двух независимых гамма-процессов $G^1 = \left(G_t^1\right)_{t \geq 0}$ с параметрами a, b_1 и $G^2 = \left(G_t^2\right)_{t \geq 0}$ с параметрами a, b_2, то есть $\bar{V}_t = G_t^1 - \mathrm{G}_t^2$.

Теорема 1. Параметры a, b_1, b_2 дисперсионного гамма-процесса $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t \geq 0}$ связаны с параметрами σ, ν, θ дисперсионного гамма-процесса $V = (V_t)_{t \geq 0}$ следующими соотношениями

$$a = 1/\nu > 0,\ b_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2\nu^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\nu} + \frac{1}{2}\theta\nu\right)^{-1} > 0,$$

$$b_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2\nu^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\nu} - \frac{1}{2}\theta\nu \right)^{-1} > 0. \qquad (2)$$

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДИСПЕРСИОННОГО ГАММА-ПРОЦЕССА

Способы моделирования дисперсионного гамма-процесса с использованием стандартного винеровского процесса и гамма-процесса как разности двух независимых гамма-процессов рассматриваются в [1], [4]. Дисперсионный гамма-процесса $\overline{V} = \left(\overline{V}_t\right)_{t\geq 0}$ с параметрами a, b_1, b_2 и дисперсионный гамма-процесса $V = \left(V_t\right)_{t\geq 0}$ с параметрами σ, ν, θ моделируются в MATLAB® 7.6.0 (R2008a). На рисунках 1, 2 представлены траектории дисперсионных гамма-процессов $\overline{V} = \left(\overline{V}_t\right)_{t\geq 0}$ и $V = \left(V_t\right)_{t\geq 0}$ соответственно.

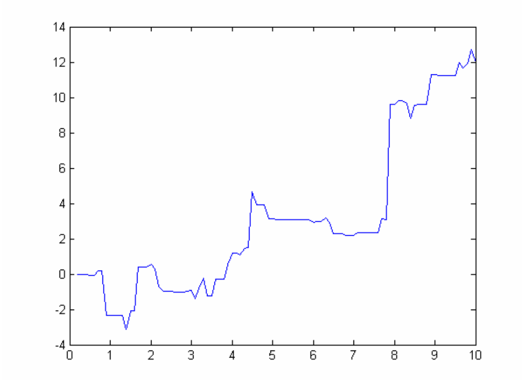

Рис. 1. Траектория дисперсионного гамма-процесса с параметрами $a = 1, b_1 = 0{,}5, b_2 = 1$

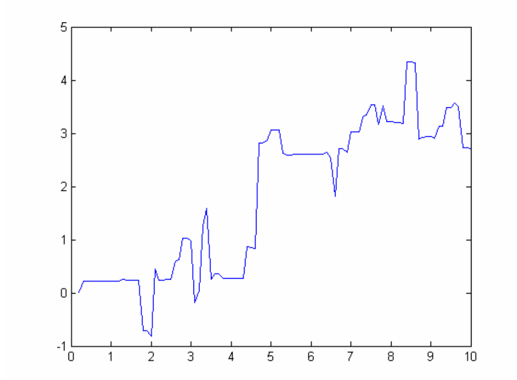

Рис. 2. Траектория дисперсионного гамма-процесса с параметрами $\sigma = 2, \nu = 1, \theta = 1$

Пусть случайная величина ϑ имеет математическое ожидание $m = M\vartheta$, дисперсию $d = D\vartheta$, асимметрию $s = S\vartheta$ и эксцесс $k = K\vartheta$, а $\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_n$ – выборка объема $n \geq 1$ за случайной величиной ϑ, тогда:

$$\widehat{m}_n = 1/n\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j, \quad \widehat{d}_n = 1/(n-1)\sum_{j=1}^{n}\left(\vartheta_j - \widehat{m}_n\right)^2,$$

$$\widehat{s}_n = \sqrt{n(n-1)}/(n-2)\mu_3/\mu_2^{3/2},$$

$$\widehat{k}_n = (n^2-1)/(n-2)(n-3)\left(\mu_4/\mu_2^{\;2} - 3 + 6/(n+1)\right),$$

$\mu_k = 1/n \sum_{j=1}^{n} \left(\vartheta_j - \widehat{m}_n\right)^k$, $k = 2,3,4$ – несмещенные и состоятельные оценки математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса соответственно [2].

В работе по наблюдениям за дисперсионным гамма-процессом строятся оценки математического ожидания, дисперсии, асимметрии, эксцесса и оценки параметров σ, ν, θ; используя теорему 1 строятся оценки параметров a, b_1, b_2.

Литература

1. *Cont R., Tankov P.* Financial modeling with jump processes. Chapman and Hall CRC Press. 2003. P. 192.
2. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир. 1975. С. 375–386.
3. *Madan D. B.*, Carr P.P., E.C. Chang E.C. The variance gamma process and option pricing // European Finance Preview 2. 1998. P. 79–105.
4. *Schoutens W.* Levy processes in finance. Williams. 2003. P. 108–109.

ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ ЗАВЕРШЕНИЯ ПРОЕКТА НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЕ С РАЗНЫМИ СКОРОСТЯМИ ПРОЦЕССОРОВ

Ю. С. Мазаник, В. М. Котов

ВВЕДЕНИЕ

В классической задаче минимизации времени завершения проекта на многопроцессорной системе рассматривается система из $m > 1$ машин $M_1,..,M_m$ с соответствующими им скоростями $s_1,...,s_m$ и N работ, с неотрицательными временами обработки $a_1,..,a_n > 0$. Требуется распределить все работы таким образом, чтобы время их обработки было минимальным.

В on-line версии данной задачи, все работы поступают последовательно, и каждую работу необходимо назначить на выполнение одной из машин сразу после поступления и, не имея никакой информации о последующих работах.

Поскольку последовательность работ заранее не известна, данная задаче не имеет оптимального решения. Существует несколько способов оценки эффективности построенного решения. Стандартной является оценка качества предложенного алгоритма, относительно offline задачи.